THE ELEMENTS

OF

EUCLID

'PRISING THE FIRST SIX BOOKS AND PORTIONS OF THE ELEVENTH AND TWELFTH BOOKS;

TRANSLATED INTO BENGALI

FROM THE TEXT OF

DR ROBERT SIMSON;

WITH COPIOUS NOTES AND EXERCISES)

BY

BRAHMA MOHAN MALLIK.

Calcutta:

PRINTED BY K. C. BANERJEE,

AT THE HITAISHI PRESS,

NO. 1 KRISTODAS PAUL'S LANE.

1871.

অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞাগুলি উপপত্তির সহিত অতি
শীঘ্রই স্বতন্ত্র মুদ্রিত হইবে।

ইউক্লিডের জ্যামিতি

প্রথম ছয় অধ্যায় এবং একাদশ ও দ্বাদশ

অধ্যায়ের কিয়দংশ

ডাক্তর সিম্‌সনের গ্রন্থ হইতে

শ্রীব্রহ্মমোহন মল্লিক কর্ত্তৃক

বাঙ্গালা ভাষায় অনুবাদিত

এবং

বহুবিধ টীকা ও অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞার সহিত

কলিকাতা

(সিমুলিয়ার কাঁসারি পাড়ায়)

কৃষ্ণদাস পালের লেনের ১ নং বাটীতে

হিতৈষী যন্ত্রে

শ্রীকৈলাসচন্দ্র বন্দ্যোপাধ্যায় কর্ত্তৃক মুদ্রিত।

সন ১২৭৭।

PREFACE.

In offering to the Public a fresh Translation of the Elements of Euclid into Bengali, it is hardly necessary to make an apology. Up to this time a complete school Edition of the Elements has not been presented to the Bengali student, and the portions of Euclid which have been published, were one and all translated from the English version of Playfair, who it is well known took great liberties with the text of the Greek Geometer.

In this Edition the Bengali rendering has been given from the text of Dr Simson, which is regarded as the authorized English version of the Elements.

The science of Geometry was not unknown to the ancient Hindus. The work of Brahma Gupta and Bhaskaracharya contain a system of Arithmetical mensuration, together with the properties of right-angled triangles, the method of finding the area of a triangle, of which the three sides are given and the ratio of the diameter of a circle to its circumference. The circumference of the circle is given by Bhaskar-acharya as bearing to the diameter, the proportion of 3927 to 1253 or exactly that of 3·1416 to 1. Braham Gupta takes the proportion of the square root of 10 to 1, or 3·16 to 1. The close approximation of Bhaskaracharya, who lived (according to Colebrooke) in the 12th century, could not have been derived from any intermediate communication with Europe, where

the true ratio was not known till after the 19th century.

When Jahangir was the reigning sovereign of India, the Elements of Euclid were translated into Sanskrit by Pandit Jagannath. He does not acknowledge that his work is a translation from a different language. But it appears from internal evidence that his rendering was from an Arabic version of Euclid's Elements. In the Preface, it is stated that, "in order to please his sovereign, Dvija Samart Jagannath undertook to compose a work on the science of Lines. One who studies this wonderful science, will acquire a knowledge of the properties of angles and figures. This science was dictated by Brahma to Bisvakarma (the Indian Vulcan). Thus, by tradition, it had come down to the nether world. In these later times, this science, through neglect and disuse, has ceased to exist. With the permission of Raja Jaya Sinha, I republish it to the world for the entertainment of the Mathematicians."

The Elements of Euclid, or as much of that work as is contained in Hutton's course of Mathematics, was again translated into Sanskrit, by Professor Yogadhyan of the Calcutta Government Sanskrit College, in the year 1839.

Under the patronage of the Government of Bengal, the first six Books of Euclid were translated into Bengli from the text of Playfair, in the year 1849, by the Rev K. M. Banerjea.

Another edition, consisting only of the first three Books, was published in 1860 under the superintendence of Babu Bhudev Mukhopadhyay, then Head Master of the Hugli Normal School, who adopted with a few verbal changes, Rev Mr Banerjea's Bengali text, and added a few notes and exercises, chiefly selected from Mr Pott's Edition of the Elements.

About four years ago, Babu Kali Kumar Das of Dacca, published a Bengali version of the fourth, the sixth, and portions of the eleventh and twelfth Books of Euclid, together with the Algebraical demonstrations of the propositions in the fifth Book.

In the year 1868, Babu Harish Chandra Chakravarti of Nuddea reprinted the first Book of Bhudev's Euclid, with the addition of a few notes from Dr Lardner's edition of the Elements.

There is another little work on Geometry, which, though not a translation of Euclid, should not here be passed unnoticed. The treatise referred to displays considerable ingenuity. It was written by the late Ram Kamal Bhattacharya of the Calcutta Normal School, and published with an English Translation, after his death.

In all the Editions of Euclid, noticed above, the Translators, Editors, and Compilers have chosen to use in the demonstrations, sometimes the language of Algebra and sometimes that of pure Geometry; and not seldom what may be termed a mixture of both.

This is, perhaps, not the fittest place to enter into

a lengthened discussion on the vexed question, whether "the use of Algebraical signs and symbols should be the proper medium of communicating the truths of pure Geometry. On the one side, it is affirmed that "Symbolical demonstrations are shorter and save time," that it is but pedantry to adhere in this age to the phraseology of the ancient Geometer which is characterized by prolixity and in which "the formalities and parapharnalia of rigor are so ostentatiously put forward as almost to hide the reality." On the other side, it is urged that "attempts at abbreviations have caused endless confusion," that "the use of symbols may be looked upon as repugnant to the rigor and strictness of Geometry," that the ideas annexed to symbols make them unfit for use in this science and that the highest authorities on these matters have condemned the use of Algebraical language in Geometry, Sir Isaac Newton observes that "Equations are expressions of Arithmetical computation, and properly have no place in Geometry, except so far as quantities truly Geometrical (that is lines, surfaces &c.) may be said to be some equal to others. Multiplications, Divisions and such sort of computations, are newly received into Geometry, and that unwarily, and contrary to the first design of the Science. For whosoever considers the construction of Problems by a right line and a circle found out by the first Geometricians, will easily perceive that Geometry was invented that we might expeditiously avoid, by drawing lines, the tediousness of

computation. Therefore these two sciences ought not to be confounded. The ancients did so industriously distinguish them from one another that they never introduced Arithmetical terms into Geometry: and the moderns by confounding both, have lost the simplicity in which all the elegance of Geometry consists." Professor De Morgan remarks that "those who introduce Algebraical symbols into Elementary Geometry, destroy the peculiar character of the latter to every student, who has any mechanical associations connected with those symbols, that is, to every student who has previously used them in ardinary Algebra. Geometrical reasoning and arithmetical process have each its own office: to mix the two in elementary instruction is injurious to the proper acquisition of both."

It must however be regarded as an undisputed fact that the moderns have very much gained in power by the application of Algebra to Geometry, and have arrived at results, which it would have been difficult to obtain, by the application of the method of the ancients. Notwithstanding, it is unquestionable, that the use of Algebraical signs and symbols, may lead beginners to misconceptions and errors, which it would be well to guard against. It is probably owing to these reasons that a symbolical Edition of the Elements, or a symbolical demonstration of the Propositions of Euclid, in the answer papers of the Graduates or Undergraduates, is not at present tolerated in the University of Cambridge.

In this Edition of Euclid, so far as the text is concerned, the use of signs and symbols has been scrupulously avoided. In the notes and exercises, however, no such restriction has been made. At the suggestion of Mr H. Woodrow, *late fellow of Caius College, Cambridge,* Algebraical proofs of the Propositions in the 2nd and 5th Books have been given, in addition to Euclid's Demonstrations.

On account of there being no capital letters in Bengali, considerable difficulty arises in printing mathematical works, and specially a treatise on Geometry. The letters referring to figures may be mistaken for words, and an inflexion added to letters may be taken for an additional letter. It has been observed by the Rev. K. M. Banerjea, the first Translator of Euclid into Bengali, that "The genitive case of nouns is, for instance, formed by the addition of a servile letter (র) to the word inflected; as from rekha (a line)–gen. rekhar (of a line) * * * If the servile letter (র) indicative of the genitive were added, the student might be in danger of mistaking the inflecting *servile* for a *radical;* thus কখর might be mistaken for a set of *three* letters instead of the genitive of কখ."

In this Edition of Euclid, the difficulty noticed above, has been obviated by the use of types of larger size, when lines, angles and figures have been referred to, and the inflecting *serviles* have been printed with types of ordinary size, as কখএর or খঙর।

Another peculiarity will be observed in this work.

The demonstration of each of the Propositions has been so printed as clearly to shew to the student the successive steps of the reasoning. This method was first of all recommended by Professor De Morgan, and it has since been adopted by Messrs Pott, Todhunter and others.

At the end of each Book will be found copious explanatory notes, and a large number of exercises most of which are selections. Besides, for the purpose of illustration, after each Proposition, at least one Exercise has been given which can be deduced from the Proposition or demonstrated in the same manner as the Proposition itself. These will answer the purpose of *riders* in the Examination Papers; and the fact of their being placed after each of the Propositions will, it is hoped, be a sufficient hint for their solution.

Before closing this preface, the author begs to acknowledge with thanks the material assistance received in the preparation of this work from Pandit Kali Prasanna Vidyaratna, the teacher of Sanskrit and Bengali in the Hugli Normal School.

It only remains to be mentioned that any suggestions or corrections from teachers or students, will be received with cordial thanks.

BRAHMA MOHAN MALLIK.

HUGLI NORMAL SCHOOL,

March, 1871.

পূর্ব্বভাষ।

বঙ্গ ভাষায় সুবিখ্যাত ইউক্লিড প্রণীত জ্যামিতি শাস্ত্রের এই অভিনব অনুবাদ, বিদ্যার্থী ও সাধারণ জন গণের হস্তে সমর্পিত হইল। এই অনুবাদের অভিপ্রায় কি, তাহা ব্যক্ত করিবার বিশেষ আবশ্যকতা দৃষ্ট হইতেছে না; তবে এই মাত্র বলা যাইতে পারে যে, আজি পর্য্যন্ত কেহই ইউক্লিডের গ্রন্থের বিদ্যালয়ের ব্যবহারোপযোগী অংশ সকল অনুবাদ করিয়া প্রকাশ করেন নাই; আর যাঁহারা ইউক্লিডের গ্রন্থের ভিন্ন ভিন্ন অংশ বঙ্গ ভাষার অনুবাদ করিয়াছেন, তাঁহারা সকলেই প্লেফেয়ার নামক ইংলণ্ডীয় গণিতবেত্তার অনুসরণ করিয়াছেন। কিন্তু ইউক্লিডের মূল গ্রন্থের সহিত প্লেফেয়ারের ইংরাজী অনুবাদিত জ্যামিতির অনেক স্থলে বৈলক্ষণ্য দৃষ্ট হইয়া থাকে।*

এই গ্রন্থ খানি, সিম্‌সন প্রণীত ইউক্লিডের জ্যামিতি অবলম্বন করিয়া লিখিত হইয়াছে। ইউক্লিডের মূল গ্রন্থের সহিত সিম্‌সন কৃত অনুবাদের সম্পূর্ণ ঐক্য আছে, ইহা সর্ব্বত্র প্রসিদ্ধ।

* প্লেফেয়ার সাহেব এডিন্‌বর্গ বিশ্ববিদ্যালয়ে গণিত শাস্ত্রের অধ্যাপক ছিলেন। এক্ষণে ঐ বিশ্ববিদ্যালয়েও তাঁহার অনুবাদিত জ্যামিতির অধ্যাপনা হয় না।

পূর্ব্ব কালে হিন্দুদিগের মধ্যে জ্যামিতি শাস্ত্র অপরিজ্ঞাত ছিল না। ক্ষেত্র ব্যবহার, সমকোণী ত্রিভুজ সংক্রান্ত যাবতীয় নিয়ম, তিন বাহুর পরিমাণ দ্বারা ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল স্থির করিবার উপায়, বৃত্তের ব্যাস ও পরিধির সম্বন্ধ প্রভৃতির লক্ষণ ব্রহ্ম গুপ্ত ও ভাস্করাচার্য্যের গ্রন্থে লিখিত আছে।

যখন সম্রাট্ জাহাঙ্গীর ভারতবর্ষের রাজসিংহাসনে অধিষ্ঠিত ছিলেন, সেই সময় শ্রীমান্ জগন্নাথ পণ্ডিত সংস্কৃত ভাষায় ইউক্লিডের জ্যামিতি অনুবাদ করেন। তাঁহার প্রণীত রেখাগণিত যে গ্রন্থান্তর হইতে অনুবাদিত, ইহা তিনি স্বীকার করেন না; কিন্তু তাঁহার পুস্তক পাঠ করিলে সহজেই বোধ হইবে যে, তাহা আরব্য ভাষায় লিখিত ইউক্লিডের গ্রন্থের অনুবাদ। তিনি গ্রন্থের উপক্রমণিকায় লিখিয়াছেন যে, "রাজা জয় সিংহের সন্তোষের জন্য দ্বিজ সম্রাট্ জগন্নাথ পণ্ডিত রেখাগণিত রচনা করিলেন; এই অপূর্ব্ব শাস্ত্র পাঠে কোণ সকলের বোধ এবং ক্ষেত্র ও গণিতে সম্যক্ ব্যুৎপত্তি জন্মে। ব্রহ্মা বিশ্বকর্ম্মাকে এই শাস্ত্র বলেন; এইরূপ পারম্পর্য্য বশত ইহা ধরণী তলে আসিয়া উপস্থিত হয়। তাহা কাল ক্রমে উচ্ছেদ দশা প্রাপ্ত হইলে, আমি রাজা জয় সিংহের আজ্ঞায় গণিতবেত্তাদিগের সন্তোষের নিমিত্ত পুনর্ব্বার ইহা সম্যক্‌রূপে প্রকাশিত করিলাম।"

হটন সাহেব স্বপ্রণীত গণিত শাস্ত্রে, ইউক্লিডের জ্যামিতির যেরূপ সংস্কার করিয়াছেন, তাহা অবলম্বন করিয়া

কলিকাতার গবর্ণমেন্ট সংস্কৃত কালেজের জ্যোতিঃশাস্ত্রের অধ্যাপক শ্রীমান্ যোগধ্যান মিশ্র ১৮৩৯ খৃঃ অব্দে জ্যামিতি শাস্ত্র পুনর্ব্বার সংস্কৃতে অনুবাদ করেন।

বাঙ্গালা গবর্ণমেন্টের প্রোৎসাহে শ্রীযুক্ত রেবরেণ্ড কৃষ্ণমোহন বন্দ্যোপাধ্যায় ১৮৪৬ খৃঃ অব্দে প্লেফেয়ার লিখিত ইউক্লিডের গ্রন্থের প্রথম ছয় অধ্যায় বাঙ্গালা ভাষায় অনুবাদ করিয়া সর্ব্বাগ্রে প্রকাশ করেন।

১৮৬০ খৃঃ অব্দে হুগলি নর্ম্মাল বিদ্যালয়ের পূর্ব্বতন প্রধান শিক্ষক শ্রীযুক্ত বাবু ভূদেব মুখোপাধ্যায়, বন্দ্যোপাধ্যায় মহাশয়ের গ্রন্থকে মূল স্বরূপ গ্রহণ ও স্থান বিশেষে দুই একটী শব্দ পরিবর্ত্ত করিয়া, পট সাহেবের কৃত জ্যামিতি হইতে কতকগুলি টীকা ও অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞা সন্নিবেশ পূর্ব্বক ইউক্লিডের প্রথম তিন অধ্যায় বঙ্গভাষায় প্রণয়ন করেন।

প্রায় চারি বৎসর অতীত হইল, ঢাকা নর্ম্মাল বিদ্যালয়ের ছাত্র শ্রীযুক্ত বাবু কালীকুমার দাস ইউক্লিডের ৪থ, ৬ঠ, এবং ১১শ ও ১২শ অধ্যায়ের কিয়দংশ আর ৫ম অধ্যায়ের বৈজিক উপপত্তিগুলি বাঙ্গালায় অনুবাদ করিয়া প্রচার করিয়াছেন।

১৮৬৮ খৃঃ অব্দে নবদ্বীপ নিবাসী শ্রীযুক্ত বাবু হরিশ্চন্দ্র চক্রবর্ত্তী লার্ড্নার কৃত ইংরাজি জ্যামিতির টীকার কিয়দংশ অনুবাদ করিয়া শ্রীভূদেব মুখোপাধ্যায় প্রণীত ইউক্লিডের ১ম অধ্যায় পুনর্মুদ্রিত করেন।

এ স্থলে আর একখানি জ্যামিতি গ্রন্থের নাম উল্লেখ

না করিয়া থাকিতে পারা যায় না। ঐ পুস্তক খানি ইউক্লিডের প্রণালী অবলম্বন পূর্ব্বক লিখিত হয় নাই বটে, তথাপি ইহা গ্রন্থকারের বুদ্ধি চাতুর্য্যের সম্যক্ পরিচয় প্রদান করিতেছে। কলিকাতা নর্ম্মাল বিদ্যালয়ের ভূতপূর্ব্ব প্রধান শিক্ষক মৃত রামকমল ভট্টাচার্য্য ইহার প্রণেতা। তাহার মৃত্যুর পর ঐ পুস্তক ইংরাজি অনুবাদ সহ মুদ্রিত ও প্রচারিত হইয়াছে।

ইউক্লিড প্রণীত জ্যামিতির যে সকল বাঙ্গালা অনুবাদ ও সংস্করণ উল্লিখিত হইল, তৎসমুদায়েই প্রতিজ্ঞা গুলির উপপত্তি কালে কখন বৈজিক, কখন বা জ্যামিতিক ভাষা ব্যবহার করা হইয়াছে, আবার স্থান বিশেষে এই উভয় ভাষার যোগোৎপন্ন মিশ্র ভাষাও ব্যবহৃত হইয়াছে।

জ্যামিতির সাধ্য বিষয় গুলি বৈজিক ভাষা ও বৈজিক চিহ্ন প্রয়োগ দ্বারা উপপন্ন করা বিধেয় কি না, তাহা পুঙ্খানুপুঙ্খ বিচার করিবার এ উপযুক্ত স্থল নহে; কিন্তু এই বিষয়ের ভিন্ন ভিন্ন মতাবলম্বীদিগের মধ্যে কেহ কেহ বলেন যে, সাধ্য বিষয় গুলি সাঙ্কেতিক উপপত্তি দ্বারা সংক্ষেপে সিদ্ধ হয়, তাহাতে সময় বৃথা নষ্ট হয় না; এবং বর্ত্তমান কালে পূর্ব্বতন জ্যামিতিবেত্তাদিগের ন্যায় বহু বাক্য ব্যয় করা কেবল পাণ্ডিত্যাভিমানের কার্য্যমাত্র আর এই রূপ করিলে, অভেদ্য তর্ক পংক্তিগুলি এরূপ আড়ম্বরে গ্রথিত হইবে যে, প্রমাণের সার কথা সহজে উপলব্ধ হইবে না। অপর কেহ কেহ সিদ্ধান্ত করিয়াছেন যে, সংক্ষেপে উপপত্তির

চেষ্টা অশেষ অনর্থের মূল এবং বৈজিক ভাষা ও চিহ্ন দ্বারা কোন প্রতিজ্ঞা উপপন্ন করা জ্যামিতিক উপপত্তির দৃঢ় সম্বন্ধ রীতির বিরুদ্ধ কার্য্য; আর বৈজিক চিহ্ন গুলি দ্বারা মনে যে প্রকার ভাবের উদয় হয়, তাহাতে সহজেই বোধ হইবে যে, ঐ সকল চিহ্ন জ্যামিতি শাস্ত্রের উপযোগী হইতে পারে না।

জগদ্বিখ্যাত গণিতবেত্তারা জ্যামিতিতে বৈজিক ভাষা প্রয়োগ করা যুক্তি বিরুদ্ধ বলিয়া স্থির করিয়াছেন। সর আইসাক নিউটন বলেন যে, "সমীকরণ গুলি পাটীক গণনার সমানত্ব দর্শাইবার জন্যই ব্যবহৃত হইতে পারে; রেখা, সমতল প্রভৃতি প্রকৃত জ্যামিতিক রাশির মধ্যে, একটী আর একটীর সর্ব্বতোভাবে সমান, ইহা ব্যক্ত করা ব্যতীত আর কোন বিষয়ে সমীকরণ গুলি জ্যামিতি শাস্ত্রের উপযোগী বলা যায় না। অধুনা অনবধানতা বশত গুণ, ভাগ প্রভৃতি পাটীক প্রক্রিয়া সকল জ্যামিতিতে ব্যবহৃত হইতেছে। এইরূপ রীতি এই শাস্ত্রের আদিম প্রণালীর বিরুদ্ধ। প্রাচীন জ্যামিতিবেত্তারা সরল রেখা ও বৃত্ত প্রভৃতি দ্বারা প্রতিজ্ঞা গুলির যেরূপ অঙ্কন করিয়াছেন, তাহা ভাবিলেই বোধ হইবে যে, তাঁহারা গণনার পরিশ্রম ও ক্লেশ হইতে অব্যাহতি পাইবার জন্য এই শাস্ত্র রচনা করিয়াছেন। এই হেতু পাটীগণিত ও জ্যামিতি, এই দুই শাস্ত্র মিশ্রিত করা উচিত নহে। প্রাচীন পণ্ডিতেরা এরূপ সাবধানতা সহকারে এই দুই শাস্ত্র পৃথক্ ভাবে লিখিয়াছেন যে, জ্যামি-

তিতে কখনই পাটীক ভাষা ব্যবহার করেন নাই। আধুনিক পণ্ডিতেরা এই দুই শাস্ত্র মিশ্রিত করাতে জ্যামিতি জটিল হইয়া উঠিয়াছে ও ইহার অকৃত্রিম সৌন্দর্য্য বিনষ্ট হইয়া গিয়াছে।" সুবিখ্যাত অধ্যাপক ডি মর্গান সাহেব বলেন যে, "যে সকল বিদ্যার্থীর অন্তঃকরণে বৈজিক চিহ্ন প্রভৃতির বিশেষ বিশেষ ভাব সংশ্লিষ্ট হইয়া আছে, অর্থাৎ যাঁহারা বীজগণিতে ঐ সকল চিহ্নের ব্যবহার করিয়া তাহাদের তাৎপর্য্য গ্রহণ করিয়াছেন, সেই সব সাঙ্কেতিক চিহ্ন জ্যামিতিতে প্রয়োগ করিলে কখনই তাঁহাদিগের মনে জ্যামিতির প্রকৃত ভাব উদিত হয় না। জ্যামিতিক উপপত্তি ও পাটীক প্রক্রিয়া সকল নিজ নিজ কার্য্যের উপযোগী; শিক্ষার আরম্ভ কালে এই দুইটী মিশ্রিত করিলে, এই দুই শাস্ত্রেরই সম্যক জ্ঞান লাভ হওয়া সুকঠিন হইয়া উঠে।"

এই সকল মত সত্ত্বেও স্বীকার করিতে হইবে যে, সনাতন পণ্ডিতেরা জ্যামিতিতে বৈজিক প্রণালী অবলম্বন করিয়া যে সকল ফল লাভ করিয়াছেন, পূর্ব্বতন পণ্ডিতদিগের রীত্যনুসারে বিশুদ্ধ জ্যামিতিক উপপত্তি অবলম্বন করিলে সেই সকল ফল প্রাপ্ত হওয়া সুকঠিন হইত। কিন্তু প্রথমাবধি জ্যামিতিতে বৈজিক চিহ্ন ও সঙ্কেতাদি ব্যবহার করিলে, যে সকল ভ্রম সাবধানে অতিক্রম করিতে হয়, কোমলমতি বিদ্যার্থিগণকে সেই সকল ভ্রমেই পতিত হইতে হইবে, তাহার আর অণুমাত্র সন্দেহ নাই।

য়, এই সকল কারণেই অধ্যাপনা কালে সাঙ্কেতিক

উপপত্তি বিশিষ্ট জ্যামিতির কোন পুস্তক কিম্বা পরীক্ষা কালে ইউক্লিডের প্রতিজ্ঞাগুলির সাঙ্কেতিক প্রমাণ, কেম্ব্রিজ বিশ্ব বিদ্যালয়ে পরিগৃহীত হয় না।

এই গ্রন্থে ইউক্লিডের মূল প্রতিজ্ঞা গুলিতে বৈজিক চিহ্ন ও সঙ্কেত প্রভৃতির ব্যবহার একবারে পরিত্যাগ করা গিয়াছে; কিন্তু ব্যাখ্যা ও অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞা লিখিবার সময়, স্থল বিশেষে, বৈজিক চিহ্নাদি ব্যবহৃত হইয়াছে। কেম্ব্রিজ বিশ্ববিদ্যালয়ের অন্তর্গত কিস্ কালেজের পূর্ব্বতন সদস্য এম্, এ উপাধিধারী উড্রো সাহেব মহোদয়ের পরামর্শানুসারে দ্বিতীয় ও পঞ্চম অধ্যায়ের মূল প্রতিজ্ঞাগুলির বৈজিক উপপত্তিও লিখিত হইয়াছে।

বাঙ্গালাতে এক পরিমাণের ভিন্ন ভিন্ন প্রকার বৃহৎ ও ক্ষুদ্র অক্ষর না থাকাতে, গণিত শাস্ত্রের গ্রন্থাদি সুচারু রূপে মুদ্রিত হইতে পারে না; বিশেষত জ্যামিতির কোন পুস্তক মুদ্রিত করা অধিকতর কঠিন হইয়া উঠে। চিত্র বুঝাইবার জন্য যে সকল অক্ষর ব্যবহৃত হয়, সেই গুলি একত্র থাকিলে শব্দ বলিয়া ভ্রম জন্মিতে পারে; আবার স্থান বিশেষে কোন অক্ষরের শেষে বিভক্তি যোগ করিলে, সেই বিভক্তি সূচক অক্ষর, বিভক্তি বলিয়া বোধ না হইয়া স্বতন্ত্র অক্ষর বলিয়া বোধ হইতে পারে। ইউক্লিড প্রণীত জ্যামিতির প্রথম অনুবাদক রেবরেণ্ড কৃষ্ণ মোহন বন্দ্যোপাধ্যায় লিখিয়াছেন যে, বঙ্গভাষায় "বিশেষ্য পদের সম্বন্ধ কারকের বিভক্তি 'র' অক্ষর পদের সহিত যুক্ত হইয়া যায়, যথা—রেখা শব্দ সম্বন্ধ কারকে

(রেখার) এইরূপ হয় * * * সম্বন্ধ বোধক 'র' অক্ষর প্রাতিপদিকের সহিত যুক্ত হইলে, ইহা প্রাতিপদিকের একটী অক্ষর বলিয়া বিদ্যার্থিগণের ভ্রম হইবার সম্ভাবনা; যথা—'কখর'কে কখএর সম্বন্ধ স্বরূপ জ্ঞান না করিয়া তাহারা প্রাতিপদিকের তিনটী অক্ষর বলিয়া বোধ করিতে পারে।"

ইউক্লিডের জ্যামিতির এই সংস্করণ পাঠ করিবার সময় পাছে ঐরূপ ভ্রম হয়, এই আশঙ্কায়, স্পষ্টরূপে রেখা, কোণ, ক্ষেত্র প্রভৃতির বোধ হইবার জন্য অপেক্ষাকৃত বৃহৎ অক্ষর ব্যবহৃত হইয়াছে এবং অক্ষর গুলিতে যে যে বিভক্তি সংযুক্ত হইয়াছে, তাহা ক্ষুদ্রাক্ষরে মুদ্রিত হইয়াছে; যথা কখএর বা ঘঙর ইত্যাদি।

এই পুস্তকে প্রতিজ্ঞা গুলি লিখিবার আর একটী প্রকৃষ্ট পদ্ধতি অবলম্বন করা গিয়াছে;—প্রত্যেক প্রতিজ্ঞার উপপত্তি এরূপে মুদ্রিত হইয়াছে যে, তদ্দ্বারা উপপত্তির পৃথক পৃথক অংশ বিদ্যার্থীদিগের অনায়াসে প্রতীয়মান হইবে। অধ্যাপক ডি মরগান সাহেব সর্ব্ব প্রথমে জ্যামিতি লিখিবার এইটী উৎকৃষ্ট পদ্ধতি বলিয়া ব্যক্ত করেন; পরে পট, টডহন্টর প্রভৃতি পণ্ডিতগণ এই পদ্ধতি অবলম্বন করিয়া তাঁহাদের প্রণীত জ্যামিতি মুদ্রিত করিয়াছেন।

প্রত্যেক অধ্যায়ের শেষে প্রতিজ্ঞা গুলির ব্যাখ্যা ও অনুশীলনার্থ বহু সংখ্যক প্রতিজ্ঞা সন্নিবেশিত হইয়াছে। আবার প্রত্যেক মূল প্রতিজ্ঞার পরে অনুশীলনের নিমিত্ত অন্তত একটী করিয়া প্রতিজ্ঞা লিখিত হইয়াছে। এই অনু-

শীলনার্থ প্রতিজ্ঞা, মূল প্রতিজ্ঞা দ্বারা সাধ্য অথবা তাহার ন্যায় উপপাদ্যও না হয়, তদর্থ বোধক হইবে। পরীক্ষার কোন প্রশ্ন ও উপপ্রশ্নের পরস্পর যেরূপ সম্বন্ধ থাকে, প্রতিজ্ঞা ও তাহার অব্যবহিত পরবর্ত্তী অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞারও সেইরূপ সম্বন্ধ জ্ঞান করিতে হইবে।

এই গ্রন্থখানি লিখিবার সময় হুগলি নর্ম্মাল বিদ্যালয়ের সংস্কৃত ও বাঙ্গালা ভাষার অধ্যাপক শ্রীযুক্ত কালীপ্রসন্ন বিদ্যারত্ন যথেষ্ট সাহায্য প্রদান করিয়া গ্রন্থকারের আন্তরিক কৃতজ্ঞতা ভাজন হইয়াছেন; এ নিমিত্ত বিদ্যারত্ন মহাশয়ের নাম এই গ্রন্থে চির সংযোজিত থাকে, ইহা গ্রন্থ প্রণেতার একান্ত বাসনা।

পরিশেষে বক্তব্য এই যে, কোন শিক্ষক বা বিদ্যার্থী এই পুস্তকের ভ্রম সংশোধন বা সৌষ্ঠবের নিমিত্ত যাহা কিছু বলিবেন, তাহা আদর পূর্ব্বক গৃহীত হইবে।

শ্রীব্রহ্মমোহন মল্লিক।

হুগলি নর্ম্মাল বিদ্যালয়,

চৈত্র, ১২[illegible]।

উপক্রমণিকা।

জ্যামিতি শাস্ত্রে ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ, বৃত্ত প্রভৃতি ক্ষেত্র সকলের বিশেষ বিশেষ ধর্ম্ম এবং ঐ সকল ক্ষেত্রের পরিমাণ বিষয়ে পরস্পর সম্বন্ধ নির্ণীত হইয়াছে। ইউক্লিড. স্বপ্রণীত জ্যামিতি শাস্ত্রকে ক্ষেত্র ও বিষয় ভেদে ভিন্ন ভিন্ন অধ্যায়ে বিভক্ত করিয়াছেন। প্রত্যেক অধ্যায়ে কতক গুলি করিয়া প্রতিজ্ঞা সন্নিবেশিত আছে। "সাধ্য নির্দ্দেশঃ প্রতিজ্ঞা।" গৌতম সূত্র; অর্থাৎ সাধনীয় বস্তুর নির্দ্দেশের নাম প্রতিজ্ঞা, অথবা প্রমাণ সাপেক্ষ কোন প্রস্তাবিত বিষয়ের নাম প্রতিজ্ঞা। জ্যামিতির প্রতিজ্ঞা গুলি দুই প্রকার;—সম্পাদ্য ও উপপাদ্য। যে প্রতিজ্ঞাতে কোন ক্রিয়া সম্পন্ন করিতে, অর্থাৎ জ্যামিতিক কোন রেখা টানিতে বা ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হয়, তাহাকে সম্পাদ্য বলে, আর যাহাতে কোন বিষয়ের সিদ্ধতা দর্শাইতে, অর্থাৎ জ্যামিতিক কোন ক্ষেত্রের কোন বিশেষ ধর্ম্ম প্রমাণ করিতে হয়, তাহাকে উপপাদ্য বলে।

ইউক্লিডের প্রায় সকল প্রতিজ্ঞাই চারি প্রধান অংশে বিভক্ত; যথা—(১) সাধারণ সূত্র (২) বিবরণ সূত্র (৩) অঙ্কন ও (৪) প্রমাণ বা উপপত্তি। কেহ কেহ এতদ্ব্যতীত অবধারণ ও উপসংহার এই দুইটী অংশও নির্দ্দেশ করেন।

"সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ দ্বয় পরস্পর সমান ইত্যাদি," এইটী প্রথম অধ্যায়ের পঞ্চম প্রতিজ্ঞার সাধারণ সূত্র। সাধারণ সূত্রের ব্যাখ্যা স্বরূপ কখগ একটী ত্রিভুজ লইয়া সূত্রটী পুনরায় লিখিত হইয়াছে; এজন্য ইহাকে বিবরণ সূত্র বলে। অনন্তর প্রতিজ্ঞার প্রমাণের জন্য সরল রেখা প্রভৃতি অঙ্কিত করিতে হইয়াছে; এই ক্রিয়ার নাম অঙ্কন। পরে প্রতিজ্ঞা সিদ্ধ করিবার জন্য যে বাদবিচার লিখিত হইয়াছে, তাহার নাম প্রমাণ বা উপপত্তি। প্রমাণের নিমিত্ত ক্ষেত্র অঙ্কিত হইলে তৎসম্বন্ধে সাধ্য বস্তুর যে উল্লেখ, তাহার নাম অবধারণ।

পঞ্চম প্রতিজ্ঞায় উল্লিখিত হইয়াছে যে, "কখগ কোণ কগখ কোণের সমান," ইত্যাদি; এই অংশের নাম অবধারণ আর প্রত্যেক প্রতিজ্ঞার শেষে সাধারণ সূত্রের পুনরুল্লেখের নাম উপসংহার। ইউক্লিডের প্রতিজ্ঞা গুলি পাঠ করিলে সহজেই বোধ হইবে যে, অবধারণ, বিবরণ সূত্রের এক অঙ্গ মাত্র; আর উপসংহার, সাধারণ সূত্রের পুনরুল্লেখ মাত্র, এজন্য ইহার স্বতন্ত্র উল্লেখের আবশ্যকতা নাই।

কোন কোন প্রতিজ্ঞার উপপত্তির জন্য অঙ্কন আবশ্যক হয় না; আবার কোন কোন স্থলে অঙ্কন ও প্রমাণ একত্রও লিখিত হইয়াছে। প্রত্যেক প্রতিজ্ঞার সাধারণ সূত্রের দুই অংশ থাকে; যথা—সম্পাদ্য গুলির নির্দ্দিষ্ট ও করণীয় অংশ এবং উপপাদ্য গুলির কল্পিত ও সাধ্য অংশ। প্রমাণ করিবার জন্য যথাক্রমে সন্নিবেশিত সমস্ত র্ক পংক্তির নাম উপপত্তি। উপপত্তি অন্বয় ও ব্যতিরেক মুখে, এই দুই প্রকারে সম্পন্ন হইয়া থাকে। অনুগুণ হেতু দ্বারা সাধ্য সাধনের নাম অন্বয়ী প্রমাণ এবং বিপরীত হেতু দ্বারা সাধনের নাম ব্যতিরেকী প্রমাণ, অর্থাৎ আনুপূর্ব্বিক বিচারদ্বারা সাক্ষাৎ সম্বন্ধে কল্পনা হইতে সাধ্য নিষ্পন্ন করার নাম অন্বয়ী এবং সাধ্য বস্তু ভিন্নরূপ হইলে অসঙ্গত হইয়া উঠে ইহা প্রদর্শন পূর্ব্বক প্রতিজ্ঞা উপপন্ন করার নাম ব্যতিরেকী প্রমাণ।

কোন সিদ্ধ বিষয় অবলম্বন করিয়া বিচার দ্বারা অন্য কোন বিষয় সিদ্ধ করার নাম প্রমাণ। ইউক্লিড জ্যামিতিতে যে সকল প্রতিজ্ঞার যাথার্থ্য সিদ্ধ করিয়াছেন বা গ্রন্থের প্রারম্ভে যে সকল বিষয়ের সত্যতা সহজ জ্ঞানগম্য বলিয়া স্বীকার করিয়াছেন এবং কল্পিত অংশ বা অঙ্কন হইতে যাহা সত্য বলিয়া বোধ হয়, সেই গুলির সাহায্যে নূতন প্রতিজ্ঞা সকল প্রমাণ করা হইয়াছে।

উপপত্তির যে যে অংশ, যে সকল সংজ্ঞা, স্বতঃসিদ্ধ কিম্বা প্রতিজ্ঞার সাহায্যে সিদ্ধ হইয়াছে, বিদ্যার্থীদিগের শিক্ষা সৌকর্য্যার্থ সেই সকল সংজ্ঞা প্রভৃতির সংখ্যা সেই

সেই অংশে লিখিত হইল ;—যথা, সং ১৫ ; স্বতঃ ২ ইত্যাদি ; ইহাদের দ্বারা পঞ্চদশ সংজ্ঞা, দ্বিতীয় স্বতঃ সিদ্ধ ইত্যাদির প্রয়োগ বুঝিতে হইবে ; (১ম, ৫) এইরূপ লিখিত থাকিলে, প্রথম অধ্যায়ের পঞ্চম প্রতিজ্ঞার সাহায্যে সিদ্ধ, ইহাই বুঝিতে হইবে। পূরণ বাচক সংখ্যা দ্বারা অধ্যায় ও অপর সংখ্যা দ্বারা প্রতিজ্ঞা সূচিত হইয়াছে। কোন কোন স্থানে অঙ্কন ও কল্পনা এই শব্দ গুলির পরিবর্ত্তে সংক্ষেপে অং ও কং এবং "সমান্তরিক" বা "সমান্তর রৈখিক ক্ষেত্র," ইহার পরিবর্ত্তে "সমান্তর ক্ষেত্র" লিখিত হইয়াছে। "কখ সংযুক্ত কর," এরূপ বাক্য দ্বারা বুঝিতে হইবে যে, সরল রেখা দ্বারা ক ও খ বিন্দু দ্বয় সংযুক্ত কর। "কখকে গ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর," ইহা দ্বারা বুঝিতে হইবে যে, কখ সরল রেখাকে গ বিন্দু পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর।

ইউক্লিডের জ্যামিতি।

১ম অধ্যায়।

সংজ্ঞা।

১। যাহার অংশ নাই অথবা পরিমাণ নাই, তাহার নাম বিন্দু। (১ম অধ্যায়ের পরিশিষ্ট দেখ।)

২। বিস্তার বিহীন দৈর্ঘ্যের নাম রেখা।* (পরিশিষ্ট দেখ।)

৩। রেখার দুই প্রান্ত দুইটী বিন্দু।

৪। যে রেখা প্রান্ত বিন্দু দ্বয়ের মধ্যে ঋজুভাবে অবস্থিত, তাহার নাম সরল বা ঋজু রেখা। (পরিশিষ্ট দেখ।)

৫। যাহার কেবল দৈর্ঘ্য ও বিস্তার আছে, তাহার নাম তল বা পৃষ্ঠ।

৬। তলের প্রান্ত বা সীমা গুলি এক একটী রেখা।

৭। যে তলে কোন দুইটী বিন্দু কল্পনা করিলে তাহাদের যোজক সরল রেখা সর্ব্বাংশে ঐ তলের সহিত মিলিত হয়, তাহার নাম সমতল বা সমপৃষ্ঠ।

---

* যঃ পদার্থঃ দীর্ঘঃ বিস্তাররহিতঃ বিভাগার্হঃ স রেখাশব্দবাচ্যঃ। জগন্নাথকৃতং রেখাগণিতং।

৮। কোন সমতলস্থ বিভিন্ন মুখীন দুই রেখা সংলগ্ন হইলে তাহাদের পরস্পরের অবনতিকে সামতলিক কোণ বলে।

৯। বিভিন্ন মুখীন দুই সরল রেখা সংলগ্ন হইলে তাহাদের পরস্পরের অবনতিকে সামতলিক সরল রৈখিক কোণ বলে।

টীকা। কতকগুলি কোণ যদি এক (খ) বিন্দুতে অবস্থিত হয়, তবে তাহাদের মধ্যে কোন একটী কোণ ভিন্ন ভিন্ন তিন অক্ষর দ্বারা ব্যক্ত হইয়া থাকে। এই অক্ষর গুলির মধ্যে যেটী কোণের শৃঙ্গে, অর্থাৎ যেখানে কোণাশ্রিত রেখা দ্বয় সংলগ্ন হইয়াছে, সেই খানে থাকে, সেইটী অন্য দুইএর মধ্যে লিখিত হয়, ও এই দুই অক্ষরের একটী এক রেখার ও অপরটী অন্য রেখার যে কোন স্থানে অবস্থিত হয়; যথা, কখ ও গখএর অন্তর্গত কোণকে কখগ অথবা গখক কোণ বলা যায়; কখ ও ঘখএর অন্তর্গত কোণকে কখঘ বা ঘখক কোণ এবং ঘখ ও গখএর অন্তর্গত কোণকে ঘখগ বা গখঘ কোণ বলা যায়; কিন্তু এক বিন্দুতে কেবল একটী কোণ থাকিলে সেই বিন্দুস্থিত অক্ষর দ্বারা উহা ব্যক্ত হইতে পারে; যথা, ঙ কোণ।

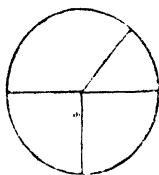
১০। এক সরল রেখা আর একটী সরল রেখার উপর দণ্ডায়মান হইলে, যদি সন্নিহিত কোণ দ্বয় পরস্পর সমান হয়, তবে তাহাদের প্রত্যেক কোণকে সম কোণ বলে; আর দণ্ডায়মান রেখাকে লম্ব বলে।

১১। সম কোণ অপেক্ষা বৃহৎ কোণকে স্থূল কোণ বলে।

১২। সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্র কোণকে সূক্ষ্ম কোণ বলে।

১৩। কোন ক্ষেত্রের প্রান্তকে সীমা বলে।

১৪। এক বা ততোধিক সীমা দ্বারা পরিবদ্ধ স্থানের নাম ক্ষেত্র।

১৫। যদি কোন সামতলিক ক্ষেত্র এক রেখা দ্বারা এরূপে সীমাবদ্ধ হয় যে, তাহার অভ্যান্তরীণ কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে প্রান্ত পর্য্যন্ত যত গুলি সরল রেখা টান যায়, তাহারা পরস্পর সমান হয়, তবে ঐ ক্ষেত্রকে বৃত্ত বলে। বৃত্তের সীমাসূচক রেখার নাম পরিধি।

১৬। ঐ অভ্যান্তরীণ নির্দ্দিষ্ট বিন্দুর নাম কেন্দ্র।

১৭। যে সরল রেখা কেন্দ্র ভেদ করিয়া দুই দিকে পরিধি পর্য্যন্ত বিস্তৃত হয়, তাহাকে ব্যাস বলে।

১৮। একটী ব্যাসের ও তদ্দ্বারা ছেদিত পরিধি খণ্ডের অন্তর্গত ক্ষেত্রের নাম অর্দ্ধ বৃত্ত।

১৯। একটী সরল রেখার ও তদ্দ্বারা ছেদিত পরিধি খণ্ডের অন্তর্গত ক্ষেত্রের নাম বৃত্তখণ্ড।

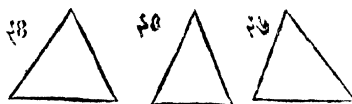
২০। কতক গুলি সরল রেখা দ্বারা পরিবদ্ধ স্থানের নাম সরল রৈখিক ক্ষেত্র।

২১। তিন সরল রেখা দ্বারা পরিবদ্ধ ক্ষেত্রের নাম ত্রিভুজ, ত্র্যস্র বা ত্রিকোণ।

২২। চারি সরল রেখা দ্বারা পরিবদ্ধ ক্ষেত্রের নাম চতুর্ভুজ, চতুরস্র বা চতুষ্কোণ।

২৩। চারি অপেক্ষা অধিক রেখা দ্বারা পরিবদ্ধ ক্ষেত্রের নাম বহুভুজ।

ত্রিভুজ ক্ষেত্র গুলির মধ্যে,

২৪। যাহার তিনটী বাহু পরস্পর সমান, তাহাকে সমবাহু ত্রিভুজ বলে।

২৫। যাহার কেবল দুইটী বাহু পরস্পর সমান, তাহাকে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ বলে।

২৬। যাহার তিনটী বাহু পরস্পর সমান নয়, তাহাকে বিষম বাহু ত্রিভুজ বলে।

২৭। যাহার একটী সম কোণ থাকে, তাহাকে সম কোণী ত্রিভুজ বলে।

২৮। যাহার একটী স্থূল কোণ থাকে, তাহাকে স্থূল কোণী ত্রিভুজ বলে।

স্বীকৃত বিষয়।

স্বীকার করিতে হইবে যে,

১। কোন বিন্দু হইতে অন্য এক বিন্দু পর্য্যন্ত সরল রেখা টানা যায়।

২। সীমা বিশিষ্ট কোন সরল রেখাকে ঋজুভাবে যত দূর ইচ্ছা বৃদ্ধি করা যায়।

৩। কোন কেন্দ্র হইতে যথেচ্ছ দূর পর্য্যন্ত এক বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়।

স্বতঃ সিদ্ধ।

১। যে সকল বস্তু প্রত্যেকে কোন এক বস্তুর সমান, তাহারা পরস্পর সমান।

২। সমান সমান রাশিতে সমান সমান রাশি যোগ করিলে, সমষ্টি গুলি পরস্পর সমান হইবে।

৩। সমান সমান রাশি হইতে সমান সমান রাশি বিয়োগ করিলে, অবশিষ্ট গুলি পরস্পর সমান হইবে।

৪। অসমান রাশি সকলে সমান সমান রাশি যোগ করিলে, সমষ্টি গুলি অসমান হইবে।

৫। অসমান রাশি সকল হইতে সমান সমান রাশি বিয়োগ করিলে, অবশিষ্ট গুলি অসমান হইবে।

৬। যে সকল বস্তু প্রত্যেকে কোন এক বস্তুর দ্বিগুণ, তাহারা পরস্পর সমান।

৭। যে সকল বস্তু প্রত্যেকে কোন এক বস্তুর অর্দ্ধ, তাহারা পরস্পর সমান।

৮। যে যে রাশি পরস্পর মিলিয়া যায়, অর্থাৎ যাহারা ঠিক একই স্থান আবরণ করে, তাহারা পরস্পর সমান।

৯। একটী সম্পূর্ণ রাশি তাহার কোন অংশ অপেক্ষা বৃহত্তর।

১০। দুই সরল রেখা কোন স্থান পরিবদ্ধ করিতে পারে না।

১১। সকল সম কোণ পরস্পর সমান।

১২। কোন দুই সরল রেখার সহিত অন্য এক সরল রেখার সম্পাত হইলে, তাহার এক দিকের দুই অন্তরস্থ কোণ যদি একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্র হয় তবে যে দিকের দুইটী কোণ সমষ্টি, দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্র, সেই দিকে এই দুই রেখাকে উত্তরোত্তর বৃদ্ধি করিলে অবশেষে তাহারা সংলগ্ন হইবে।*

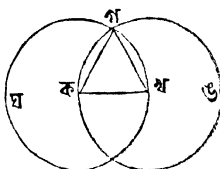
* এই স্বতঃসিদ্ধটী ইউক্লিডের মূল গ্রন্থানুসারে লিখিত হইল অন্যান্য বাঙ্গালা জ্যামিতিতে ইহার পরিবর্ত্তে, প্লেফেয়ারের লিখিত আর একটী স্বতঃসিদ্ধ সন্নিবেশিত হইয়াছে। (পরিশিষ্ট দেখ।)

১ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দ্দিষ্ট সীমাবিশিষ্ট সরল রেখার উপর এক সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখ যেন নির্দ্দিষ্ট সীমাবিশিষ্ট সরল রেখা; কখএর উপর এক সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

ক কেন্দ্র হইতে কখএর খ প্রান্ত দিয়া খগঘ বৃত্ত অঙ্কিত কর। [স্বীঃ ৩।

খ কেন্দ্র হইতে খকএর ক প্রান্ত দিয়া কগঙ বৃত্ত অঙ্কিত কর। [স্বীঃ ৩।

এই দুই বৃত্তের পরস্পর সম্পাতে উৎপন্ন গ বিন্দু হইতে ক ও খ পর্য্যন্ত গক ও গখ সরল রেখা টান; [স্বীঃ ১।

কখগ সম্পাদ্য সমবাহু ত্রিভুজ।

ক বিন্দু খগঘ বৃত্তের কেন্দ্র হওয়াতে,

কগ রেখা কখএর সমান; [সং ১৫।

এবং খ বিন্দু কগঙ বৃত্তের কেন্দ্র বলিয়া,

খগ রেখা খকএর সমান; [সং ১৫।

আর গক রেখা যে কখএর সমান, তাহা সপ্রমাণ হইয়াছে;

অতএব গক ও গখ এই দুইএর প্রত্যেকেই কখএর সমান।

আবার যে সকল বস্তু প্রত্যেকে কোন এক বস্তুর সমান, তাহারা পরস্পর সমান; [স্বতঃ ১।

এই হেতু গক রেখা গখএর সমান;

সুতরাং গক, কখ ও খগ এই তিন রেখা পরস্পর সমান।
অতএব কখগ ত্রিভুজ সমবাহু, [সং ২৪।
এবং ইহা নির্দ্দিষ্ট কখ রেখার উপর অঙ্কিত হইল।
এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞা—১। প্রত্যেক বাহু ভূমির দ্বিগুণ হয়, এমন এক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, কোন নির্দ্দিষ্ট সীমাবিশিষ্ট সরল রেখার উপর অঙ্কিত করিতে হইবে।

২ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার সমান এক সরল রেখা টানিতে হইবে।

ক যেন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু এবং খগ নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা; ক বিন্দু হইতে খগ সরল রেখার সমান এক সরল রেখা টানিতে হইবে।

ক বিন্দু হইতে খ পর্য্যন্ত এক সরল রেখা টান; [স্বীঃ ১।
এবং এই সরল রেখার উপর ঘকখ সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর; [১ম, ১।
ঘক ও ঘখ সরল রেখা দ্বয়কে ঙ ও চ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর। [স্বীঃ ২।
খ কেন্দ্র হইতে খগ রেখার প্রান্ত দিয়া গচজ বৃত্ত অঙ্কিত কর; [স্বীঃ ৩।

এই বৃত্ত যেন ঘচকে ছ বিন্দুতে ছেদ করিল।
ঘ কেন্দ্র হইতে ঘছ রেখার প্রান্ত দিয়া ছঠট বৃত্ত অঙ্কিত কর; [স্বীঃ ৩।
ছঠট বৃত্ত ঘঙকে যেন ঠ বিন্দুতে ছেদ করিল।
কঠ সরল খগএর সমান হইবে।

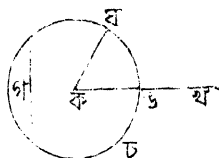
খ বিন্দু গছজ বৃত্তের কেন্দ্র হওয়াতে,
খগ রেখা খছএর সমান; [সং ১৫।
এবং ঘ বিন্দু ছঠট বৃত্তের কেন্দ্র হওয়াতে,
ঘঠ রেখা ঘছ রেখার সমান; [সং ১৫।
আর ইহাদের দুই অংশ ঘক ও ঘখ পরস্পর সমান হওয়াতে, [সং ২৪।
একের অবশিষ্ট কঠ, অন্যের অবশিষ্ট খছএর সমান। [স্বতঃ ৩।
আবার প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, খগ রেখা খছএর সমান;
এই হেতু কঠ ও খগ উভয়েই খছএর সমান;
আর যে যে বস্তু কোন এক বস্তুর সমান, তাহারা পরস্পর সমান। [স্বতঃ ১।
সুতরাং কঠ রেখা খগএর সমান।
অতএব নির্দ্দিষ্ট ক বিন্দু হইতে নির্দ্দিষ্ট খগ রেখার সমান, কঠ রেখা টানা হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—২। দুই নির্দ্দিষ্ট অসমান সরল রেখার মধ্যে ক্ষুদ্রতরের উপর এমন এক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার সমান দুই বাহুর প্রত্যেকেই যেন নির্দ্দিষ্ট বৃহত্তর রেখার সমান হয়।

৩ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

দুই নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার মধ্যে বৃহত্তর হইতে ক্ষুদ্রতরের সমান এক অংশ ছেদ করিতে হইবে।

কখ ও গ যেন দুই নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা; তন্মধ্যে কখ বৃহত্তর; কখ হইতে ক্ষুদ্রতর গএর সমান এক অংশ ছেদ করিতে হইবে।

ক বিন্দু হইতে গএর সমান কঘ সরল রেখা টান; [১ম, ২।
এবং ক কেন্দ্র হইতে কঘএর প্রান্ত দিয়া ঘঙচ বৃত্ত অঙ্কিত কর। [স্বীঃ ৩।

কখ রেখার কঙ অংশ গএর সমান হইবে।

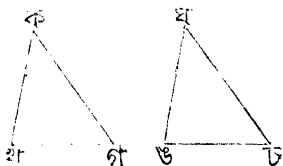
ক বিন্দু ঘঙচ বৃত্তের কেন্দ্র হওয়াতে,
কঙ রেখা কঘএর সমান; [সং ১৫।
আর গ রেখা কঘএর সমান। [অঙ্কন।
এই হেতু কঙ ও গ উভয়েই কঘএর সমান।
সুতরাং কঙ, গএর সমান। [স্বতঃ ১।
অতএব দুই নির্দ্দিষ্টি রেখার মধ্যে বৃহত্তর কখ হইতে ক্ষুদ্রতর গএর সমান, কঙ অংশ ছেদিত হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—৩। দুই নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার মধ্যে ক্ষুদ্রতরকে বৃহত্তরের সমান করিয়া বর্দ্ধিত করিতে হইবে।

৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই ত্রিভুজের মধ্যে যদি একের দুই বাহু যথাক্রমে অন্যের দুই বাহুর সমান হয় এবং এই দুই দুই বাহুর অন্তর্গত কোণ দ্বয়ও যদি পরস্পর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দ্বয়ের ভূমি অর্থাৎ অবশিষ্ট এক একটী বাহু পরস্পর সমান হইবে এবং ত্রিভুজ দুইটী পরস্পর সমান হইবে ও তাহাদের অবশিষ্ট কোণ গুলি, অর্থাৎ যে যে কোণ সমান সমান বাহুর সম্মুখীন, তাহারা যথাক্রমে পরস্পর সমান হইবে।

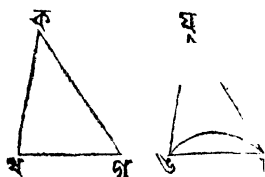
কখগ ও ঘঙচ এই দুই ত্রিভুজের কখ ও কগ বাহু যথাক্রমে যেন ঘঙ ও ঘচ বাহুর সমান, অর্থাৎ কখ বাহু ঘঙর ও কগ বাহু ঘচএর সমান এবং খকগ কোণ ঙঘচ কোণের সমান; তাহা হইলে খগ ভূমি

ঙচ ভূমির এবং কখগ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান হইবে, আর অবশিষ্ট কোণ গুলি, অর্থাৎ সমান সমান বাহুর সম্মুখীন কখগ কোণ ঘঙচ কোণের এবং কগখ কোণ ঘচঙ কোণের সমান হইবে।

যদি কখগ ত্রিভুজকে ঘঙচ ত্রিভুজের উপর এরূপে স্থাপন করা যায় যে, ক বিন্দু ঘ বিন্দুর উপর ও কখ রেখা ঘঙ রেখার উপর পড়ে, তাহা হইলে, খ বিন্দু ঙ বিন্দুর

উপর অবশ্যই পড়িবে; কেননা, কখ রেখা ঘঙর সমান কল্পিত হইয়াছে;

আর কখ, ঘঙর সহিত সর্ব্বতোভাবে মিলিত হইলে কগ রেখাও ঘচএর সহিত মিলিয়া যাইবে;

কেননা, খকগ কোণ ঙঘচএর সমান; [কল্পনা

আর কগ রেখা ঘচএর সমান কল্পিত হওয়াতে, গ বিন্দু চ বিন্দুর উপর পড়িবে;

এবং খ বিন্দু যে ঙ বিন্দুর সহিত মিলিত হইয়াছে, তাহা প্রমাণ করা গিয়াছে;

অতএব খগ ভূমি ঙচ ভূমির সহিত সর্ব্বতোভাবে মিলিত হইবে;

কেননা, খ বিন্দু ঙর সহিত ও গ বিন্দু চএর সহিত মিলিত হওয়াতে, যদি খগ রেখা ঙচএর সহিত সর্ব্বতোভাবে মিলিয়া না যায়, তাহা হইলে দুই সরল রেখা স্থান পরিবদ্ধ করিবে;

কিন্তু এরূপ পরিবদ্ধ করা অসম্ভব। [স্বতঃ ১০

সুতরাং খগ রেখা ঙচএর সহিত মিলিয়া যাইবে ও তাহার সমান হইবে; [স্বতঃ ৮।

এবং এক ত্রিভুজের অবশিষ্ট কোণ গুলি যথাক্রমে অন্য ত্রিভুজের অবশিষ্ট কোণ গুলির সহিত মিলিয়া যাইবে ও তাহাদের সমান হইবে, অর্থাৎ, কখগ কোণ ঘঙচ কোণের এবং কগখ কোণ ঘচঙ কোণের সমান হইবে।

অতএব দুই ত্রিভুজের মধ্যে ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৪। দুই সমচতুর্ভুজের মধ্যে যদি একটীর এক বাহু অন্যের এক বাহুর সমান হয়, তবে সমচতুর্ভুজ দুইটী সর্ব্বতোভাবে সমান হইবে।

৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।—

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ দ্বয় পরস্পর সমান হইবে; এবং যদি সমান দুইটী বাহু বৃদ্ধি করা যায়, তবে ভূমির অপর পার্শ্বস্থ কোণ দ্বয়ও পরস্পর সমান হইবে।

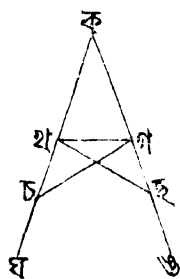
কখগ যেন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ; ইহার কখ বাহু কগ বাহুর সমান; কখ ও কগকে ঘ ও ঙ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর; তাহা হইলে কখগ কোণ কগখ কোণের এবং গখঘ কোণ খগঙ কোণের সমান হইবে।

খঘ সরল রেখাতে চ বিন্দু কল্পনা কর, এবং বৃহত্তর কঙ রেখা হইতে ক্ষুদ্রতর কচএর সমান কছ অংশ ছেদ কর, [১ম, ৩।

এবং চগ, ছখ সংযুক্ত কর।

কচ রেখা কছএর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন।

এবং কখ, কগএর সমান বলিয়া, [কল্পনা।

চক ও কগ এই দুই বাহু যথাক্রমে ছক ও কখ দুই বাহুর

সমান; এবং তাহাদের অন্তর্গত চকচ্‌ কোণ, কখচ্‌ ও কগচ এই দুই ত্রিভুজের মধ্যে সামান্য ভাবে থাকাতে, চগ ভূমি চ্‌খ ভূমির সমান এবং কচগ ত্রিভুজ কচ্‌খ ত্রিভুজের সমান এবং একের অবশিষ্ট কোণ গুলি অন্যের অবশিষ্ট কোণ গুলির সমান; অর্থাৎ, সমান সমান বাহুর সম্মুখীন কচগ কোণ কচ্‌খ কোণের এবং কখচ্‌ কোণ কগচ কোণের সমান। [১ম, ৪।

পরে সমস্ত কচ সমস্ত কচ্‌এর সমান বলিয়া, এবং তাহাদের কখ ও কগ অংশ দ্বয় পরস্পর সমান হওয়াতে, [কল্পনা।

অবশিষ্ট খচ অবশিষ্ট গচ্‌এর সমান; [স্বতঃ ৩।

আর চগ রেখা চ্‌খএর সমান উপপন্ন হইয়াছে;

এবং খচগ কোণ গচ্‌খ কোণের সমান সপ্রমাণ হইয়াছে;

অতএব খচগ ত্রিভুজ গচ্‌খ ত্রিভুজের সমান এবং সমান সমান বাহুর সম্মুখীন অবশিষ্ট কোণ গুলি যথাক্রমে সমান, অর্থাৎ চখগ কোণ চ্‌গখ কোণের এবং খগচ কোণ গখচ্‌ কোণের সমান।

আবার, সমস্ত কখচ্‌ কোণ সমস্ত কগচ কোণের সমান উপপন্ন হইয়াছে বলিয়া, এবং ইহাদের গখচ্‌ ও খগচ অংশ দ্বয় পরস্পর সমান হওয়াতে,

অবশিষ্ট কখগ কোণ অবশিষ্ট কগখ কোণের সমান, অর্থাৎ ভূমি সংলগ্ন কোণ দ্বয় পরস্পর সমান। [স্বতঃ ৩।

আর ভূমির অপর পার্শ্বস্থ চখগ ও চ্‌গখ কোণ দ্বয় পরস্পর সমান সপ্রমাণ হইয়াছে।

অতএব সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অনুমান। ইহা দ্বারা সহজেই বোধ হইবে যে, কোন ত্রিভুজ সমবাহু হইলে তাহা সমানকোণী হইয়া থাকে।

অঃ প্রঃ—৫। প্রথম প্রতিজ্ঞার চিত্রের কখ রেখাকে দুই দিকে ঘ ও ঙ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর এবং গঘ ও গঙ সংযুক্ত করিয়া প্রমাণ কর যে, ঘগঙ ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু।

৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যদি কোন ত্রিভুজের দুই কোণ পরস্পর সমান হয়, তবে সমান সমান কোণের সম্মুখীন বাহু গুলিও পরস্পর সমান হইবে।

কখগ ত্রিভুজের কখগ কোণ যেন কগখ কোণের সমান; তাহা হইলে কগ বাহু কখ বাহুর সমান হইবে।

যদি কগ বাহু কখ বাহুর সমান না হয়, তবে তন্মধ্যে একটী অপর অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। কখ যেন বৃহত্তর হইল; ইহা হইতে, কগএর সমান খঘ অংশ ছেদ কর; [১ম, ৩। এবং ঘগ সংযুক্ত কর।

পরে, ঘখগ ও কগখ ত্রিভুজ দ্বয়ের ঘখ বাহু কগ বাহুর সমান বলিয়া, [অঙ্কন।

এবং খগ রেখা দুই ত্রিভুজের সাধারণ বাহু হওয়াতে, ঘখ ও খগ দুই বাহু ক্রমে কগ ও গখ দুই বাহুর সমান; আর ঘখগ কোণ কগখ কোণের সমান; [কল্পনা।

এই হেতু ঘগ ভূমি কখ ভূমির সমান, এবং ঘখগ ত্রিভুজ কগখ ত্রিভুজের সমান, [১ম, ৪।

অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর বৃহত্তরের সমান ;

কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব ; [স্বতঃ ৯।

সুতরাং কখ, কগএর অসমান নহে, অর্থাৎ তাহারা পরস্পর সমান।

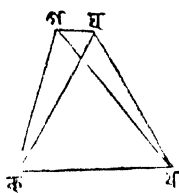
অতএব কোন ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অনুমান। ইহা দ্বারা সহজেই বোধ হইবে যে, কোন ত্রিভুজ সমান কোণী হইলে তাহা সমবাহু হইবে।

অঃ প্রঃ—৬। পঞ্চম প্রতিজ্ঞার চিত্রে যদি খচ রেখা গচ রেখাকে জ বিন্দুতে ছেদ করে ও কজ সংযুক্ত করা যায়, তবে কজ রেখা ক কোণকে দুই সমান ভাগে বিভক্ত করিবে।

৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

এক ভূমির উপর এক দিকে এমন দুই ত্রিভুজ অবস্থিত হইতে পারে না, যাহাদের ভূমির এক প্রান্তে সংলগ্ন এক এক বাহু পরস্পর সমান এবং অপর প্রান্তে সংলগ্ন এক এক বাহুও পরস্পর সমান।

যদি সম্ভব হয়, তবে কখ ভূমির উপর এক দিকে কগখ ও কঘখ দুই ত্রিভুজ এরূপে অঙ্কিত কর, যেন কখ ভূমির ক প্রান্তে সংলগ্ন গক ও ঘক বাহু দুইটী, পরস্পর সমান হয় এবং খ প্রান্তে সংলগ্ন গখ

ঘখ বাহু দ্বয়ও পরস্পর সমান হয়।

গঘ সংযুক্ত কর।

প্রথমত, প্রত্যেক ত্রিভুজের শৃঙ্গ অন্যের বহিস্থ হইলে,

কগ বাহু কঘএর সমান হওয়াতে, [কল্পনা

কগঘ কোণ কঘগ কোণের সমান; [১ম, ৫।

আর কগঘ কোণ খগঘ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর; [স্বতঃ ৯।

অতএব কঘগ কোণও খগঘ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর;

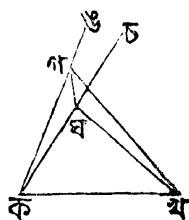
সুতরাং খঘগ কোণ, খগঘ কোণ হইতে আরও বৃহত্তর।

আবার খগ, খঘএর সমান হওয়াতে, [কল্পনা।

খঘগ কোণ, খগঘ কোণের সমান; [১ম, ৫।

কিন্তু ইহা যে বৃহত্তর, তাহা সপ্রমাণ হইয়াছে;

সুতরাং এরূপ হওয়া অসম্ভব।

অনন্তর, কঘখ ত্রিভুজের ঘ শৃঙ্গ অন্য ত্রিভুজের অর্থাৎ কগখএর অন্তর্ব্বর্ত্তী হইলে, কগ ও কঘ রেখা দ্বয়কে ঙ ও চ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর।

পরে, কগঘ ত্রিভুজের কগ বাহু কঘএর সমান বলিয়া, [কল্পনা।

ভূমির অপর দিকের ঙগঘ কোণ চঘগ কোণের সমান।

[১ম, ৫।

আর ঙগঘ কোণ খগঘ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর, [স্বতঃ ৯।

এই হেতু চঘগ কোণও খগঘ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর;

অতএব খঘগ কোণ, খগঘ কোণ হইতে আরও বৃহত্তর।

আবার খগ, খঘএর সমান হওয়াতে,
খঘগ কোণ খগঘ কোণের সমান; [১ম, ৫।
কিন্তু ইহা যে বৃহত্তর, তাহা সপ্রমাণ হইয়াছে;
সুতরাং এরূপ হওয়া অসম্ভব।

পরিশেষে, একটী ত্রিভুজের শৃঙ্গ অন্যের কোন বাহুতে অবস্থিত হইলে প্রতিজ্ঞার উপপত্তি করিবার আবশ্যক নাই।

অতএব এক ভূমির ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

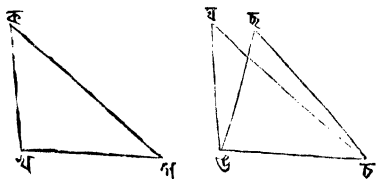
অঃ প্রঃ—৭। এক ভূমির উপর ভিন্ন ভিন্ন দিকে যদি দুই ত্রিভুজ এরূপে অবস্থিত হয় যে, ভূমির এক প্রান্তে সংলগ্ন এক এক বাহু পরস্পর সমান এবং অপর প্রান্তে সংলগ্ন এক এক বাহুও পরস্পর সমান, তাহা হইলে এক ত্রিভুজের বাহু দ্বয়ের অন্তর্গত কোণ, অন্য ত্রিভুজের বাহু দ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমান হইবে।

৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।—

দুই ত্রিভুজের মধ্যে যদি একের দুই বাহু যথাক্রমে অন্যের দুই বাহুর সমান হয় এবং তাহাদের ভূমিও পরস্পর সমান হয়, তবে এক ত্রিভুজের সমান দুই বাহুর অন্তর্গত কোণ অন্য ত্রিভুজের সমান দুই বাহুর অন্তর্গত কোণের সমান হইবে।

কখগ ও ঘঙচ ত্রিভুজের খক ও কগ বাহু দ্বয় যথাক্রমে যেন ঙঘ ও ঘচ বাহু দ্বয়ের সমান, অর্থাৎ খক বাহু ঙঘ বাহুর এবং কগ বাহু ঘচ বাহুর সমান আর খগ ভূমি

ঙচ ভূমির সমান; তাহা হইলে খকগ কোণ ঙঘচ কোণের সমান হইবে।

যদি কখগ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের উপর এরূপে স্থাপন করা যায় যে, খ

বিন্দু ঙ বিন্দুর উপর এবং খগ রেখা ঙচ রেখার উপর পড়ে, তাহা হইলে গ বিন্দু চ বিন্দুর উপর পড়িবে; কেননা, খগ রেখা ঙচএর সমান কল্পিত হইয়াছে।

আর খগ রেখা ঙচএর সহিত সর্ব্বতোভাবে মিলিয়া গেলে, খক ও কগ এই দুই রেখা ঙঘ ও ঘচ রেখার সহিত মিলিয়া যাইবে; কেননা, যদি খগ ভূমি ঙচএর সহিত মিলিত হইলেও খক, ঙঘএর সহিত এবং গক, চঘএর সহিত মিলিত না হইয়া ঙছ ও চছএর ন্যায় ভিন্ন রূপে থাকে, তবে এক ভূমির উপর এক দিকে এমন দুই ত্রিভুজ অবস্থিত হইল যাহাদের ভূমির এক প্রান্তে সংলগ্ন এক এক বাহু পরস্পর সমান এবং অপর প্রান্তে সংলগ্ন এক এক বাহুও পরস্পর সমান; কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব; [১ম, ৭।

এই হেতু খগ ভূমি ঙচ ভূমির সহিত মিলিত হইলে, খক ও কগ দুই বাহু ঙঘ ও ঘচ দুই বাহুর সহিত অবশ্য মিলিয়া যাইবে;

সুতরাং খকগ কোণ ঙঘচ কোণের সহিত মিলিয়া যাইবে

ও তাহার সমান হইবে। [স্বতঃ ৮।

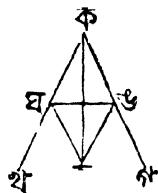
অতএব দুই ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৮। দুই বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ করিলে কেন্দ্র দ্বয় সংযোজক রেখা ছেদ বিন্দু দ্বয় সংযোজক রেখার সহিত সম কোণ করিবে ও তাহাকে দুই সমান অংশে বিভক্ত করিবে।

৯ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণকে দ্বিখণ্ড, অর্থাৎ দুই সমান কোণে বিভক্ত করিতে হইবে।

খকগ যেন নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণ; ইহাকে দ্বিখণ্ড করিতে হইবে।

কখ রেখায় ঘ বিন্দু কল্পনা কর এবং কগ হইতে কঘএর সমান কঙ অংশ ছেদ কর; [১ম, ৩।

ঘঙ সংযুক্ত কর এবং ক বিন্দু যে দিকে অবস্থিত, তাহার অপর দিকে, ঘঙর উপর ঘচঙ সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর। [১ম, ১।

কচ সংযুক্ত কর। কচ সরল রেখা খকগ কোণকে দ্বিখণ্ড করিবে।

কঘ রেখা কঙর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন।

এবং কঘচ ও কঙচ ত্রিভুজ দ্বয়ের কচ সাধারণ বাহু বলিয়া,

ঘক ও কচ এই দুই বাহু যথাক্রমে ঙক ও কচ এই দুই বাহুর সমান ;

আর ঘচ ভূমি ঙচ ভূমির সমান ; [সং, ২৪।

সুতরাং ঘকচ কোণ ঙকচ কোণের সমান। [১ম, ৮।

অতএব নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক খকগ কোণ কচ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—৯। প্রতিপাদন কর যে, এক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজকে সর্ব্বতোভাবে সমান দুই সমকোণী ত্রিভুজে বিভক্ত করা যায়।

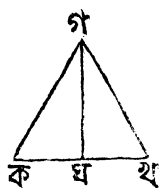
১০ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দ্দিষ্ট সীমাবিশিষ্ট সরল রেখাকে দ্বিখণ্ড, অর্থাৎ দুই সমান ভাগে বিভক্ত করিতে হইবে।

কখ যেন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা ; ইহাকে দুই সমান ভাগে বিভক্ত করিতে হইবে।

কখএর উপর এক সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর, [১ম, ১।

এবং গঘ রেখা দ্বারা কগখ কোণকে দ্বিখণ্ড কর। [১ম, ৯।

কখ রেখা ঘ বিন্দুতে দুই সমান ভাগে ছেদিত হইবে।

কগ বাহু খগএর সমান হওয়াতে, [সং, ২৪।

এবং কগঘ ও খগঘ ত্রিভুজদ্বয়ের গঘ সাধারণ বাহু বলিয়া,

কগ ও গঘ এই দুই বাহু ক্রমে খগ ও গঘ দুই বাহুর সমান;
আর কগঘ কোণ খগঘ কোণের সমান; [অঙ্কন।
সুতরাং কঘ ভূমি ঘখ ভূমির সমান। [১ম, ৪।
অতএব কখ সরল রেখা ঘ বিন্দুতে দুই সমান ভাগে বিভক্ত হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

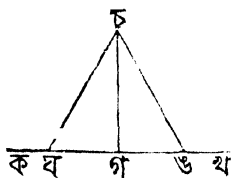
অঃ প্রঃ—১০। এক সমচতুর্ভুজকে সমান সমান দুই আয়ত ক্ষেত্রে বিভক্ত করিতে হইবে।

১১ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার সহিত সম কোণ করিয়া ঐ রেখাস্থ কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে এক সরল রেখা টানিতে হইবে।

চ

ক ঘ গ ঙ খ

কখ যেন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা এবং গ এই রেখাস্থ নির্দ্দিষ্ট বিন্দু, কখএর সহিত সম কোণ করিয়া গ বিন্দু হইতে এক সরল রেখা টানিতে হইবে।

কগ রেখাতে ঘ বিন্দু কল্পনা কর; এবং গঘএর সমান করিয়া গখ হইতে গঙ অংশ ছেদ কর; [১ম, ৩।
ঘঙর উপর ঘচঙ সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর, [১ম, ১।
এবং গচ সংযুক্ত কর।

গ বিন্দু হইতে যে গচ সরল রেখা টানা হইল, তাহা কখএর সহিত সম কোণ করিবে।

ঘগ রেখা ঙগএর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন।
এবং ঘগচ ও ঙগচ ত্রিভুজ দ্বয়ের গচ সাধারণ বাহু বলিয়া,
ঘগ ও গচ দুই বাহু ক্রমে ঙগ ও গচ দুই বাহুর সমান;
ও ঘচ ভূমি ঙচ ভূমির সমান; [সং ২৪।
এই হেতু ঘগচ কোণ ঙগচ কোণের সমান; [১ম, ৮।
আর এই দুইটী পরস্পর সন্নিহিত কোণ।
আবার, এক সরল রেখা আর একটী সরল রেখার উপর দণ্ডায়মান হইলে, যদি সন্নিহিত কোণ দ্বয় পরস্পর সমান হয়, তবে তাহাদের প্রত্যেক কোণকে সম কোণ বলা যায়; [সং, ১০।
সুতরাং ঘগচ ও ঙগচ ইহারা প্রত্যেকেই সম কোণ।
অতএব নির্দ্দিষ্ট কখ সরল রেখার সহিত সম কোণ করিয়া এই রেখাস্থ নির্দ্দিষ্ট গ বিন্দু হইতে গচ সরল রেখা টানা হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অনুমান। এই প্রতিজ্ঞা দ্বারা প্রমাণ করা যায় যে, দুই সরল রেখার এক সাধারণ খণ্ড থাকিতে পারে না।

যদি সম্ভব হয়, তবে কখ যেন কখগ ও কখঘ এই উভয় সরল রেখার সাধারণ খণ্ড হইল।

খ বিন্দু হইতে কখ রেখার সহিত সম কোণ করিয়া খঙ সরল রেখা টান।

ঙ

ক খ গ

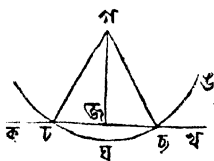
ক ৩

পরে, কখগ এক সরল রেখা হওয়াতে, [কল্পনা।
গখঙ কোণ ঙখক কোণের সমান। [সং ১০।
আবার কখঘ এক সরল রেখা বলিয়া, [কল্পনা।
ঘখঙ কোণ ঙখক কোণের সমান।
সুতরাং ঘখঙ কোণ গখঙ কোণের সমান, [স্বতঃ ১।
অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর বৃহত্তরের সমান; কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব। [স্বতঃ ৯।
অতএব দুই সরল রেখার এক সাধারণ খণ্ড থাকিতে পারে না।

অঃ প্রঃ—১২। এক নির্দ্দিষ্ট অসীম রেখাতে, এমন এক বিন্দু স্থির করিতে হইবে যে, তাহা যেন দুই নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে সম দূরবর্ত্তী হয়। বিন্দু দ্বয় কি রূপে স্থাপিত হইলে প্রতিজ্ঞাটি অসাধ্য হইবে?

১২ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট অসীম সরল রেখার বহিস্থ কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে তাহার লম্ব স্বরূপ এক সরল রেখা টানিতে হইবে।

কখ যেন নির্দ্দিষ্ট অসীম সরল রেখা, অর্থাৎ এই রেখাকে উভয় পার্শ্বে যত দূর ইচ্ছা বর্দ্ধিত করিতে পারা যায়; এবং গ যেন নির্দ্দিষ্ট বহিস্থ বিন্দু; গ হইতে কখএর উপর লম্ব টানিতে হইবে।

কখ সরল রেখার অন্য দিকে ঘ বিন্দু কল্পনা কর এবং গ কেন্দ্র হইতে ঘ পর্য্যন্ত দূরে ঙঘচ বৃত্ত অঙ্কিত কর। [স্বীঃ ৩।

এই বৃত্ত যেন চ ও ছ বিন্দুতে কখ রেখাকে ছেদ করিল।

চছকে জ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর, [১ম, ১০।

এবং গজ সংযুক্ত কর। নির্দ্দিষ্ট গ বিন্দু হইতে যে গজ রেখা টানা হইল, তাহা কখএর উপর লম্ব হইবে।

গচ ও গছ সংযুক্ত কর।

পরে, চজ রেখা ছজএর সমান বলিয়া, [অঙ্কন।

এবং গচজ ও গছজ ত্রিভুজ দ্বয়ের গজ সাধারণ বাহু হওয়াতে,

চজ ও জগ দুই বাহু ক্রমে ছজ ও জগ দুই বাহুর সমান;

আর গচ ভূমি গছ ভূমির সমান; [সং ১৫।

সুতরাং গজচ কোণ গজছ কোণের সমান; [১ম, ৮।

আর এই দুইটী পরস্পর সন্নিহিত কোণ;

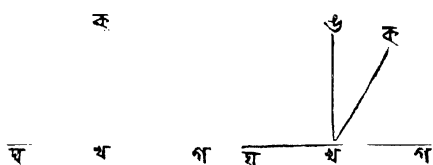
আবার এক সরল রেখা আর একটী সরল রেখার উপর দণ্ডায়মান হইলে, যদি সন্নিহিত কোণ দ্বয় পরস্পর সমান হয়, তবে তাহাদের প্রত্যেক কোণকে সম কোণ আর দণ্ডায়মান রেখাকে লম্ব বলে। [সং ১০।

অতএব কখ নির্দ্দিষ্ট রেখার বহিস্থ গ বিন্দু হইতে গজ লম্ব রেখা টানা হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—১২। এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাতে এমন দুই বিন্দু স্থির কর, যাহারা কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে সম দূরবর্ত্তী হয়।

১৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

এক সরল রেখা অন্য এক সরল রেখার সহিত সংলগ্ন হইলে, তাহার এক দিকে যে যে কোণ উৎপন্ন হয়, তাহারা দুই সম কোণ অথবা একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান।

কখ সরল রেখা যেন গঘএর সহিত সংলগ্ন হওয়াতে তাহার এক দিকে গখক ও কখঘ কোণ উৎপন্ন হইয়াছে; ইহারা দুই সম কোণ অথবা একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হইবে।

যদি গখক কোণ কখঘ কোণের সমান হয়, তবে প্রত্যেকে এক এক সম কোণ হইবে। [সং ১০।

যদি সমান না হয়, তবে গঘএর সহিত সম কোণ করিয়া খ বিন্দু হইতে খঙ রেখা টান, [১ম, ১১।

তাহা হইলে ঙখগ ও ঙখঘ কোণ দ্বয় দুই সম কোণ হইবে; [সং ১০।

এক্ষণে, গখঙ কোণ গখক ও কখঙ কোণ দ্বয়ের সমান;

এই দুই সমান বস্তুতে ঙখঘ কোণ যোগ করিলে,

গখঙ ও ঙখঘ এই দুই কোণ গখক, কখঙ ও ঙখঘ এই তিন কোণের সমান হইবে। [স্বতঃ ২।

আবার ঘথক কোণ ঘখঙ ও ঙখক কোণের সমান ;
এই দুই সমান বস্তুতে কখগ কোণ যোগ করিলে,
ঘথক ও কখগ কোণ, ঘখঙ, ঙখক ও কখগ এই তিন
কোণের সমান হইবে ; [স্বতঃ ২।
আর গখঙ ও ঙখঘ কোণ যে এই তিন কোণের সমান,
তাহা প্রতিপন্ন হইয়াছে ;
আবার যে সকল বস্তু প্রত্যেকে কোন এক বস্তুর সমান,
তাহারা পরস্পর সমান, [স্বতঃ ১।
অতএব গখঙ ও ঙখঘ কোণের যোগ ফল, ঘখক ও কখগ
কোণের যোগ ফলের সমান ;
ইহাদের মধ্যে ঘখঙ ও ঙখগ দুই সম কোণ ;
সুতরাং ঘথক ও কখগ কোণ দ্বয় একত্র যোগে দুই সম
কোণের সমান।
অতএব এক সরল রেখা অন্য এক ইত্যাদি। এখানে
ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—১৩। এক সরল রেখা অন্য এক সরল রেখার উপর দণ্ডায়মান হইলে, যদি সন্নিহিত কোণ দ্বয়কে দ্বিখণ্ড করা যায়, তবে দুইটী দ্বিখণ্ড কারক রেখার অন্তর্গত কোণ এক সম কোণ হইবে।

১৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

এক সরল রেখার কোন বিন্দুতে পরস্পর বিপরীত দিকে অন্য দুই সরল রেখা সংলগ্ন হইলে, যদি সন্নিহিত কোন দ্বয় একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হয়, তবে এই দুই সরল রেখা একই সরল রেখা হইবে।

কখ সরল রেখার খ বিন্দুতে পরস্পর বিপরীত দিকে খগ ও খঘ দুই সরল রেখা সংলগ্ন হইয়া যেন সন্নিহিত কখগ ও কখঘ কোণ দ্বয়কে একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান করিতেছে; তাহা হইলে, গখ ও খঘ এই দুই রেখা একই সরল রেখা হইবে।

যদি খঘ ও খগ এক রেখাস্থ না হয়, তবে খঙ ও খগ যেন এক রেখাস্থ হইল। তাহা হইলে, কখ সরল রেখা গখঙর সহিত সংলগ্ন হইয়া, তাহার এক দিকে যে কখগ ও কখঙ কোণ দ্বয় উৎপন্ন করিতেছে, তাহারা একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হইবে; [১ম, ১৩।
আর কখগ এবং কখঘ কোণ দ্বয়ও দুই সম কোণের সমান। [কল্পনা।
এই হেতু কখগ ও কখঙ কোণ দ্বয় কখগ ও কখঘ কোণ দ্বয়ের সমান। [স্বতঃ ১।
এই দুই সমান বস্তু হইতে কখগ সাধারণ কোণ বিয়োগ করিলে, অবশিষ্ট কখঙ কোণ অবশিষ্ট কখঘ কোণের সমান হইবে, [স্বতঃ ৩।
অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর বৃহত্তরের সমান হইবে:
কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব। [স্বতঃ ৯।
এই হেতু খঙ ও খগ এক রেখা হইতে পারে না।
এই রূপে সপ্রমাণ হইবে যে, অন্য কোন রেখা খগএর সহিত এক রেখাতে থাকিতে পারে না;

সুতরাং খঘ ও খগ একই রেখা হইবে।

অতএব এক সরল রেখার ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—১৪। কখগ ও কঘঙ এই দুই ত্রিভুজ এরূপে অবস্থিত আছে যে, কখ ও কঘ এক রেখা হইয়াছে; যদি খকগ ও ঘকঙ কোণ সমান এবং ঘকখ রেখার ভিন্ন ভিন্ন দিকে অঙ্কিত হয়, তবে কগ ও কঙ এক রেখা হইবে।

১৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে প্রতীপ, অর্থাৎ বিপরীত কোণ গুলি পরস্পর সমান হইবে।

কখ ও গঘ এই দুই সরল রেখা পরস্পর যেন ঙ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে; তাহা হইলে কঙগ কোণ ঘঙখ কোণের এবং গঙখ কোণ কঙঘ কোণের সমান হইবে।

গ ক ঙ খ ঘ

কঙ সরল রেখা গঘ সরল রেখার সহিত সংলগ্ন হওয়াতে কঙগ ও কঙঘ কোণ উৎপন্ন হইতেছে; অতএব এই দুই কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান। [১ম, ১৩।

আবার ঘঙ সরল রেখা কখএর সহিত সংলগ্ন হইয়া কঙঘ ও ঘঙখ কোণ উৎপন্ন করিতেছে বলিয়া, এই দুইটী কোণও একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান; [১ম, ১৩।

আর গঙক ও কঙঘ কোণ দ্বয় যে দুই সম কোণের সমান, তাহা প্রতিপন্ন হইয়াছে;

অতএব গঙক ও কঙঘ এই দুই কোণ কঙঘ ও ঘঙখ কোণ দ্বয়ের সমান।

এই দুই সমান বস্তু হইতে কঙঘ সাধারণ কোণ বিয়োগ করিলে, অবশিষ্ট গঙক কোণ ঘঙখ কোণের সমান হইবে। [স্বতঃ ৩।

গঙখ কোণ যে কঙঘ কোণের সমান, তাহাও এই রূপে প্রমাণ করা যায়।

অতএব দুই সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

১ অনুমান। ইহা দ্বারা সহজেই বোধ হইবে যে, দুই সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে, ছেদ বিন্দুতে যে চারিটী কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের সমষ্টি চারি সম কোণের সমান।

২ অনুমান। প্রথম অনুমান দ্বারা প্রতিপন্ন হইবে যে কতিপয় সরল রেখা এক বিন্দুতে সংলগ্ন হইলে, তদ্দ্বারা যে সকল কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের সমষ্টি চারি সম কোণের সমান।

অঃ প্রঃ—১৫। দুই সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে, প্রতীপ কোণ দ্বয়ের দ্বিখণ্ড কারক রেখা দুইটী, একই রেখায় থাকিবে।

১৬। চারি সরল রেখা এক বিন্দুতে সংলগ্ন হইলে, যদি প্রতীপ কোণগুলি পরস্পর সমান হয়, তবে চারিটীর মধ্যে দুইটী দুইটী রেখা একই সরল রেখা হইবে।

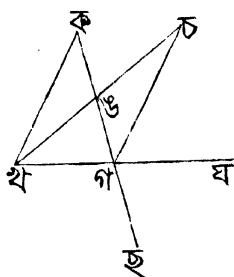
১৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন ত্রিভুজের এক বাহু বর্দ্ধিত করিলে, বহিস্থ কোণ অন্তরস্থিত দূরবর্ত্তী প্রত্যেক কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

কখগ ত্রিভুজের খগ বাহু যেন ঘ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত হইয়াছে; তাহা হইলে বহিস্থ কগঘ কোণ অন্তরস্থিত দূরবর্ত্তী গখক ও খকগ এই দুইএর প্রত্যেক কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

কগকে ঙ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর; [১ম, ১০।

খঙ সংযুক্ত করিয়া তাহাকে চ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর, ঙচকে ঙখএর সমান কর; [১ম, ৩।

কঙ রেখা ঙগএর এবং খঙ রেখা ঙচএর সমান বলিয়া, [অঙ্কন।

কঙ ও ঙখ দুই বাহু ক্রমে গঙ ও ঙচ দুই বাহুর সমান; আর কঙখ কোণ গঙচ কোণের সমান;

কেননা, তাহারা পরস্পর প্রতীপ কোণ; [১ম, ১৫।

এই হেতু কঙখ ত্রিভুজ গঙচ ত্রিভুজের সমান; আর সমান সমান বাহুর সম্মুখীন কোণ গুলি যথাক্রমে পরস্পর সমান; [১ম, ৪।

অতএব খকঙ কোণ ঙগচ কোণের সমান;

কিন্তু ঙগঘ কোণ ঙগচ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর। [স্বতঃ ৯।
সুতরাং কগঘ কোণ খকঙ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

এই রূপে খগ বাহুকে দ্বিখণ্ডিত ও কগ বাহুকে ছ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত করিলে, সপ্রমাণ হইবে যে, খগছ কোণের সমান কগঘ কোণ কখগ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।
অতএব কোন ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—১৭। এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন সরল রেখার উপর একাধিক লম্ব টানা যায় না।

১৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

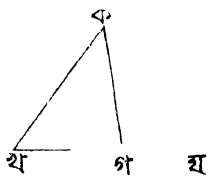
কোন ত্রিভুজের যে দুইটী কোণ লও, তাহারা একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

কখগ যেন এক ত্রিভুজ; ইহার যে দুই কোণ লও, তাহারা একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

খগকে ঘ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর।

পরে, কগঘ কোণ কখগ ত্রিভুজের বহিস্থ কোণ বলিয়া, ইহা অন্তরস্থিত দূরবর্ত্তী কখগ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর; [১ম,১৬।

ক

খ গ ঘ

ইহাদের প্রত্যেকের সহিত কগখ কোণ যোগ করিলে, কগঘ ও কগখ কোণ একত্র যোগে কখগ ও কগখ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর;

আর কগঘ কোণ ও কগখ কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান। [১ম, ১৩।

সুতরাং কখগ ও কগখ একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

এইরূপে সপ্রমাণ হইবে যে, খকগ ও কগখ কোণ একত্র যোগে এবং গকখ ও কখগ কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

অতএব কোন ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

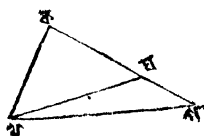
অঃ প্রঃ—১৮। কোন ত্রিভুজের তিনটী কোণের সমষ্টি তিন সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

১৯। কোন ত্রিভুজের দুইটী বহিস্থ কোণ দুই সম কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর এবং তিনটী বহিস্থ কোণ একত্র যোগে তিন সম কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

১৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

প্রত্যেক ত্রিভুজের বৃহত্তর বাহুর সম্মুখীন কোণ বৃহত্তর হইবে।

কখগ ত্রিভুজের কগ বাহু যেন কখ অপেক্ষা বৃহত্তর; তাহা হইলে, কখগ কোণও কগখ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

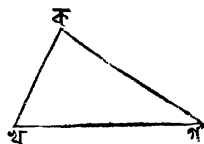
কগ বাহু কখ অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে, কঘকে কখএর সমান কর, [১ম, ৩।
এবং খঘ সংযুক্ত কর।

পরে, খঘগ ত্রিভুজের কঘখ বহিস্থ কোণ বলিয়া, ইহ অন্তরস্থিত দূরবর্ত্তী ঘগখ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর; [১ম, ১৬
আর কখ বাহু কঘ বাহুর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন
কঘখ কোণ কখঘ কোণের সমান। [১ম, ৫
অতএব কখঘ কোণও কগখ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর;
সুতরাং কখগ কোণ কগখ কোণ অপেক্ষা আরও বৃহত্তর
অতএব প্রত্যেক ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহা উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—২০। কখগঘ চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের কঘ বৃহত্তম ও খগ ক্ষুদ্রতম ভুজ; প্রমাণ কর যে, কখগ কোণ কঘগ কোণ অপেক্ষ এবং খগঘ কোণ খকঘ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

১৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

ত্রিভুজের বৃহত্তর কোণের সম্মুখীন বাহু বৃহত্তর হইবে।

কখগ ত্রিভুজের কখগ কোণ যেন কগখ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর; কগ বাহু ও কখ বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

যদি না হয়, তবে কগ বাহু কখএর সমান কিম্বা তাহা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে;
কিন্তু কগ, কখএর সমান হইতে পারে না, কেননা, সমান হইলে কখগ কোণ ও কগখ কোণের সমান হইবে; [১ম, ৫।
কিন্তু এই দুই কোণ সমান নয়; [কল্পনা।

অতএব কগ বাহু কখএর সমান নয়।

আর কগ বাহু কখ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতরও নয়;

কেননা, তাহা হইলে কখগ কোণও কগখ কোণ অপেক্ষা

ক্ষুদ্রতর হইত; [১ম, ১৮।

কিন্তু ইহা ক্ষুদ্রতর নয়; [কল্পনা।

অতএব কগ বাহু কখ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নয়;

আর সপ্রমাণ হইয়াছে যে, কগ, কখএর সমান নয়;

সুতরাং কগ বাহু কখ অপেক্ষা বৃহত্তর।

অতএব প্রত্যেক ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—২১। কখগঘ সমচতুর্ভুজের ক বিন্দু হইতে কচ সরল রেখা এরূপে টান, যেন তাহা খগ বাহুকে ঙ বিন্দুতে ও বর্দ্ধিত ঘগ বাহুকে চ বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা হইলে কচ রেখা সমচতুর্ভুজের কর্ণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

২২। কোন সরল রেখার বহিস্থ এক বিন্দু হইতে ঐ রেখা পর্য্যন্ত যত সরল রেখা টানা যায়, তন্মধ্যে যেটী নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার লম্ব হইবে, সেইটী সর্ব্বাপেক্ষা ক্ষুদ্রতম; আর অন্য গুলির মধ্যে লম্বের নিকটবর্ত্তী যে কোন রেখা তাহা হইতে দূরবর্ত্তী রেখা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর; এবং লম্বের দুই দিকে কেবল এক একটী করিয়া সমান রেখা টানা যায়।

২০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

ত্রিভুজের যে দুই বাহু লও, তাহাদের সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

কখগ যেন এক ত্রিভুজ; ইহার যে দুই বাহু লও, তাহারা

তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে; অর্থাৎ, খক ও কগ একত্র যোগে খগ অপেক্ষা বৃহত্তর; কখ ও খগ একত্র যোগে কগ অপেক্ষা বৃহত্তর এবং খগ ও গক একত্র যোগে কখ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

খককে ঘ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি করিয়া, কঘকে কগএর সমান কর,

[১ম, ৩।

এবং ঘগ সংযুক্ত কর।

পরে, কঘ রেখা কগএর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন।

কঘগ কোণ কগঘ কোণের সমান; [১ম, ৫।

আর খগঘ কোণ কগঘ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর; [স্বতঃ ৯।

এই হেতু খগঘ কোণ খঘগ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

আবার খগঘ ত্রিভুজের খগঘ কোণ খঘগ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে,

এবং প্রত্যেক ত্রিভুজের বৃহত্তর কোণের সম্মুখীন বাহু বৃহত্তর হয় বলিয়া, [১ম, ১৯।

খঘ বাহু খগ বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

ইহাদের মধ্যে খঘ বাহু খক ও কগএর সমান;

সুতরাং খক ও কগ একত্র যোগে খগ অপেক্ষা বৃহত্তর।

এই রূপে সপ্রমাণ হইবে যে, কখ ও খগ একত্র যোগে কগ অপেক্ষা এবং খগ ও গক একত্র যোগে কখ অপেক্ষা বৃহত্তর।

অতএব ত্রিভুজের যে দুই বাহু ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

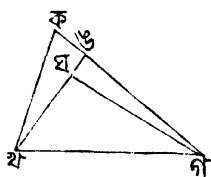
অঃ প্রঃ—২৩। ত্রিভুজের যে বাহু লও তাহা অন্য দুই বাহুর অন্তর অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

২৪। ত্রিভুজের তিন বাহুর সমষ্টি প্রত্যেক বাহুর দ্বিগুণ অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু যে কোন দুই বাহুর সমষ্টির দ্বিগুণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

২১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

ত্রিভুজের কোন বাহুর দুই প্রান্ত হইতে অভ্যন্তরীণ কোন বিন্দু পর্যন্ত যদি দুই সরল রেখা টানা যায়, তবে এই দুই রেখা একত্র যোগে ত্রিভুজের অন্য দুই বাহুর সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে, কিন্তু তাহাদের অন্তর্গত কোণ, ত্রিভুজের দুই বাহুর অন্তর্গত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

কখগ যেন এক ত্রিভুজ এবং খগ বাহুর দুই প্রান্ত হইতে ত্রিভুজের অভ্যন্তরীণ ঘ বিন্দু পর্য্যন্ত যেন খঘ ও গঘ রেখা টানা হইয়াছে; খঘ ও গঘএর সমষ্টি খক ও কগএর সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে,

কিন্তু তাহাদের অন্তর্গত খঘগ কোণ খকগ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

খঘ রেখাকে ঙ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর।

ত্রিভুজের দুই বাহু একত্র যোগে তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হয় বলিয়া, কখঙ ত্রিভুজের খক ও কঙ এই দুই বাহু একত্র যোগে খঙ বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। [১ম, ২০।

ইহাদের প্রত্যেকের সহিত ঙগ যোগ করিলে,
খক ও কগ একত্র যোগে খঙ ও ঙগ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। [স্বতঃ ৪।

আবার গঙঘ ত্রিভুজের গঙ ও ঙঘ দুই বাহু একত্র যোগে তৃতীয় গঘ বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর ; [১ম, ২০।

ইহাদের প্রত্যেকের সহিত ঘখ যোগ করিলে,
গঙ ও ঙখ একত্র যোগে গঘ ও ঘখ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ;

আর পূর্ব্বে সপ্রমাণ হইয়াছে যে, খক ও কগ একত্র যোগে খঙ ও ঙগ অপেক্ষা বৃহত্তর ; সুতরাং খক ও কগ একত্র যোগে খঘ ও ঘগ অপেক্ষা আরও বৃহত্তর।

অনন্তর, ত্রিভুজের বহিস্থ কোণ অন্তরস্থিত দূরবর্ত্তী কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হয় বলিয়া, গঘঙ ত্রিভুজের বহিস্থ খঘগ কোণ গঙঘ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

এই কারণে, কখঙ ত্রিভুজের বহিস্থ গঙখ কোণ খকঙ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ; আর সপ্রমাণ হইয়াছে যে, খঘগ কোণ গঙখ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ; সুতরাং খঘগ কোণ খকগ কোণ অপেক্ষা আরও বৃহত্তর।

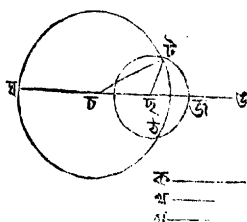
অতএব কোন ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—২৫। ত্রিভুজের অভ্যন্তরীণ কোন বিন্দু হইতে তিনটী কৌণিক বিন্দু পর্য্যন্ত তিনটী রেখা টানিলে এই তিন রেখা একত্র যোগে ত্রিভুজের তিন বাহুর সমষ্টির অর্দ্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু বাহু তিনটীর যোগফল অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

২২ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

এমন এক ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার তিন বাহু তিনটী নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার সমান হয়, কিন্তু এই তিন রেখার যে কোন দুইটীর যোগ ফল তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়া আবশ্যক।

ক, খ, গ যেন তিনটী নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা; ইহাদের মধ্যে যে কোন দুইটীর যোগ ফল তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর; অর্থাৎ ক ও খএর সমষ্টি গ অপেক্ষা, ক ও গএর সমষ্টি খ অপেক্ষা এবং খ ও গএর সমষ্টি ক অপেক্ষা বৃহত্তর। এমন এক ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার বাহু তিনটী যথাক্রমে ক, খ ও গ সরল রেখার সমান হইবে।

ঘঙ সরল রেখা এরূপে কল্পনা কর যেন ইহা ঘ বিন্দুতে সীমাবিশিষ্ট কিন্তু ঙ বিন্দুর দিকে অসীম হয়, আর ঘচকে কএর, চছকে খএর এবং ছজকে গএর সমান কর। [১ম, ৩।

চ কেন্দ্র হইতে চঘএর প্রান্ত দিয়া ঘটঠ বৃত্ত অঙ্কিত কর। [স্বী, ৩।

ছ কেন্দ্র হইতে ছজএর প্রান্ত দিয়া জঠট বৃত্ত অঙ্কিত কর। টচ ও টছ সংযুক্ত কর। টচছ ত্রিভুজের বাহু তিনটী, যথাক্রমে ক, খ, গ সরল রেখার সমান হইবে।

চ বিন্দু ঘটঠ বৃত্তের কেন্দ্র হওয়াতে, চঘ রেখা চটএর সমান; [সং ১৫।

আর চঘ রেখা কএর সমান; [অঙ্কন।

এই হেতু চট রেখা কএর সমান। [স্বতঃ ১।

আবার, ছ বিন্দু জঠট বৃত্তের কেন্দ্র হওয়াতে,

ছজ রেখা ছটএর সমান;

আর ছজ রেখা গএর সমান: [অঙ্কন।

এই হেতু ছট রেখা গএর সমান; [স্বতঃ ১।

এবং চছ রেখা খএর সমান। [অঙ্কন।

সুতরাং টচ, চছ ও ছট রেখা যথাক্রমে ক, খ ও গ সরল রেখার সমান।

অতএব টচছ ত্রিভুজের টচ, চছ ও ছট বাহু যথাক্রমে ক, খ ও গ সরল রেখার সমান। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

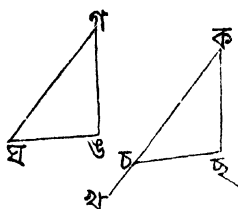
অঃ প্রঃ—২৬। কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমান আর এক সরল রৈখিক ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

২৩ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে এক নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণের সমান এক কোণ করিতে হইবে।

কখ নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা; ক যেন এই রেখাস্থিত নির্দ্দিষ্ট বিন্দু, এবং ঘগঙ নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক

কোণ। কখ রেখার ক বিন্দুতে ঘগঙ সরল রৈখিক কোণের সমান এক কোণ করিতে হইবে।

গঘ ও গঙ রেখাতে ঘ ও ঙ বিন্দু নির্দ্দেশ করিয়া ঘঙ সংযুক্ত কর। কচছ ত্রিভুজ এরূপে অঙ্কিত কর, যেন ইহার তিন বাহু যথাক্রমে গঘ, ঘঙ ও ঙগ সরল রেখার সমান হয়, অর্থাৎ যেন কচ বাহু গঘএর, চছ বাহু ঘঙর এবং ছক বাহু ঙগএর সমান হয়। [১ম, ২২।

চকছ কোণ ঘগঙ কোণের সমান হইবে।

চক ও কছ বাহু যথাক্রমে ঘগ ও গঙ বাহুর সমান হওয়াতে, এবং চছ ভূমি ঘঙর সমান বলিয়া, চকছ কোণ ঘগঙ কোণের সমান। [১ম, ৮।

অতএব কখ রেখার ক বিন্দুতে নির্দ্দিষ্ট ঘগঙ কোণের সমান চকছ কোণ অঙ্কিত হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

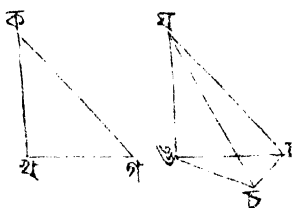
অঃ প্রঃ—২৭। কোন ত্রিভুজের একটী ভুজ, সন্নিহিত একটী কোণ ও অন্য দুই ভুজের সমষ্টি বা অন্তর নির্দ্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

২৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই ত্রিভুজের মধ্যে যদি একের দুই বাহু যথাক্রমে অন্যের দুই বাহুর সমান হয়, কিন্তু একটীর এই বাহু

দ্বয়ের অন্তর্গত কোণ যদি অন্যটীর বাহু দ্বয়ের অন্তর্গত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তাহা হইলে যে ত্রিভুজের কোণ বৃহত্তর তাহার ভুমি অন্যের ভূমি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

কখগ ও **ঘঙচ** ত্রিভুজ দ্বয়ের মধ্যে যেন একের **কখ** ও **কগ** বাহু যথাক্রমে অন্যের **ঘঙ** ও **ঘচ** বাহুর সমান, অর্থাৎ **কখ** বাহু **ঘঙ**র এবং **কগ** বাহু **ঘচ**এর সমান; কিন্তু **খকগ** কোণ **ঙঘচ** কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর; তাহা হইলে **খগ** ভূমি **ঙচ** ভূমি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

ঘঙ ও ঘচ বাহুর মধ্যে ঘঙ বাহু যেন অন্য অপেক্ষা বৃহত্তর নহে। ঘঙ রেখার ঘ বিন্দুতে খকগ কোণের সমান ঙঘছ কোণ কর, [১ম, ২৩

এবং ঘছ রেখাকে কগ বা ঘচএর সমান কর; [১ম, ৩

ঙছ ও ছচ সংযুক্ত কর।

কখ বাহু ঘঙর সমান হওয়াতে, [কল্পনা।

এবং কগ বাহু ঘছএর সমান বলিয়া, [অঙ্কন।

খক ও কগ বাহু দ্বয় যথাক্রমে ঙঘ ও ঘছ বাহু দ্বয়ের সমান;

আর খকগ কোণ ঙঘছ কোণের সমান, [অঙ্কন।

এই হেতু খগ ভূমি ঙছ ভূমির সমান। [১ম, ৪।

আবার ঘছ বাহু ঘচএর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন।
ঘছচ কোণ ঘচছ কোণের সমান ; [১ম, ৫।
এবং ঘছচ কোণ ঙছচ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর। [স্বতঃ ৯।
অতএব ঘচছ কোণ ও ঙছচ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ;
তাহা হইলে, ঙচছ কোণ ঙছচ কোণ অপেক্ষা আরও বৃহত্তর। [স্বতঃ ৯।

এক্ষণে ঙচছ ত্রিভুজের ঙচছ কোণ ঙছচ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে,
আর প্রত্যেক ত্রিভুজের বৃহত্তর কোণের সম্মুখীন বাহু বৃহত্তর হয় বলিয়া, [১ম, ১৯।
ঙছ, ঙচ অপেক্ষা বৃহত্তর ;
আর ঙছ খগএর সমান ;
সুতরাং খগ ভূমি ঙচ ভূমি অপেক্ষা বৃহত্তর।
অতএব দুই ত্রিভুজের মধ্যে ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

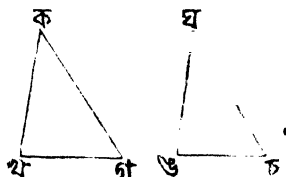
অঃ প্রঃ—২৮। চব্বিশের প্রতিজ্ঞার চিত্রে প্রতিপন্ন কর যে, ঙছ রেখা ঘচ রেখাকে ঘ ও চএর মধ্যস্থিত কোন বিন্দুতে ছেদ করিবে।

২৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই ত্রিভুজের মধ্যে যদি একের দুই বাহু যথাক্রমে অন্যের দুই বাহুর সমান হয়, আর একটীর ভূমি অন্য-টীর ভুমি অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তাহা হইলে, যে ত্রিভু-জের ভুমি বৃহত্তর, তাহার দুই বাহুর অন্তর্গত কোণ

অন্যের বাহু দ্বয়ের অন্তর্গত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

কখগ ও ঘঙচ ত্রিভুজের কখ ও কগ বাহু যেন ক্রমে ঘঙ ও ঘচ বাহুর সমান, অর্থাৎ কখ বাহু ঘঙর এবং কগ বাহু ঘচএর সমান, কিন্তু খগ ভূমি ঙচ ভূমি অপেক্ষা বৃহত্তর; তাহা হইলে খকগ কোণ ঙঘচ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

যদি বৃহত্তর না হয়, তবে খকগ কোণ ঙঘচ কোণের সমান অথবা তাহা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

খকগ কোণ ঙঘচ কোণের সমান হইতে পারে না: কেননা, তাহা হইলে, খগ ভূমি ঙচ ভূমির সমান হইত; [১ম, ৪।

কিন্তু এই ভূমি দ্বয় পরস্পর সমান নয়; [কল্পনা।

এই হেতু খকগ কোণ ঙঘচ কোণের সমান নয়।

আবার খকগ কোণ ঙঘচ কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নয়; কেননা, তাহা হইলে খগ ভূমি ঙচ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইত; [১ম, ২৪।

কিন্তু ইহা ক্ষুদ্রতর নয়; [কল্পনা

এই হেতু খকগ কোণ ঙঘচ কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নয়;

সুতরাং খকগ কোণ ঙঘচ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

অতএব দুই ত্রিভুজের মধ্যে ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

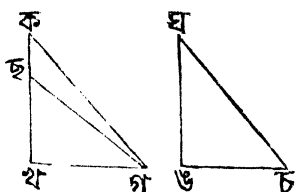
অঃ প্রঃ—২৯। দুই ঐককেন্দ্রিক বৃত্তের মধ্যে ক্ষুদ্রটার কখ ব্যাসের দুই প্রান্ত হইতে ভিন্ন ভিন্ন দিকে বৃহৎ বৃত্তের পরিধি পর্য্যন্ত কগ, কঘ, খগ ও খঘ রেখা টানিলে, যদি কগ রেখা কঘএর সমান হয়, তবে খগ রেখা খঘএর সমান হইবে; এবং যদি কগ, কঘ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে খগ, খঘ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে ও যদি ক্ষুদ্রতর হয়, তবে বৃহত্তর হইবে।

২৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই ত্রিভুজের মধ্যে যদি একের দুই কোণ যথাক্রমে অন্যের দুই কোণের সমান হয় এবং এক একটী বাহু, অর্থাৎ সমান কোণের সন্নিহিত বা সম্মুখীন বাহু দ্বয় পরস্পর সমান হয়, তাহা হইলে, অন্য বাহু গুলি যথাক্রমে সমান হইবে এবং একের তৃতীয় কোণ অন্যের তৃতীয় কোণের সমান হইবে।

কখগ এবং ঘঙচ দুই ত্রিভুজের মধ্যে যেন একের কখগ ও খগক কোণ দ্বয় যথাক্রমে অন্যের ঘঙচ ও ঙচঘ কোণ দ্বয়ের সমান অর্থাৎ কখগ কোণ ঘঙচ কোণের এবং খগক কোণ ঙচঘ কোণের সমান; আর এই দুই ত্রিভুজের এক এক বাহু পরস্পর সমান; প্রথমত যেন সমান সমান কোণের সন্নিহিত বাহু দ্বয় অর্থাৎ খগ ও ঙচ পরস্পর সমান হইল: তাহা হইলে অন্য বাহু গুলি যথাক্রমে পরস্পর সমান হইবে, অর্থাৎ কখ বাহু ঘঙর

এবং কগ বাহু ঘচএর সমান হইবে এবং খকগ তৃতীয় কোণ ঙঘচ তৃতীয় কোণের সমান হইবে।

যদি কখ বাহু ঘঙর সমান না হয়, তবে এই দুইএর মধ্যে একটী অন্য অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। কখ যেন বৃহত্তর হইল ;

খক হইতে ঘঙর সমান খছ অংশ ছেদ কর, [১ম, ৩।

এবং ছগ সংযুক্ত কর।

পরে, ছখ বাহু ঘঙর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন।

এবং খগ বাহু ঙচএর সমান বলিয়া, [কল্পনা।

ছখ ও খগ বাহু দ্বয় যথাক্রমে ঘঙ ও ঙচ বাহু দ্বয়ের সমান ;

আর ছখগ কোণ ঘঙচ কোণের সমান, [কল্পনা।

এই হেতু, ছগ ভূমি ঘচ ভূমির সমান এবং ছখগ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান ; আর সমান সমান কোণের সম্মুখীন বাহু গুলি যথাক্রমে সমান ; [১ম, ৪।

অতএব ছগখ কোণ ঘচঙ কোণের সমান ;

আর ঘচঙ কোণ কগখ কোণের সমান ; [কল্পনা।

এই হেতু ছগখ কোণ কগখ কোণের সমান, [স্বতঃ, ১।

অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর বৃহত্তরের সমান ; কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব। [স্বতঃ ৯।

অতএব কখ বাহু ঘঙর অসমান নহে,

অর্থাৎ এই দুই বাহু পরস্পর সমান ;

আর খগ বাহু ঙচএর সমান, [কল্পনা।

এই হেতু কখ ও খগ বাহু দ্বয় যথাক্রমে ঘঙ ও ঙচ বাহু দ্বয়ের সমান;

এবং কখগ কোণ ঘঙচ কোণের সমান; [কল্পনা।

সুতরাং কগ ভূমি ঘচ ভূমির সমান এবং খকগ তৃতীয় কোণ ঙঘচ তৃতীয় কোণের সমান। [১ম, ৪।

অনন্তর, যেন ত্রিভুজ দ্বয়ের সমান সমান কোণের সম্মুখীন এক একটী বাহু পরস্পর সমান অর্থাৎ কখ বাহু ঘঙ বাহুর সমান: তাহা হইলে এস্থলেও অন্যান্য বাহু যথাক্রমে সমান হইবে, অর্থাৎ খগ বাহু ঙচএর ও কগ বাহু ঘচএর সমান হইবে এবং খকগ তৃতীয় কোণ ঙঘচ তৃতীয় কোণের সমান হইবে।

যদি খগ বাহু ঙচএর সমান না হয়, তবে এই দুইএর মধ্যে একটী অন্যাপেক্ষা বৃহত্তর হইবে; খগ যেন বৃহত্তর হইল; ঙচএর সমান করিয়া খজ অংশ ছেদ কর; [১ম, ৩।

ক খ জ গ ঙ চ

এবং কজ সংযুক্ত কর।

পরে, খজ বাহু ঙচএর সমান বলিয়া, [অঙ্কন।

এবং কখ বাহু ঘঙর সমান হওয়াতে, [কল্পনা।

কখ ও খজ দুই বাহু যথাক্রমে ঘঙ ও ঙচ দুই বাহুর সমান;

আর কখজ কোণ ঘঙচ কোণের সমান; [কল্পনা।

এই হেতু কজ ভূমি ঘচ ভূমির সমান এবং কখজ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান, আর সমান সমান কোণের সম্মুখীন বাহুগুলি যথাক্রমে সমান ; [১ম, ৪।

অতএব খজক কোণ ঙচঘ কোণের সমান ;

আর ঙচঘ কোণ খগক কোণের সমান ; [কল্পনা।

এই হেতু খজক কোণ খগক কোণের সমান ; [স্বতঃ ১।

অর্থাৎ কজগ ত্রিভুজের বহিস্থ খজক কোণ অন্তর স্থিত দূরবর্ত্তী খগক কোণের সমান ;

কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব। [১ম, ১৬।

অতএব খগ বাহু ঙচএর অসমান নহে, অর্থাৎ সমান ;

আর কখ বাহু ঘঙর সমান ; [কল্পনা।

এই হেতু কখ ও খগ বাহু দ্বয় যথাক্রমে ঘঙ ও ঙচ বাহু দ্বয়ের সমান ;

এবং কখগ কোণ ঘঙচ কোণের সমান ; [কল্পনা।

সুতরাং কগ ভূমি ঘচ ভূমির সমান এবং খকগ তৃতীয় কোণ ঙঘচ তৃতীয় কোণের সমান। [১ম, ৪।

অতএব দুই ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৩০। যদি একটী সরল রেখা কোন ত্রিভুজের শীর্ষ কোণ ও ভূমি এই উভয়কে দ্বিখণ্ড করে, তবে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

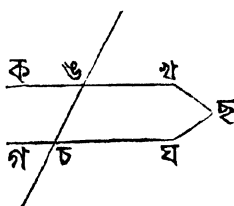
৩১। এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে এমন এক সরল রেখা টানিতে হইবে, যেন তাহা পরস্পর অবনত দুই নির্দ্দিষ্ট রেখার সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে।

২৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই সরল রেখার উপর অন্য এক সরল রেখার সম্পাত হইলে, যদি একান্তর কোণগুলি পরস্পর সমান হয়, তবে ঐ দুই সরল রেখা পরস্পর সমান্তর হইবে।

কখ ও গঘ দুই সরল রেখার উপর ঙচ সরল রেখার সম্পাত হওয়াতে যেন কঙচ ও ঙচঘ একান্তর কোণ দ্বয় পরস্পর সমান হইল; তাহা হইলে কখ ও গঘ এই দুই সরল রেখা পরস্পর সমান্তর হইবে।

যদি কখ ও গঘ পরস্পর সমান্তর না হয়, তবে বর্দ্ধিত হইলে তাহারা খ ও ঘএর দিকে কিম্বা ক ও গএর দিকে মিলিত হইবে; ইহারা যেন খ ও ঘএর দিকে বর্দ্ধিত হইয়া ছ বিন্দুতে মিলিত হইল;

তাহাতে, ছঙচ ক্ষেত্র একটী ত্রিভুজ হওয়াতে, ইহার বহিস্থ কঙচ কোণ অন্তরস্থিত ঙচঘ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে; [১ম, ১৬।

কিন্তু কঙচ কোণ ঙচঘ কোণের সমান; [কল্পনা।

অতএব এরূপ হওয়া অসম্ভব।

সুতরাং কখ ও গঘ রেখা দ্বয় খ ও ঘএর দিকে বর্দ্ধিত হইলে মিলিত হইবে না; এই রূপে প্রমাণ করা যাইতে পারে যে, তাহারা ক ও গএর দিকেও মিলিত হইবে না; আর দুই সরল রেখা উভয় দিকে উত্তরোত্তর

বর্দ্ধিত হইয়াও মিলিত না হইলে পরস্পর সমান্তর হইয়া থাকে। [সংজ্ঞা, ৩৫।

সুতরাং কখ, গঘএর সমান্তর।

অতএব দুই সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

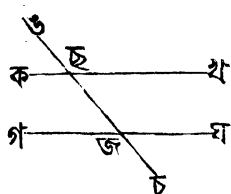
অঃ প্রঃ—৩২। দুই সরল রেখার উপর অন্য এক সরল রেখার সম্পাত হইলে, যদি বহির্দ্দিকের একান্তর কোণ দ্বয়, অর্থাৎ কছঙ কোণ ও চজঘ কোণ (২৮ প্রতিজ্ঞার চিত্র দেখ) পরস্পর সমান হয়, তবে ঐ দুই রেখা সমান্তর হইবে।

৩৩। প্রতিপন্ন কর যে, রম্বস মাত্রেই সমান্তর রৈখিক ক্ষেত্র ও রম্বসের কর্ণ রেখা দ্বয় পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে।

২৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই সরল রেখার উপর অন্য এক সরল রেখার সম্পাত হইলে, যদি তাহার একই দিকের বহিস্থ কোণ ও অন্তরস্থ দুরবর্ত্তী কোণ পরস্পর সমান হয়, অথবা একই দিকের অন্তরস্থ দুই কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হয়, তবে ঐ দুই সরল রেখা পরস্পর সমান্তর হইবে।

কখ ও গঘ দুই সরল রেখার উপর যেন ঙচ সরল রেখার সম্পাত হইল, তাহাতে যদি এই রেখার একই দিকের বহিস্থ ঙছখ কোণ ও অন্তরস্থ ছজঘ কোণ পরস্পর সমান হয় কিম্বা এক দিকের অন্তরস্থ খছজ ও ছজঘ কোণ দ্বয় একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হয়, তবে কখ রেখা, গঘ রেখার সমান্তর হইবে।

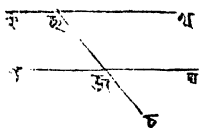
ঙছখ কোণ ছজঘ কোণের সমান হওয়াতে, [কল্পনা।
ও ঙছখ কোণ কছজ কোণের সমান বলিয়া, [১ম, ১৫।
কছজ কোণ ছজঘ কোণের সমান; [স্বতঃ ১।
এবং এই দুইটী একান্তর কোণ হওয়াতে,
কখ রেখা গঘএর সমান্তর। [১ম, ২৭।

অনন্তর, খছজ ও ছজঘ কোণ দ্বয় একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান বলিয়া, [কল্পনা।
এবং কছজ ও খছজ এই দুই কোণও একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হওয়াতে, [১ম, ১৩।
কছজ ও খছজ কোণ দ্বয়, খছজ ও ছজঘ কোণ দ্বয়ের সমান;
এই দুই সমান বস্তু হইতে খছজ কোণ বিয়োগ করিলে,
কছজ কোণ ছজঘ কোণের সমান হইবে; [স্বতঃ ৩।
আর এই দুইটী, একান্তর কোণ;
সুতরাং কখ রেখা গঘএর সমান্তর। [১ম, ২৭।
অতএব দুই সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৩৪। কখগঘ চতুর্ভুজের খ কোণ যদি ঘ কোণের সমান হয় ও কখ বাহু বৃদ্ধি করিলে বহিস্থ কোণ যদি ক কোণের সমান হয়, তবে কখগঘ এক সমান্তর রৈখিক ক্ষেত্র হইবে।

২৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই সমান্তর সরল রেখার উপর অন্য এক সরল রেখার সম্পাত হইলে, একান্তর কোণ গুলি পরস্পর সমান হইবে আর একই দিকের বহিস্থ কোণ ও অন্তরস্থিত দূরবর্ত্তী কোণ পরস্পর সমান হইবে এবং একই দিকের অন্তরস্থ কোণ দ্বয় একত্রযোগে দুই সম কোণের সমান হইবে।

কখ ও গঘ সমান্তর রেখার উপর যেন ঙচ রেখার সম্পাত হইয়াছে; তাহাতে কছজ ও ছজঘ একান্তর কোণ দ্বয় পরস্পর সমান হইবে এবং ঙচএর একই দিকের বহিস্থ ঙছখ

কোণ ও অন্তরস্থ দূরবর্ত্তী ছজঘ কোণ পরস্পর সমান হইবে আর একই দিকের অন্তরস্থ খছজ ও ছজঘ এই দুইটি কোণ, একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হইবে।

যদি কছজ কোণ ছজঘ কোণের সমান না হয়, তবে একটী অন্যাপেক্ষা অবশ্যই বৃহত্তর হইবে;
কছজ যেন বৃহত্তর হইল।

পরে, কছজ কোণ ছজঘ অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে প্রত্যেকের সহিত খছজ কোণ যোগ করিলে, কছজ ও খছজ একত্র যোগে খছজ ও ছজঘএর সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে;

আর **কছজ** ও **খছজ** একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান; [১ম, ১৩।

অতএব **খছজ** ও **ছজঘ** একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

আবার কোন দুই সরল রেখার সহিত অন্য এক সরল রেখার সম্পাত হইলে, তাহার একই দিকের দুই অন্তরস্থ কোণ যদি একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তবে যে দিকের দুইটী কোণের সমষ্টি দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, সেই দিকে এই দুই রেখাকে উত্তরোত্তর বৃদ্ধি করিলে, তাহারা সংলগ্ন হইবে; [স্বতঃ ১২।

অতএব **কখ** ও **গঘ** এই দুই রেখাকে উত্তরোত্তর বৃদ্ধি করিলে, অবশেষে সংলগ্ন হইবে;

কিন্তু ইহারা সমান্তর কল্পিত হওয়াতে কখনই সংলগ্ন হইতে পারে না;

এই হেতু **কছজ** কোণ **ছজঘ** কোণের অসমান নহে, অর্থাৎ সমান;

আবার কছজ কোণ ঙছখ কোণের সমান; [১ম, ১৫।

অতএব ঙছখ কোণ ছজঘ কোণের সমান; [স্বতঃ ১।

ইহাদের প্রত্যেকের সহিত **খছজ** কোণ যোগ করিলে,

ঙছখ ও **খছজ** একত্র যোগে **খছজ** ও **ছজঘ**এর যোগ-ফলের সমান হইবে; [স্বতঃ ২।

আর ইহাদের মধ্যে **ঙছখ** ও **খছজ** একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান; [১ম, ১৩।

সুতরাং **খছজ** ও **ছজঘ** কোণ দ্বয়ও একত্র যোগে দুই

সম কোণের সমান। [স্বতঃ ১।

অতএব দুই সমান্তর ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

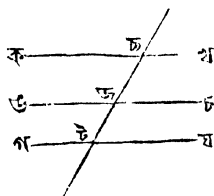
অঃ প্রঃ—৩৫। যদি কোন সরল রেখা, দুই সমান্তর সরল রেখার মধ্যে একটীর লম্ব হয়, তবে উহা অন্যটীরও লম্ব হইবে।

৩৬। দুই সমান্তর সরল রেখার সংযোজক অন্য কোন সরল রেখার মধ্য বিন্দু দিয়া দুইটী সমান্তর রেখা পর্য্যন্ত যদি অপর কোন সরল রেখা টানা যায়, তবে ইহাও ঐ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইবে।

৩০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।—

যে যে সরল রেখা কোন এক সরল রেখার সমান্তর, তাহারা পরস্পর সমান্তর।

কখ ও **গঘ** প্রত্যেকে যেন **ঙচ**এর সমান্তর; তা হইলে, **কখ** ও **গঘ** পরস্পর সমান্তর হইবে।

ছজট সরল রেখা টান; ইহা যেন **কখ**, **ঙচ** ও **গঘ**কে ক্রমে **ছ**, **জ** ও **ট** বিন্দুতে ছেদ করিল।

পরে, **ছজট** রেখা **কখ** ও **ঙচ**কে ছেদ করাতে **কছজ** কোণ **ছজচ** কোণের সমান হইবে; [১ম, ২৯

আবার **ছট** রেখা **ঙচ** ও **গঘ**কে ছেদ করাতে, **ছজচ** কোণ **জটঘ** কোণের সমান; [১ম, ২৯

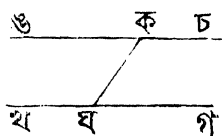
আর সপ্রমাণ হইয়াছে যে, কছট কোণ ছজচ কোণের সমান ;
অতএব কছট কোণ ছটঘ কোণের সমান ; [স্বতঃ ১।
এবং এই দুইটী একান্তর কোণ ;
সুতরাং কখ ও গঘ পরস্পর সমান্তর। [১ম, ২৭।
অতএব যে যে সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৩৭। কখগঘ সমান্তরিকের পরস্পর সম্মুখীন খগ ও কঘ বাহু দ্বয় ঙ ও চ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি করিয়া ঘচকে গঙর সমান করিলে ও ঙচ সংযুক্ত করিয়া দিলে, কখঙচ একটী সমান্তরিক হইবে।

৩১ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার সমান্তর এক সরল রেখা টানিতে হইবে।

ক যেন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু ও খগ নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা; ক বিন্দু দিয়া খগ সরল রেখার সমান্তর এক সরল রেখা টানিতে হইবে।

খগ রেখাতে ঘ বিন্দু কল্পনা করিয়া কঘ সংযুক্ত কর। কঘ রেখার ক বিন্দুতে কঘগ কোণের সমান ঘকঙ কোণ কর ; [১ম, ২৩।

এবং ঙক রেখাকে চ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর ;
ঙচ সরল রেখা খগএর সমান্তর হইবে।

ঙচ ও খগ দুই সরল রেখার উপর কঘ সরল রেখার সম্পাতে, ঙকঘ ও কঘগ একান্তর কোণ দ্বয় পরস্পর সমান হইয়াছে বলিয়া, [অঙ্কন।
ঙচ সরল রেখা খগএর সমান্তর। [১ম, ২৭।
অতএব নির্দ্দিষ্ট ক বিন্দু দিয়া নির্দ্দিষ্ট খগ সরল রেখার সমান্তর ঙকচ সরল রেখা টানা হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—৩৮। একই শীর্ষকোণ বিশিষ্ট কতিপয় ত্রিভুজের ভূমি যদি কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়, তবে যাহার ভূমি ঐ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইয়াছে, সেই ত্রিভুজ সর্ব্বাপেক্ষা ক্ষুদ্রতম হইবে।

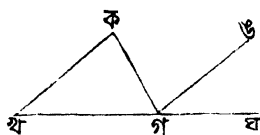
৩৯। কোন নির্দ্দিষ্ট সীমাবিশিষ্ট সরল রেখাকে সমান তিন অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

৩২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

ত্রিভুজের কোন বাহু বর্দ্ধিত করিলে বহিস্থ কোণ অন্তরস্থ দূরবর্ত্তী কোণ দ্বয়ের সমান হইবে এবং প্রত্যেক ত্রিভুজের অন্তরস্থ তিন কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হইবে।

কখগ ত্রিভুজের খগ বাহু যেন ঘ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত হইয়াছে ; তাহা হইলে বহিস্থ কগঘ কোণ অন্তরস্থ দূরবর্ত্তী গকখ ও কখগ কোণ দ্বয়ের সমান হইবে এবং ত্রিভুজের

অন্তরস্থ **কখগ**, **খগক** ও **গকখ** কোণ ত্রয় একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হইবে।

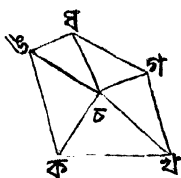
গ বিন্দু দিয়া **খক**এর সমান্তর **গঙ** সরল রেখা টান। [১ম, ৩১।

খক সরল রেখা **গঙ**র সমান্তর বলিয়া, এবং তাহাদের উপর **কগ** সরল রেখার সম্পাত হওয়াতে, **খকগ** ও **কগঙ** একান্তর কোণ দ্বয় পরস্পর সমান। [১ম, ২৯।

আবার **খক** ও **গঙ** সরল রেখা পরস্পর সমান্তর বলিয়া, ও তাহাদের উপর **খঘ** রেখার সম্পাত হওয়াতে, বহিস্থ **ঙগঘ** কোণ অন্তরস্থ দূরবর্ত্তী **কখগ** কোণের সমান; [১ম, ২৯।
আর **কগঙ** কোণ যে **খকগ** কোণের সমান, তাহা প্রতিপন্ন হইয়াছে;
অতএব সমস্ত বহিস্থ **কগঘ** কোণ অন্তরস্থ দূরবর্ত্তী **গকখ** ও **কখগ** কোণ দ্বয়ের সমান। [স্বতঃ ২।

এই দুই সমান বস্তুতে **কগখ** কোণ যোগ করিলে, **কগঘ** ও **কগখ** কোণ একত্র যোগে **কখগ**, **খগক** ও **গকখ** এই তিন কোণের সমান হইবে; [স্বতঃ ২।
আর **কগঘ** ও **কগখ** এই দুই কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান; [১ম, ১৩।
সুতরাং **কখগ**, **খগক** ও **গকখ** এই তিন কোণও দুই সম কোণের সমান। [স্বতঃ ১।

অতএব ত্রিভুজের কোন ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

১ অনুমান। কোন সরল রৈখিক ক্ষেত্রের অন্তরস্থ যাবতীয় কোণ ও চারি সম কোণ একত্র যোগে, ঐ ক্ষেত্রের বাহু সংখ্যার দ্বিগুণ সম কোণের সমান হইবে।

কখগঘঙ সরল রৈখিক ক্ষেত্রের অভ্যন্তরে চ বিন্দু কল্পনা করিয়া ইহার সহিত প্রত্যেক কৌণিক বিন্দু সরল রেখা দ্বারা সংযুক্ত করিয়া দিলে, ঐ ক্ষেত্রটী যতগুলি ভুজ বিশিষ্ট, তত গুলি ত্রিভুজে বিভক্ত হইবে;

পরে, ত্রিভুজের তিনটী কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হয় বলিয়া, এবং সরল রৈখিক ক্ষেত্র যতগুলি ভুজ বিশিষ্ট উহা ততগুলি ত্রিভুজে বিভক্ত হওয়াতে, ত্রিভুজ গুলির কোণ সমষ্টি, সরল রৈখিক ক্ষেত্রের যত ভুজ আছে, তাহার দ্বিগুণ সংখ্যক সম কোণের সমান হইবে;

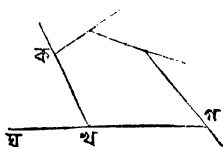
আর ত্রিভুজ গুলির সাধারণ শৃঙ্গ চ বিন্দুস্থ সমস্ত কোণ অর্থাৎ চারি সম কোণ ও সরল রৈখিক ক্ষেত্রের কোণ সকল একত্র যোগে ত্রিভুজ সমূহের কোণ সমষ্টির সমান হইবে; [১ম, ১৫, অনু ২।

সুতরাং ত্রিভুজ গুলির সমস্ত কোণ, সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমস্ত কোণ ও চারি সম কোণের সমান;

পুনশ্চ, সপ্রমাণ হইয়াছে যে, ত্রিভুজ গুলির কোণ

সকল, সরল রৈখিক ক্ষেত্রের যত ভুজ আছে, তাহার দ্বিগুণ সংখ্যক সম কোণের সমান ;
অতএব সরল রৈখিক ক্ষেত্রের যাবতীয় কোণ ও চারি সম কোণ একত্র যোগে, সরল রৈখিক ক্ষেত্রের যত গুলি ভুজ আছে, তাহার দ্বিগুণ সংখ্যক সম কোণের সমান।

২ অনুমান। কোন সরল রৈখিক ক্ষেত্রের প্রত্যেক ভুজকে এক রূপে এক দিকে বৃদ্ধি করিলে, যে সকল বহিস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তাহারা একত্র যোগে চারি সম কোণের সমান হইবে।

অন্তরস্থ কখগ কোণ ও সন্নিহিত বহিস্থ কখঘ কোণ একত্র যোগে, দুই সম কোণের সমান বলিয়া, [১ম, ১৩। এবং এই রূপে প্রত্যেক অন্তরস্থ ও সন্নিহিত বহিস্থ কোণ দুই সম কোণের সমান হওয়াতে,
সমস্ত অন্তরস্থ ও সমস্ত বহিস্থ কোণ একত্র যোগে, সরল রৈখিক ক্ষেত্রের যত গুলি ভুজ আছে, তাহার দ্বিগুণ সংখ্যক সম কোণের সমান হইবে ;
আর পূর্ব্ববর্ত্তী অনুমানে সপ্রমাণ হইয়াছে যে, সমস্ত অন্তরস্থ কোণ গুলি ও চারি সম কোণ একত্র যোগে, ক্ষেত্রের যত গুলি ভুজ আছে, তাহার দ্বিগুণ সংখ্যক সম কোণের সমান ;
অতএব সমস্ত অন্তরস্থ কোণ ও সমস্ত বহিস্থ কোণ একত্র

যোগে, সমস্ত অন্তরস্থ কোণ ও চারি সম কোণের সমান ; এই দুই সমান বস্তু হইতে সমস্ত অন্তরস্থ কোণ বিয়োগ করিলে, বহিস্থ কোণ সকল চারি সম কোণের সমান হইবে। [স্বতঃ ৩।

অঃ প্রঃ—৪০। ত্রিভুজের শৃঙ্গ ও ভূমির মধ্য বিন্দু সংযোজক রেখা ভূমির অর্দ্ধেকের সমান হইলে, শৃঙ্গস্থ কোণ সম কোণ, অর্দ্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে সূক্ষ্ম কোণ ও ক্ষুদ্রতর হইলে স্থূল কোণ হইবে।

৪১। কোন পঞ্চভুজের ভুজ গুলিকে উভয় পার্শ্বে বর্দ্ধিত করিলে, তাহারা সংলগ্ন হইয়া যে যে কোণ উৎপন্ন করিবে, তাহাদের সমষ্টি দুই সম কোণের সমান হইবে।

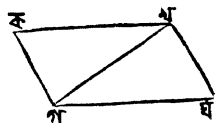
৪২। ষড় ভুজের ভুজ গুলিকে উভয় পার্শ্বে বর্দ্ধিত করিলে, তাহারা সংলগ্ন হইয়া যে যে কোণ উৎপন্ন করিবে, তাহাদের সমষ্টি চারি সম কোণের সমান হইবে।

৩৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই সমান ও সমান্তর সরল রেখার এক এক দিকের দুইটী প্রান্ত যে দুই সরল রেখা দ্বারা সংযুক্ত হয়, তাহারাও পরস্পর সমান ও সমান্তর হইবে।

কখ ও গঘ যেন দুই সমান ও সমান্তর সরল রেখা এবং তাহারা যেন এক এক দিকে কগ ও খঘ সরল রেখা দ্বারা সংযুক্ত হইয়াছে ; তাহা হইলে কগ এবং খঘও সমান ও সমান্তর হইবে।

খগ সংযুক্ত কর।

পরে, কখ সরল রেখা গঘএর সমান্তর বলিয়া, [কল্পনা।
এবং খগ ইহাদের সহিত সংলগ্ন হওয়াতে,

কখগ ও খগঘ একান্তর কোণ দ্বয় পরস্পর সমান; [১ম, ২৯।
আর কখ, গঘএর সমান বলিয়া, [কল্পনা।
এবং খগ সরল রেখা কখগ ও ঘগখ ত্রিভুজ দ্বয়ের সাধারণ বাহু হওয়াতে,
কখ ও খগ বাহু ক্রমে ঘগ ও গখ বাহুর সমান;
এবং সপ্রমাণ হইয়াছে যে, কখগ কোণ ঘগখ কোণের সমান;
অতএব কগ ভূমি ঘখ ভূমির সমান এবং কখগ ত্রিভুজ ঘগখ ত্রিভুজের সমান, আর সমান সমান বাহুর সম্মুখীন কোণ গুলি যথাক্রমে পরস্পর সমান; [১ম, ৪।
এই হেতু খগক কোণ গখঘ কোণের সমান।
আবার কগ ও খঘএর উপর গখ সরল রেখার সম্পাতে কগখ ও গখঘ একান্তর কোণ দ্বয় পরস্পর সমান হইয়াছে বলিয়া, কগ সরল রেখা খঘএর সমান্তর; [১ম, ২৭।
আর পূর্ব্বে সপ্রমাণ হইয়াছে যে ইহারা সমান।
অতএব দুই সমান ও সমান্তর ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

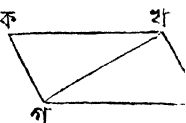
অঃ প্রঃ—৪৩। কোন ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্য বিন্দু দ্বয় সংযুক্ত করিলে, যোজক রেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তর ও তাহার অর্দ্ধেকের সমান হইবে।

৩৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সমান্তরিকের সম্মুখীন বাহু ও কোণ পরস্পর সমান হইয়া থাকে এবং তাহার কর্ণ রেখা তাহাকে দ্বিখং অর্থাৎ দুই সমান ভাগে বিভক্ত করে।

কগঘখ যেন এক সমান্তরিক ও খগ তাহার একটি কর্ণ; এই ক্ষেত্রের সম্মুখীন বাহু ও কোণ পরস্পর সমা হইবে এবং খগ কর্ণ, ক্ষেত্রকে দ্বিখণ্ড করিবে।

কখ, গঘএর সমান্তর হওয়াতে, ও খগ ইহাদের সহিত সংলগ্ন হইয়াছে বলিয়া,

কখগ ও খগঘ একান্তর কোণ দ্ব পরস্পর সমান; [১ম, ২৯,

আর, কগ সরল রেখা খঘএর সমান্তর হওয়াতে, ও খ ইহাদের সহিত সংলগ্ন হইয়াছে বলিয়া, কগখ ও গখ একান্তর কোণ দ্বয় পরস্পর সমান; [১ম, ২৯

অতএব কখগ ও ঘগখ এই দুই ত্রিভুজের একের কখগ খগক কোণ দ্বয়, যথা ক্রমে অন্যের ঘগখ ও গখঘ কো দ্বয়ের সমান এবং সমান সমান কোণের সন্নিহিত খ রেখা উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু;

এই হেতু অপর বাহু গুলি যথাক্রমে সমান এবং এ তৃতীয় কোণ অন্যের তৃতীয় কোণের সমান; অর্থ কখ বাহু ঘগ বাহুর, কগ বাহু ঘখ বাহুর এবং খ কোণ গঘখ কোণের সমান। [১ম, ২

আবার কখগ কোণ খগঘ কোণের এবং গখঘ কোণ কগখ কোণের সমান বলিয়া, সমস্ত কখঘ কোণ সমস্ত কগঘ কোণের সমান ; [স্বতঃ ২।

এবং খকগ কোণ যে গঘখ কোণের সমান, তাহা প্রতিপন্ন হইয়াছে ;

সুতরাং সমান্তরিকের সম্মুখীন বাহু ও কোণ পরস্পর সমান।

অনন্তর, কর্ণ রেখা ক্ষেত্রকে দ্বিখণ্ড করিবে।

কখ বাহু গঘএর সমান এবং খগ সাধারণ বাহু বলিয়া,

কখ ও খগ বাহু ক্রমে ঘগ ও গখ বাহুর সমান ;

এবং কখগ কোণ যে ঘগখ কোণের সমান, তাহা সপ্রমাণ হইয়াছে ;

এই হেতু কখগ ত্রিভুজ ঘগখ ত্রিভুজের সমান ; [১ম, ৪।

সুতরাং খগ কর্ণ রেখা কগঘখ সমান্তরিককে দুই সমান ভাগে বিভক্ত করিয়াছে।

অতএব সমান্তরিকের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৪৪। সমান্তরিকের কর্ণ দ্বয় পরস্পরকে দ্বিখণ্ড করে আর যে চতুর্ভুজের কর্ণ দ্বয় পরস্পরকে দ্বিখণ্ড করে, তাহা সমান্তরিক।

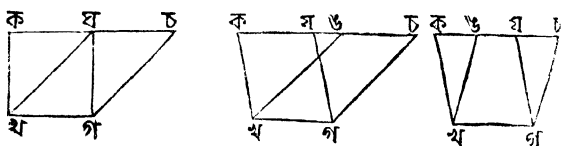
৪৫। সম কোণী সমান্তরিকের কর্ণ দ্বয় পরস্পর সমান এবং বিষম কোণী সমান্তরিকের সূক্ষ্ম কোণ দ্বয় সংযোজক কর্ণ রেখা অপর কর্ণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

৪৬। কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে কতিপয় সমান ভাগে বিভক্ত করিতে হইবে।

৪৭। কোন সমান্তরিকের একটী বাহু স্থিত কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে এক সরল রেখা টানিয়া সমান্তরিককে দ্বিখণ্ড করিতে হইবে।

৩৫ প্রতিজ্ঞা — উপপাদ্য।

যে সকল সমান্তরিক এক ভূমির উপর ও একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে থাকে, তাহারা পরস্পর সমান।

কখগঘ ও ঙখগচ সমান্তরিক দ্বয় যেন একই খগ ভূমির উপর এবং কচ ও খগ একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইয়াছে; কখগঘ সমান্তরিক ঙখগচ সমান্তরিকের সমান হইবে।

যদি কখগঘ ও ঘখগচ সমান্তরিক দ্বয়ের খগ ভূমির সম্মুখীন কঘ ও ঘচ বাহু দ্বয়ের এক এক প্রান্ত একই ঘ বিন্দুতে থাকে, তবে স্পষ্টই বোধ হইতেছে যে, প্রত্যেক সমান্তরিক ঘখগ ত্রিভুজের দ্বিগুণ; [১ম, ৩৪।

সুতরাং তাহারা পরস্পর সমান। [স্বতঃ ৬।

কিন্তু যদি কখগঘ ও ঙখগচ সমান্তরিক দ্বয়ের খগ ভূমির সম্মুখীন কঘ ও ঙচ বাহু দ্বয়ের এক এক প্রান্ত একই বিন্দুতে না থাকে, তবে কখগঘ ক্ষেত্রটী সমান্তরিক হওয়াতে, কঘ সরল রেখা খগএর সমান; [১ম, ৩৪।

এই কারণে, ঙচ সরল রেখা খগএর সমান ;
অতএব কঘ সরল রেখা ঙচএর সমান ; [স্বতঃ ১।
এই হেতু সমস্ত বা অবশিষ্ট কঙ, সমস্ত বা অবশিষ্ট ঘচএর সমান ; [স্বতঃ ২ অথবা ৩।
আর কখ বাহু ঘগ বাহুর সমান ; [১ম, ৩৪।
অতএব ঙক ও কখ এই দুই বাহু যথাক্রমে চঘ ও ঘগ এই দুই বাহুর সমান ;
এবং বহিস্থ চঘগ কোণ অন্তরস্থ দূরবর্ত্তী ঙকখ কোণের সমান ; [১ম, ২৯।
এই হেতু ঙখ ভূমি চগ ভূমির এবং ঙকখ ত্রিভুজ চঘগ ত্রিভুজের সমান। [১ম, ৪।
কখগচ বিষম চতুর্ভুজ হইতে চঘগ ত্রিভুজ এবং ঐ বিষম চতুর্ভুজ হইতে ঙকখ ত্রিভুজ বিয়োগ কর ; তাহা হইলে অবশিষ্ট ক্ষেত্র গুলি সমান হইবে ; [স্বতঃ ৩।
অর্থাৎ কখগঘ সমান্তরিক ঙখগচ সমান্তরিকের সমান হইবে।
অতএব যে সকল সমান্তরিক ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৪৮। সমান সমান সমান্তরিক একই ভূমির উপর এক দিকে থাকিলে একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে থাকিবে।

৪৯। কখগ ত্রিভুজের কখ ও কগ বাহুর উপর কখঘঙ ও কগচছ সমান্তরিক অঙ্কিত কর এবং ঘঙ ও চছকে বর্দ্ধিত করিয়া জ বিন্দুতে মিলাইয়া দাও ; তাহা হইলে কখ ও কঘএর উপর অঙ্কিত সমান্তরিক দ্বয়ের সমষ্টি খগ ভূমির ও কজএর অন্তর্গত সমান্তরিকের সমান হইবে।

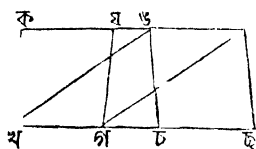
৩৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যে সকল সমান্তরিক সমান সমান ভূমির উপর ও একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে থাকে তাহারা পরস্পর সমান।

কখগঘ ও ঙচছজ সমান্তরিক দ্বয় যেন খগ ও চছ সমান সমান ভূমির উপর এবং কজ ও খছ একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইয়াছে; কখগঘ সমান্তরিক ঙচছজ সমান্তরিকের সমান হইবে।

খঙ ও গজ সংযুক্ত কর।

পরে, খগ ভূমি চছএর সমান বলিয়া, [কল্পনা।

এবং চছ, ঙজএর সমান হওয়াতে, [১ম, ৩৪।

খগ, ঙজএর সমান; [স্বতঃ ১।

এবং ইহারা পরস্পর সমান্তর, [কল্পনা।

ও তাহাদের এক এক পার্শ্বের দুইটী প্রান্ত খঙ ও গজ সরল রেখা দ্বারা সংযুক্ত হইয়াছে;

আর সমান ও সমান্তর সরল রেখা দ্বয়ের এক এক পার্শ্বের দুইটী প্রান্ত যে দুই সরল রেখা দ্বারা সংযুক্ত হয়, তাহারাও পরস্পর সমান ও সমান্তর হইয়া থাকে। [১ম, ৩৩।

এই হেতু খঙ ও গজ সরল রেখা দ্বয় সমান ও সমান্তর;

অতএব খঙজগ একটী সমান্তরিক; [সং, ক।

এবং ইহা কখগঘ সমান্তরিকের সমান, কেননা উভয়

একই খগ ভূমির উপর এবং একই খগ ও কজ সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত। [১ম, ৩৫।

এইরূপে সপ্রমাণ হইবে যে, ঙচছজ সমান্তরিক ঙখগজ সমান্তরিকের সমান;

সুতরাং কখগঘ সমান্তরিক ঙচছজ সমান্তরিকের সমান হইল। [স্বতঃ ১।

অতএব যে সকল সামন্তরিক ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৫০। কখগঘ একটী বিষম চতুর্ভুজের কঘ ও খগ বাহু দ্বয় সমান্তর; প্রমাণ কর যে, কঘ ও খগএর সমষ্টির অর্দ্ধেক পরিমিত ভূমি বিশিষ্ট একটী সমান্তরিক কঘ ও খগ সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে স্থাপিত হইলে, তাহা বিষম চতুর্ভুজের সমান হইবে।

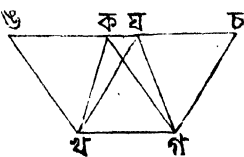
৩৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যে সকল ত্রিভূজ এক ভূমির উপর ও একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে থাকে, তাহারা পরস্পর সমান।

কখগ ও ঘখগ ত্রিভুজ দ্বয় যেন একই খগ ভূমির উপর এবং একই কঘ ও খগ সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইয়াছে; কখগ ত্রিভূজ ঘখগ ত্রিভুজের সমান হইবে।

কঘ সরল রেখার উভয় পার্শ্ব ঙ ও চ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর; [স্বীঃ ২।

খ বিন্দু দিয়া গক সরল

ঙ ক ঘ চ
খ গ

রেখার সমান্তর খণ্ড এবং গ বিন্দু দিয়া খঘএর সমান্তর গচ সরল রেখা টান। [১ম, ৩১।

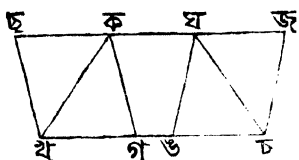
পরে, ঙখগক ও ঘখগচ প্রত্যেক ক্ষেত্র সমান্তরিক হওয়াতে, ও তাহারা একই খগ ভুমির উপর এবং একই খগ ও ঙচ সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইয়াছে বলিয়া, পরস্পর সমান; [১ম, ৩৫।
আর কখ কর্ণ রেখা ঙখগক সমান্তরিককে দ্বিখণ্ড করি-তেছে বলিয়া, [১ম, ৩৪।
কখগ ত্রিভুজ ঙখগক সামন্তরিকের অর্দ্ধেক;
এবং ঘগ কর্ণ রেখা ঘখগচ সমান্তরিককে দ্বিখণ্ড করি-তেছে বলিয়া, [১ম, ৩৪।
ঘখগ ত্রিভুজ ঘখগচ সমান্তরিকের অর্দ্ধেক;
আবার যে সকল বস্তু প্রত্যেকে কোন এক বস্তুর অৰ্দ্ধ তাহারা পরস্পর সমান; [স্বতঃ ৭।
সুতরাং কখগ ত্রিভুজ ঘখগ ত্রিভুজের সমান।
অতএব যে সকল ত্রিভুজ ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৫১। কোন বিষম চতুর্ভুজের সমান এক ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

৩৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যে সকল ত্রিভুজ সমান সমান ভুমির উপর ও একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে থাকে, তাহারা পরস্পর সমান।

কখগ ও **ঘঙচ** ত্রিভুজ দ্বয় যেন সমান সমান **খগ** ও **ঙচ** ভূমির উপর এবং একই **খচ** ও **কঘ** সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইয়াছে; **কখগ** ত্রিভুজ **ঘঙচ** ত্রিভুজের সমান হইবে।

কঘ সরল রেখাকে উভয় পার্শ্বে **ছ** ও **জ** পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর; **খ** বিন্দু দিয়া **গক**এর সমান্তর **খছ** রেখা এবং **চ** বিন্দু দিয়া **ঙঘ**এর সমান্তর **চজ** রেখা টান। [১ম, ৩১।

পরে, **ছখগক** ও **ঘঙচজ** প্রত্যেক ক্ষেত্র সমান্তরিক হওয়াতে, [সং, ক।

আর সমান সমান **খগ** ও **ঙচ** ভূমির উপর এবং একই **খচ** ও **ছজ** সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইয়াছে বলিয়া, পরস্পর সমান, [১ম, ৩৬।

এবং **কখ** কর্ণ রেখা **ছখগক** সমান্তরিককে দ্বিখণ্ড করিতেছে বলিয়া, [১ম, ৩৪।

কখগ ত্রিভুজ **ছখগক** সমান্তরিকের অর্দ্ধেক;

এবং **ঘচ** কর্ণ রেখা **ঘঙচজ** সমান্তরিককে দ্বিখণ্ড করিতেছে বলিয়া, [১ম, ৩৪।

ঘঙচ ত্রিভুজ **ঘঙচজ** সমান্তরিকের অর্দ্ধেক;

আর যে সকল বস্তু প্রত্যেকে কোন এক বস্তুর অর্দ্ধ তাহারা পরস্পর সমান; [স্বতঃ ৭।

সুতরাং **কখগ** ত্রিভুজ **ঘঙচ** ত্রিভুজের সমান।

অতএব যে সকল ত্রিভুজ ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৫২। কোন ত্রিভুজের এক বাহুস্থিত কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে একটী রেখা টানিয়া ত্রিভুজটীকে দ্বিখণ্ড করিতে হইবে।

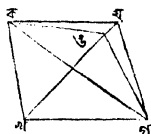
৫৩। কখগঘ সমান্তরিকের ক ও গ কৌণিক বিন্দু হইতে খঘ কর্ণস্থিত কোন নির্দিষ্ট ঙ বিন্দু পর্য্যন্ত কঙ ও গঙ দুই সরল রেখা টানিলে, কঘঙ ত্রিভুজ গঘঙ ত্রিভুজের সমান হইবে।

৩৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সমান সমান ত্রিভুজ এক ভূমির এক দিকে থাকিলে, একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইবে।

কখগ ও **ঘখগ** এই দুই সমান ত্রিভুজ যেন **খগ** ভূমির এক দিকে অবস্থিত হইয়াছে; ইহারা একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে থাকিবে।

কঘ সংযুক্ত কর।

কঘ, খগএর সমান্তর হইবে।

যদি সমান্তর না হয়, তবে ক বিন্দু দিয়া **খগ**এর সমান্তর কঙ রেখা টান, [১ম, ৩১ এবং ঙগ সংযুক্ত কর।

পরে, **খগ** ভূমির উপর এবং একই **খগ** ও **কঙ** সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে **কখগ** ও **ঙখগ** ত্রিভুজ দ্বয় থাকাতে, ইহারা পরস্পর সমান; [১ম, ৩৭।

আবার কখগ ত্রিভুজ ঘখগ ত্রিভুজের সমান; [কল্পনা।
অতএব ঘখগ ত্রিভুজ ঙখগ ত্রিভুজের সমান, [স্বতঃ ১।
অর্থাৎ বৃহত্তর ক্ষুদ্রতরের সমান;
কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব;
অতএব কঙ সরল রেখা খগএর সমান্তর নহে।
এই রূপে সপ্রমাণ হইবে যে, কঘ ব্যতীত অন্য কোন রেখা ক বিন্দু দিয়া টানিলে, তাহা খগএর সমান্তর হইবে না;
সুতরাং কঘ সরল রেখা খগএর সমান্তর।
অতএব সমান সমান ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৫৪। কখগঘ বিষম চতুর্ভুজের কগ ও খঘ কর্ণ দ্বয় পরস্পর ঙ বিন্দুতে ছেদ করিলে, যদি কঙঘ ত্রিভুজ গঙঘ ত্রিভুজের সমান হয়, তবে কখ বাহু ঘগ বাহুর সমান্তর হইবে।

৫৫। কোন বিষম চতুর্ভুজের প্রত্যেক বাহু দ্বিখণ্ড করিয়া পরস্পর নিকটবর্ত্তী দুইটী দুইটী মধ্য বিন্দু সংযুক্ত করিলে, তদ্দ্বারা যে চতুর্ভুজ উৎপন্ন হইবে, তাহা সমান্তরিক ও বিষম চতুর্ভুজের অর্দ্ধেক।

৪০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সমান সমান ত্রিভুজ এক রেখাস্থ সমান সমান ভূমির এক দিকে থাকিলে, একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইবে।

কখগ ও ঘঙচ দুই সমান ত্রিভুজ এক রেখাস্থ সমান সমান খগ ও ঙচ ভূমির এক দিকে অবস্থিত হইয়াছে; ইহারা একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে থাকিবে।

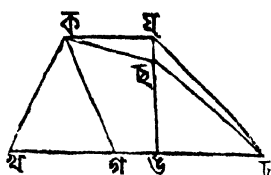
কঘ সংযুক্ত কর।

কঘ, খচএর সমান্তর হইবে।

যদি সমান্তর না হয়,

তবে ক বিন্দু দিয়া খচএর

সমান্তর কছ রেখা টান [১ম, ৩১।

এবং ছচ সংযুক্ত কর।

পরে, কখগ ও ছঙচ ত্রিভুজ সমান সমান খগ ও ঙচ ভূমির উপর এবং একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হওয়াতে, পরস্পর সমান ; [১ম, ৩৮।

আর কখগ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান ; [কল্পনা।

অতএব ঘঙচ ত্রিভুজ ছঙচ ত্রিভুজের সমান। [স্বতঃ ১।

অর্থাৎ বৃহত্তর ক্ষুদ্রতরের সমান ;

কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব ;

অতএব কছ, খচএর সমান্তর নহে।

এই রূপে সপ্রমাণ হইবে যে কঘ ব্যতীত অন্য কোন সরল রেখা ক বিন্দু দিয়া টানিলে খচএর সমান্তর হইবে না;

সুতরাং কঘ, খচএর সমান্তর।

অতএব সমান সমান ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৫৩। সমান সমান ত্রিভুজ একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে থাকিলে, সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত হইবে।

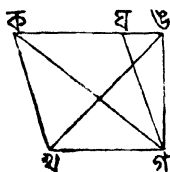
৪১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

একটী সমান্তরিক ও একটী ত্রিভুজ এক ভূমির উপর ও একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে থাকিলে, সমান্তর রৈখিক ক্ষেত্রটী ত্রিভুজের দ্বিগুণ হইবে।

কখগঘ সমান্তরিক ও ঙখগ ত্রিভুজ যেন একই খগ ভূমির উপর এবং একই খগ ও কঙ সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইয়াছে; কখগঘ সমান্তরিক ঙখগ ত্রিভুজের দ্বিগুণ হইবে।

কগ সংযুক্ত কর।

পরে, কখগ ও ঙখগ ত্রিভুজ একই খগ ভূমির উপর এবং একই খগ ও কঙ সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হওয়াতে, পরস্পর সমান হইয়াছে; [১ম, ৩৭।

আর কগ কর্ণ কখগঘ সমান্তর রৈখিক ক্ষেত্রকে দ্বিখণ্ড করাতে, [১ম, ৩৪।

কখগঘ সমান্তরিক কখগ ত্রিভুজের দ্বিগুণ;

সুতরাং কখগঘ সমান্তরিক ঙখগ ত্রিভুজেরও দ্বিগুণ;

অতএব একটী সমান্তরিক ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৫৭। কোন সমান্তরিকের অভ্যন্তরীণ কোন বিন্দু হইতে চারিটী কৌণিক বিন্দু পর্য্যন্ত চারি রেখা টানিলে সম্মুখীন বাহু দ্বয়ের উপর যে দুইটী ত্রিভুজ অঙ্কিত হয়, তাহারা একত্র যোগে সমান্তরিকের অর্দ্ধেক হইবে।

৪২ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ও কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণের সমান একটী কোণ বিশিষ্ট এক সমান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখগ যেন নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজ ও ঘ নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণ; কখগ ত্রিভুজের সমান এবং ঘ কোণের সমান একটী কোণ বিশিষ্ট, এক সমান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে।

খগকে ঙ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর; [১ম, ১০।
কঙ সংযুক্ত কর এবং ঙগ সরল রেখার ঙ বিন্দুতে নির্দ্দিষ্ট ঘ কোণের সমান গঙচ কোণ কর; [১ম, ২৩।
ক বিন্দু দিয়া খগএর সমান্তর কচছ এবং গ বিন্দু দিয়া ঙচএর সমান্তর গছ সরল রেখা টান; [১ম, ৩১।
অতএব চঙগছ একটী সমান্তরিক। [সং ক

পরে, খঙ ভূমি ঙগএর সমান হওয়াতে,
কখঙ ত্রিভুজ কঙগ ত্রিভুজের সমান, কেননা, ইহারা সমান সমান খঙ ও ঙগ ভূমির উপর এবং একই খগ ও কছ সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত; [১ম, ৩৮
এই হেতু কখগ ত্রিভুজ কঙগ ত্রিভুজের দ্বিগুণ;
আর চঙগছ সমান্তরিকও কঙগ ত্রিভুজের দ্বিগুণ, কেননা

তাহারা একই ঙগ ভূমির উপর এবং একই ঙগ ও কছ সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত। [১ম, ৪১।

সুতরাং চঙগছ সমান্তর রৈখিক ক্ষেত্র কখগ ত্রিভুজের সমান; [স্বতঃ ২।

এবং ইহার একটী গঙচ কোণ ঘ কোণের সমান। [অঙ্কন।

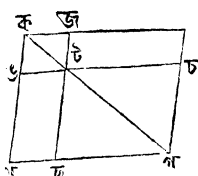
অতএব কখগ ত্রিভুজের সমান ও ঘ কোণের সমান একটী কোণ বিশিষ্ট চঙগছ সমান্তরিক অঙ্কিত হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—৫৮। এক নির্দ্দিষ্ট সমান্তরিকের সমান ও কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণের সমান একটী কোণ বিশিষ্ট, এক ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

৪৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যে সকল ক্ষেত্র কোন সমান্তরিকের অভ্যন্তরীণ ও কর্ণের পরিতঃস্থ, তাহাদের অনুপূরক ক্ষেত্র গুলি পরস্পর সমান।

কখগঘ যেন কোন সমান্তরিক ও কগ ইহার কর্ণ; ঙজ ও ছচ, কর্ণের পরিতঃস্থ সমান্তরিক অর্থাৎ এই দুই ক্ষেত্রের অভ্যন্তর ভেদ করিয়া কগ কর্ণ যাইতেছে এবং খট ও টঘ অন্য দুই সমান্তরিক; এই দুইটী সমস্ত কখগঘ ক্ষেত্রের অবশিষ্ট অংশ পুর্ণ করিতেছে; এজন্য ইহাদিগকে অনুপূরক ক্ষেত্র বলে; খট অনুপূরক ক্ষেত্র টঘ অনুপূরক ক্ষেত্রের সমান হইবে।

কখগঘ একটী সমান্তর রৈখিক ক্ষেত্র ও কগ ইহার কর্ণ বলিয়া, কখগ ত্রিভুজ কঘগ ত্রিভুজের সমান। [১ম, ৩৪।

আর কঙটজ একটী সমান্তরিক ও কট ইহার কর্ণ বলিয়া, কঙট ত্রিভুজ কজট ত্রিভুজের সমান। [১ম, ৩৪।

এই রূপে টছগ ত্রিভুজ টচগ ত্রিভুজের সমান;

অতএব কঙট ত্রিভুজ কজট ত্রিভুজের এবং টছগ ত্রিভুজ টচগ ত্রিভুজের সমান হওয়াতে, কঙট ও টছগ ত্রিভুজ-দ্বয়ের যোগ ফল কজট ও টচগ ত্রিভুজ দ্বয়ের যোগফলের সমান; [স্বতঃ ২।

আর সমস্ত কখগ ত্রিভুজ সমস্ত কঘগ ত্রিভুজের সমান;

সুতরাং অবশিষ্ট খট অনুপূরক ক্ষেত্র অবশিষ্ট টঘ অনুপূরক ক্ষেত্রের সমান। [স্বতঃ ৩।

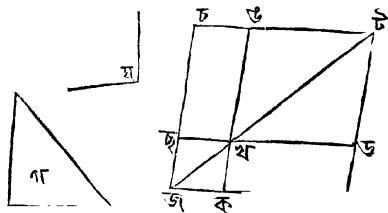
অতএব যে সকল ক্ষেত্র ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৫৯। প্রথম অধ্যায়ের ৪৩ প্রতিজ্ঞার চিত্রে ঙজ, খঘ ও ছচ সংযুক্ত করিলে, এই তিনটী কর্ণ পরস্পর সমান্তর হইবে।

৪৪ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ও কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণের সমান এক কোণ বিশিষ্ট একটী

সমান্তরিক, কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর স্থাপন করিতে হইবে।

কখ যেন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা, গ নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজ এবং ঘ নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণ ; গ ত্রিভুজের সমান ও ঘ কোণের সমান একটী কোণ বিশিষ্ট এক সমান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে।

গ ত্রিভুজের সমান ও ঘ কোণের সমান এক কোণ বিশিষ্ট খঙচছ সমান্তরিক এরূপে অঙ্কিত কর, যেন খঙ ও কখ একই রেখা হয় ; [১ম, ৪২।

চছ বাহুকে জ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর ;

ক বিন্দু দিয়া খছ বা ঙচএর সমান্তর কজ সরল রেখা টান ; [১ম, ৩১।

এবং জখ সংযুক্ত কর।

. পরে, জক ও চঙ সমান্তর রেখা দ্বয়ের উপর জচ রেখার পাত হওয়াতে,

ঙচজ ও চজক কোণ দ্বয় একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান ; [১ম, ২৯।

অতএব খজচ ও জচঙ কোণ দ্বয় একত্রযোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর;

আর কোন দুই সরল রেখার সহিত অন্য এক সরল রেখার সম্পাত হইলে, তাহার এক দিকের দুই অন্তরস্থ কোণ যদি একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্র হয়, তবে যে দিকের দুইটী কোণ সমষ্টি দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্র, সেই দিকে এই দুই রেখাকে উত্তরোত্তর বৃদ্ধি করিলে, অবশেষে তাহারা সংলগ্ন হইবে। [স্বতঃ ১২।

এই হেতু জখ ও চঙ এই দুই সরল রেখাকে বৃদ্ধি করিলে সংলগ্ন হইবে;

ইহারা যেন ট বিন্দুতে সংলগ্ন হইল।

ট বিন্দু দিয়া ঙক বা চজ সরল রেখার সমান্তর টঠ সরল রেখা টান: [১ম, ৩১।

এবং জক ও ছখকে ঠ ও ড পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর;

তাহা হইলে জঠটচ একটী সমান্তরিক, জট ইহার কর্ণ, কছ ও ডঙ কর্ণের পরিতঃস্থ সমান্তরিক আর ঠখ ও খচ দুইটী অনুপূরক ক্ষেত্র হইবে;

অতএব ঠখ, খচএর সমান; [১ম, ৪৩।

আর খচ ক্ষেত্র গ ত্রিভুজের সমান; [অঙ্কন।

এই হেতু ঠখ ক্ষেত্রও গ ত্রিভুজের সমান। [স্বতঃ ১।

আবার ছখঙ কোণ তাহার প্রতীপ কখড কোণের সমান হওয়াতে, [১ম, ১৫।

এবং ঘ কোণের সমান বলিয়া, [অঙ্কন।

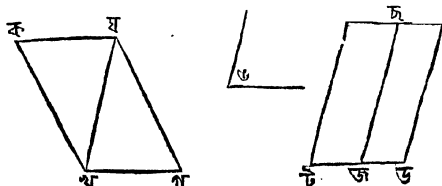
কখড কোণও ঘ কোণের সমান। [স্বতঃ ১।

অতএব গ ত্রিভুজের সমান এবং ঘ কোণের সমান একটী কোণ বিশিষ্ট ঠখ সমান্তরিক, কখ রেখার উপর অঙ্কিত হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—৬০। এক নির্দ্দিষ্ট সমান্তরিকের সমান ও নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণের সমান একটী কোণ বিশিষ্ট এক ত্রিভুজ, কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর অঙ্কিত করিতে হইবে।

৪৫ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমান এবং কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণের সমান একটী কোণ বিশিষ্ট এক সমান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখগঘ যেন নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্র এবং ঙ নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণ; কখগঘ ক্ষেত্রের সমান এবং ঙ কোণের সমান একটী কোণ বিশিষ্ট এক সমান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে।

খঘ সংযুক্ত কর, এবং কঘখ ত্রিভুজের সমান চজ সমান্তরিক এরূপে অঙ্কিত কর, যেন চটজ কোণ ঙ কোণের সমান হয়; [১ম, ৪২।

আর ছজ রেখার উপর ঘখগ ত্রিভুজের সমান ছড় সমান্তরিক এরূপে অঙ্কিত কর যেন ছজড কোণ ঙ কোণের সমান হয়। [১ম, ৪৪।

চটডঠ ক্ষেত্র সম্পাদ্য সমান্তরিক।

চটজ ও ছজড কোণ দ্বয় প্রত্যেকে ঙ কোণের সমান হওয়াতে, [অঙ্কন।

ইহারাও পরস্পর সমান। [স্বতঃ ১।

এই দুই সমান বস্তুতে টজছ কোণ যোগ করিলে,

চটজ ও টজছ কোণ দ্বয় একত্র যোগে টজছ ও ছজড কোণ দ্বয়ের সমান হইবে; [স্বতঃ ২।

ইহাদের মধ্যে চটজ ও টজছ কোণ দ্বয় একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান; [১ম, ২৯।

অতএব টজছ এবং ছজড কোণ দ্বয়ও একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান;

আর ছজ সরল রেখার জ বিন্দুতে পরস্পর বিপরীত দিকে টজ ও ডজ সংলগ্ন হইয়া সন্নিহিত কোণ দ্বয়কে দুই সম কোণের সমান করিতেছে বলিয়া, টজ ও ডজ একই সরল রেখা হইবে। [১ম, ১৪।

আবার, টড ও চছ সমান্তর রেখা দ্বয়ের সহিত জছ সরল রেখা সংলগ্ন হওয়াতে, ডজছ ও জছচ একান্তর কোণ দ্বয় পরস্পর সমান; [১ম, ২৯।

এই দুই সমান বস্তুতে জছঠ কোণ যোগ করিলে,

ডজছ ও জছঠ কোণ দ্বয় চছজ ও জছঠ কোণ দ্বয়ের সমান; [স্বতঃ ২।

ইহাদের মধ্যে ডজছ ও জছঠ কোণ দ্বয় একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান ; [১ম, ২৯।
অতএব চছজ ও জছঠ এই দুই কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান ;
এই হেতু চছ ও ছঠ একই সরল রেখা। [১ম, ১৪।

আবার, টচ রেখা জছএর এবং জছ রেখা ডঠএর সমান্তর বলিয়া,
টচ রেখা ডঠএর সমান্তর ; [১ম, ৩০।
এবং চঠ ও টড পরস্পর সমান্তর সপ্রমাণ হইয়াছে ;
এই হেতু চটডঠ ক্ষেত্র একটী সমান্তরিক ; [সংজ্ঞা, ক
আর কঘখ ত্রিভুজ চজ ক্ষেত্রের সমান বলিয়া, [অঙ্কন।
এবং ঘখগ ত্রিভুজ ছড ক্ষেত্রের সমান হওয়াতে, [অঙ্কন।
সমস্ত কখগঘ সরল রৈখিক ক্ষেত্র সমস্ত চটডঠ সমান্তরিকের সমান। [স্বতঃ ২।
অতএব কখগঘ সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমান এবং ঙ কোণের সমান চটড কোণ বিশিষ্ট চটডঠ সমান্তরিক অঙ্কিত হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অনুমান। এক নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমান এবং কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণের সমান একটী কোণ বিশিষ্ট এক সমান্তরিক, কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর কি রূপে স্থাপন করা যায়, তাহা মূল প্রতিজ্ঞা হইতে সহজেই বোধ হইবে ; প্রথমত, নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর কখঘ ত্রিভুজের সমান ও নির্দ্দিষ্ট কোণের সমান কোণ বিশিষ্ট এক সমান্তরিক স্থাপন করিয়া

পূর্ব্ব রূপ চিত্র অঙ্কিত করিলেই ইহা সিদ্ধ হইবে।

[১ম, ৪৪।

অঃ প্রঃ—৬১। কোন নির্দ্দিষ্ট চতুর্ভুজের সমান একটী রম্বস অঙ্কিত করিতে হইবে।

৪৬ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর এক সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখ যেন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা; কখএর উপর এক সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

ক বিন্দু হইতে কখএর সহিত সম কোণ করিয়া কগ সরল রেখা টান; [১ম, ১১।
এবং কগ হইতে কখএর সমান কঘ অংশ ছেদ কর; ১ম, ৩।
ঘ বিন্দু দিয়া কখএর সমান্তর ঘঙ রেখা এবং খ বিন্দু দিয়া কঘএর সমান্তর খঙ রেখা টান। [১ম, ৩১।
কঘঙখ সম্পাদ্য সমচতুর্ভুজ।

গ
ঘ ঙ
ক খ

কঘঙখ ক্ষেত্র একটী সমান্তরিক হওয়াতে, [অঙ্কন।
কখ, ঘঙর এবং কঘ, খঙর সমান; [১ম, ৩৪।
আর কখ, কঘএর সমান; [অঙ্কন।
অতএব খক, কঘ, ঘঙ ও ঙখ এই চারি সরল রেখা পরস্পর সমান; [স্বতঃ ১।

সুতরাং কঘঙখ সমান্তরিকটী সমবাহু।
আর এই ক্ষেত্রের কোণ গুলি প্রত্যেকে সম কোণ;
কেননা, কখ ও ঘঙ সমান্তর রেখা দ্বয়ের সহিত কঘ রেখার সম্পাত হওয়াতে, খকঘ ও কঘঙ কোণ দ্বয় একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান; [১ম, ২৯।
ইহাদের মধ্যে খকঘ এক সম কোণ; [অঙ্কন।
এই হেতু কঘঙ কোণও এক সম কোণ; [স্বতঃ ৩।
আর সমান্তরিকের সম্মুখীন কোণ পরস্পর সমান হইয়া থাকে বলিয়া, [১ম, ৩৪।
কখঙ ও খঙঘ প্রত্যেকে সম কোণ;
অতএব কঘঙখ ক্ষেত্র সমকোণী;
এবং ইহা যে সমবাহু, তাহা সপ্রমাণ হইয়াছে।
অতএব ইহা একটী সমচতুর্ভুজ; [সং ৩০।
এবং কখ নির্দ্দিষ্ট রেখার উপর অঙ্কিত হইয়াছে। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অনুমান। এই প্রতিজ্ঞার উপপত্তি হইতে সহজেই বোধ হইবে যে, কোন সমান্তরিকের একটী কোণ সম কোণ হইলে অবশিষ্ট কোণ গুলিও প্রত্যেকে সম কোণ হইবে।

অঃ প্রঃ—৬২। কোন নির্দ্দিষ্ট সমচতুর্ভুজের চতুর্গুণ আর এক সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

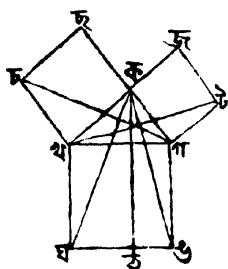
৪৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সমকোণী ত্রিভুজের সম কোণের সম্মুখীন বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ, সম কোণের পার্শ্বস্থ দুই বাহুর উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজের সমান।

কখগ সমকোণী ত্রিভুজের খকগ কোণ যেন সম কোণ; খগ বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ খক ও কগ বাহু দ্বয়ের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

খগএর উপর খঘঙগ সমচতুর্ভুজ এবং খক ও কগএর উপর খছ ও গজ সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত কর; [১ম, ৪৬।

ক বিন্দু দিয়া খঘ বা গঙর সমান্তর কঠ রেখা টান; [১ম, ৩১।

এবং কঘ ও গচ সংযুক্ত কর।

পরে, খকগ কোণ সম কোণ হওয়াতে, [কল্পনা।

এবং খকছ কোণও সম কোণ বলিয়া, [সং ৩০।

কখএর ক বিন্দুতে পরস্পর বিপরীত দিকে, কছ ও কগ সরল রেখা দ্বয় সংলগ্ন হইয়া যে দুই সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন করিয়াছে, তাহারা দুই সম কোণের সমান;

অতএব কছ ও কগ এই দুইটী একই সরল রেখা; [১ম, ১৪।

এই কারণে কখ ও কজ এই দুইটীও এক সরল রেখা।

এক্ষণে, ঘখগ কোণ কখচ কোণের সমান; কেননা

উভয়েই সম কোণ; [স্বতঃ ১১।
প্রত্যেকের সহিত কখগ কোণ যোগ করিলে,
সমস্ত ঘখক কোণ, সমস্ত চখগ কোণের সমান; [স্বতঃ ২।
আর কখ ও খঘ এই দুই বাহু যথাক্রমে চখ ও খগ দুই বাহুর সমান বলিয়া, [সং ৩০।
এবং ঘখক কোণ গখচ কোণের সমান হওয়াতে,
কঘ ভূমি চগ ভূমির সমান এবং কখঘ ত্রিভুজ চখগ ত্রিভুজের সমান। [১ম, ৪।

আবার খঠ সমান্তরিক কখঘ ত্রিভুজের দ্বিগুণ; কেননা ইহারা একই খঘ ভূমির উপর এবং একই খঘ ও কঠ সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইয়াছে; [১ম, ৪১।
এবং খছ সমচতুর্ভুজ চখগ ত্রিভুজের দ্বিগুণ; কেননা, ইহারা একই চখ ভূমির উপর এবং একই চখ ও ছগ সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইয়াছে;
আর যে সকল বস্তু সমান সমান বস্তুর দ্বিগুণ তাহারা পরস্পর সমান; [স্বতঃ ৬।
এই হেতু খঠ সমান্তরিক খছ সমচতুর্ভুজের সমান।

এই রূপে, কঙ ও খট সংযুক্ত করিলে সপ্রমাণ হইবে যে, গঠ সমান্তরিক গজ সমচতুর্ভুজের সমান।

অতএব সমস্ত খঘঙগ সমচতুর্ভুজ ছখ ও জগ এই দুই সমচতুর্ভুজের সমান; [স্বতঃ ২।
এবং খঘঙগ সমচতুর্ভুজ খগ রেখার উপর আর ছখ ও জগ সমচতুর্ভুজ দ্বয়, খক ও কগ বাহু দ্বয়ের উপর অঙ্কিত হইয়াছে।

সুতরাং খগ বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ, খক ও কগ বাহু দ্বয়ের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান। অতএব সমকোণী ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।*

অঃ প্রঃ—৬৩। কতিপয় সমচতুর্ভুজের সমান একটী সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

৬৪। কোন ত্রিভুজের শৃঙ্গ হইতে ভূমির উপর লম্ব পাত করিলে, ভূমির দুই খণ্ডের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের অন্তর, অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের অন্তরের সমান হইবে।

৬৫। কখগ সমকোণী ত্রিভুজের যদি ক কোণ সম কোণ হয় এবং খ ও গ বিন্দু হইতে খঙ ও গচ রেখা সম্মুখীন বাহু দ্বয়ের মধ্য বিন্দু পর্য্যন্ত টানা যায়, তবে ৪(খঙ^২ + গচ^২) = ৫খগ^২।

৬৬। রম্বসের চারি বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ চতুষ্টয়, কর্ণ দ্বয়ের উপর অঙ্কিত দুইটী সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

৬৭। কোন সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্ম কোণের সম্মুখীন বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ সূক্ষ্ম কোণের পার্শ্বস্থ দুই বাহুর উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ অপেক্ষা ক্ষুদ্র হইবে।

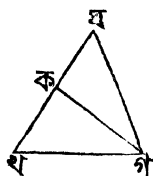
৬৮। কোন স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূল কোণের সম্মুখীন বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ, স্থূল কোণের পার্শ্বস্থ দুই বাহুর উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ অপেক্ষা বৃহৎ হইবে।

* সমকোণী ত্রিভুজের তিন বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ গুলি ছয় প্রকারে স্থাপন করা যায়; অতএব এই প্রতিজ্ঞার উপপত্তিও অন্তত ছয় প্রকারে সম্পন্ন হইতে পারে। (পরিশিষ্ট দেখ।)

৪৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন ত্রিভুজের এক বাহুর উপর অঙ্কিত সম চতুর্ভুজ যদি অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত সম চতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান হয়, তবে এই দুই বাহুর অন্তর্গত কোণ সম কোণ হইবে।

কখগ ত্রিভুজের খগ বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ যেন খক ও কগ বাহু দ্বয়ের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজের সমান; খকগ কোণ সম কোণ হইবে।

ক বিন্দু হইতে কগএর সহিত সম কোণ করিয়া কঘ রেখা টান, [১ম, ১১।
কঘকে কখএর সমান কর; [১ম, ৩।
এবং ঘগ সংযুক্ত কর।

পরে ঘক সরল রেখা খকএর সমান হওয়াতে,
ঘকএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ খকএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান;
এই দুই সমান বস্তুতে কগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ যোগ করিলে,
ঘক ও কগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয়, খক ও কগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান হইবে; [স্বতঃ ২।
আর ঘকগ সম কোণ হওয়াতে,
ঘগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ ঘক ও কগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান, [১ম, ৪৭।

এবং কল্পিত হইয়াছে যে, খগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ খক ও কগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান ;

এই হেতু ঘগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ খগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান ;

অতএব ঘগ বাহু খগ বাহুর সমান।

আবার ঘক বাহু কখ বাহুর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন।

এবং কগ বাহু ঘকগ ও খকগ দুই ত্রিভুজের সামান্য বাহু বলিয়া,

ঘক ও কগ বাহু দ্বয় ক্রমে খক ও কগ বাহু দ্বয়ের সমান

আর ঘগ ভূমি খগ ভূমির সমান সপ্রমাণ হইয়াছে ;

অতএব ঘকগ কোণ খকগ কোণের সমান। [১ম, ৮।

ইহাদের মধ্যে ঘকগ এক সম কোণ ; [অঙ্কন।

সুতরাং খকগও এক সম কোণ।

অতএব কোন ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৬৯। কখগ ত্রিভুজের যদি খগ বাহু কখএর দ্বিগুণ হয় ও কগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ কখএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের ত্রিগুণ হয়, তবে খকগ সম কোণ হইবে।

৭০। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির দুই প্রান্ত হইতে দুই বাহুর উপর লম্ব টানিলে, ইহাদের প্রত্যেকে ভূমির সহিত যে কোণ উৎপন্ন করিবে, তাহা শীর্ষ কোণের অর্দ্ধেক হইবে।

৭১। কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার দুই দিকে দুইটী বিন্দু নির্দ্দিষ্ট আছে; এই রেখার যে কোন বিন্দু হইতে ঐ দুইটী বিন্দু পর্য্যন্ত দুই সরল রেখা টানিলে, যদি তাহারা সমান হয়, তবে প্রথমোক্ত দুই বিন্দু সংযোজক রেখা, নির্দ্দিষ্ট রেখা দ্বারা লম্ব-ভাবে দ্বিখণ্ডিত হইবে।

৭২। বহিস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার সহিত এক নির্দ্দিষ্ট কোণ করিয়া একটী রেখা টানিতে হইবে।

৭৩। কোন ত্রিভুজের দুইটী বাহু ও তাহাদের মধ্যে একটীর সম্মুখীন কোণ নির্দ্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজটী অঙ্কিত কর এবং প্রতিপন্ন কর যে, এরূপ ত্রিভুজ একটী বা দুইটী অঙ্কিত হইবে অথবা প্রকার ভেদে, তদ্রূপ ত্রিভুজ অঙ্কিত করা অসাধ্য হইবে।

৭৪। কোন নির্দ্দিষ্ট রেখার এক দিকে দুইটী বিন্দু নির্দ্দিষ্ট আছে; এই দুই বিন্দু হইতে এমন দুই রেখা টানিতে হইবে, যেন তাহারা নির্দ্দিষ্ট রেখার একই বিন্দুতে সংলগ্ন হইয়া তাহার সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে।

৭৫। কোন সমচতুর্ভুজের কর্ণ নির্দ্দিষ্ট আছে; সমচতুর্ভুজটী অঙ্কিত কর।

৭৬। কোন চতুর্ভুজের কর্ণ দ্বয়ের সমষ্টি, তাহাদের ছেদ বিন্দু ব্যতীত অন্য কোন বিন্দু হইতে ক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দু গুলি পর্য্যন্ত অঙ্কিত চারি রেখার সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

৭৭। কোন বৃত্তের কেন্দ্র নির্দ্দিষ্ট আছে; কম্পাস দ্বারা পরিধিস্থ বিপরীত দুই বিন্দু স্থির কর।

৭৮। কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে নির্দ্দিষ্ট পরিমাণ বিশিষ্ট তিন সরল রেখা এরূপে টানিতে হইবে, যেন তাহাদের অপর প্রান্ত গুলি এক সরল রেখাতে থাকে ও এই রেখা যে দুই খণ্ডে বিভক্ত হইবে, তাহারা পরস্পর সমান হয়।

৭৯। কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এমন এক সরল রেখা

টানিতে হইবে, যেন অন্য দুই নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে তাহার উপর লম্ব টানিলে, সেই দুই লম্ব পরস্পর সমান হয়।

৮০। কোন ত্রিভুজের পরিমিতি ও ভূমিস্থ দুই কোণ নির্দ্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজটী অঙ্কিত কর।

৮১। যে তিন সরল রেখা কোন ত্রিভুজের বাহু গুলিকে লম্বভাবে দ্বিখণ্ড করে, তাহারা একই বিন্দুতে মিলিত হইবে।

৮২। যে তিন সরল রেখা কোন ত্রিভুজের কোণ গুলিকে দ্বিখণ্ড করে, তাহারা একই বিন্দুতে মিলিত হইবে।

৮৩। কোন ত্রিভুজের দুই বাহু বর্দ্ধিত করিলে, বহিস্থ দুই কোণ দ্বিখণ্ড কারক রেখা দ্বয় ও তৃতীয় অন্তরস্থ কোণ দ্বিখণ্ড কারক রেখা, একই বিন্দুতে মিলিত হইবে।

৮৪। কোন বিষম চতুর্ভুজের সম্মুখীন দুই বাহু সমান্তর হইলে, অপর দুই বাহুর দুইটী মধ্য বিন্দু সংযোজক রেখা সমান্তর দুই বাহুর সমষ্টির অর্দ্ধেক হইবে।

৮৫। যে সমান্তরিকের কর্ণ দ্বয় পরস্পর সমান, তাহা আয়ত ক্ষেত্র।

৮৬। কোন নির্দ্দিষ্ট সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইতে এমন এক বিষম চতুর্ভুজ ছেদ কর, যাহার দুইটী বাহু সমান্তর হইবে, ভূমি ত্রিভুজের ভূমির সহিত সমান হইয়া মিলিয়া যাইবে এবং অপর তিন বাহু পরস্পর সমান হইবে।

৮৭। কোন পুস্তকের এক পত্রের একটী কোণ এরূপে উপর্য্যুপরি দুই বার ভাঁজা গেল, যে ভাঁজ গুলি পরস্পর সমান্তর ও তদ্দ্বারা উৎপন্ন দুই ক্ষেত্রের, অর্থাৎ ত্রিভুজ এবং চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের উন্নতি পরস্পর সমান হইল; প্রমাণ কর যে দ্বিতীয় ও প্রথম বারের ভাঁজের দ্বারা যে স্থান পরিবদ্ধ হইল তাহা প্রথম ভাঁজের দ্বারা পরিবদ্ধ স্থানের তিন গুণ।

৮৮। যে চতুর্ভুজের কর্ণ দ্বয় পরস্পর দ্বিখণ্ড করে, তাহা একটী সমান্তরিক।

৮৯। পরস্পর অবনত, কিন্তু সংলগ্ন নহে, এমন দুই সরল রেখার মধ্যবর্ত্তী কল্পিত কোণকে দ্বিখণ্ড করে, এরূপ এক সরল রেখা টান।

৯০। কখগ ত্রিভুজের খগ ভূমির সমান্তর, এমন এক (ঘঙ) রেখা টানিতে হইবে, যেন তাহা খঘ ও গঙর সমষ্টির সমান হয়।

৯১। কখগ ত্রিভুজের কগ ভূমির সমান্তর এমন এক (ঘঙ) রেখা টানিতে হইবে, যেন তাহা খঘ ও গঙর অন্তরের সমান হয়।

৯২। যদি কখ রেখাকে গ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড করিয়া ক, খ, গ বিন্দু দিয়া সমান্তর তিনটী রেখা টানা যায় আর ইহারা অন্য কোন নির্দ্দিষ্ট রেখাকে ক্রমে ঘ, ঙ ও চ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে ক ও খ বিন্দু নির্দ্দিষ্ট রেখার এক দিকে থাকিলে, গচ রেখা কঘ ও খঙর সমষ্টির অর্দ্ধেকের সমান হইবে আর ভিন্ন দিকে থাকিলে, তাহাদের অন্তরের অর্দ্ধেকের সমান হইবে।

৯৩। দুই নির্দ্দিষ্ট রেখার মধ্যবর্ত্তী স্থানে অবস্থিত কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এরূপে এক রেখা টানিতে হইবে, যেন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু ও প্রত্যেক রেখার মধ্যস্থিত খণ্ড দ্বয় পরস্পর সমান হয়।

৯৪। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির সহিত সমান সমান কোণ করিয়া যদি ভূমির প্রান্ত হইতে একটী ও ভূমির অন্য কোন বিন্দু হইতে আর দুইটী সরল রেখা ত্রিভুজের বাহু পর্য্যন্ত টানা যায়, তবে প্রথম রেখাটী অন্য দুইটীর সমষ্টির সমান হইবে।

৯৫। কখগঘ কোন সমান্তরিক; ক বিন্দু হইতে কোন সরল রেখা টানিলে, যদি তাহা ক্ষেত্রের অভ্যন্তর দিয়া যায়, তবে গ হইতে তাহার দূরত্ব খ ও ঘ হইতে দূরত্বের অন্তরের সমান হইবে; যদি বাহিরে থাকে, তবে উহাদের সমষ্টির সমান হইবে।

৯৬। এক নির্দ্দিষ্ট কোণের বহিস্থ কোন বিন্দু হইতে এমন এক সরল রেখা টানিতে হইবে, যাহার বহিস্থ অংশ কোণের মধ্যস্থ অংশের সমান হয়।

৯৭। কোন সমচতুর্ভুজের কর্ণ বর্দ্ধিত করিয়া বর্দ্ধিত অংশে এমন এক বিন্দু স্থির কর, যাহা হইতে সমচতুর্ভুজের এক বাহুর সমান্তর এক রেখা টানিলে ও তাহাকে ক্ষেত্রের আর একটী বর্দ্ধিত বাহুর সহিত মিলাইয়া দিলে, এই রেখা, বর্দ্ধিত বাহু ও বর্দ্ধিত কর্ণ দ্বারা যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে, তাহা যেন সমচতুর্ভুজের সমান হয়।

৯৮। ইউক্লিডের প্রথম অধ্যায়ের পঞ্চম প্রতিজ্ঞার চিত্রে যদি খছ ও চগ পরস্পর জ বিন্দুতে ছেদ করে আর যদি চখছ কোণ কখগ কোণের সমান হয়, তবে খজচ কোণ খকগ কোণের দ্বিগুণ হইবে।

৯৯। ইউক্লিডের প্রথম অধ্যায়ের প্রথম প্রতিজ্ঞার চিত্রে যদি বর্দ্ধিত গক ও গখ বৃত্ত দ্বয়ের পরিধির সহিত ঘ ও ঙ বিন্দুতে সংলগ্ন হয় এবং বৃত্ত দ্বয়ের অপর ছেদ বিন্দু চ হয়, তাহা হইলে ঘচ ও ঙচ একই সরল রেখা হইবে।

১০০। এক সমকোণকে সমান তিন কোণে বিভক্ত করিতে হইবে।

১০১। কোন সমকোণী ত্রিভুজের দুইটী সূক্ষ্ম কোণের মধ্যে একটী অন্যের তিন গুণ; ক্ষুদ্রতরটীকে তিন সমান কোণে বিভক্ত কর।

১০২। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি বর্দ্ধিত করিলে, দ্বিগুণিত বহিস্থ কোণ, দুই সম কোণ ও ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ কোণের সমষ্টির সমান হইবে।

১০৩। একটী সমদ্বিবাহু ও একটী সমবাহু ত্রিভুজ একই ভূমির উপর স্থাপিত হইলে, যদি অভ্যন্তরীণ ত্রিভুজের শৃঙ্গ অপরের শৃঙ্গ ও ভূমির দুই প্রান্ত হইতে সমদূরবর্ত্তী হয়, তবে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শৃঙ্গ অন্তরস্থ হইলে, ভূমি সংলগ্ন কোণ শীর্ষ কোণের এক চতুর্থাংশ ও বহিস্থ হইলে, সার্দ্ধ দ্বিগুণ হইবে।

১০৪। কোন সমবাহু ত্রিভুজকে সমান নয়টী ত্রিভুজে বিভক্ত করিতে হইবে।

১০৫। কোন ত্রিভুজের শৃঙ্গ হইতে যদি ভূমি দ্বিখণ্ড কারক ও শীর্ষ কোণ দ্বিখণ্ড কারক দুইটী সরল রেখা টানা যায়, তবে ইহাদের অন্তর্গত কোণ ভূমি সংলগ্ন দুই কোণের অন্তরের অর্দ্ধেক হইবে।

১০৬। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের খগ ভূমিতে ঘ বিন্দু কল্পনা করিয়া, গক হইতে গঘএর সমান গঙ ছেদ কর এবং ঙঘ সংযোজক রেখাকে বৃদ্ধি করিয়া বর্দ্ধিত কখএর সহিত চ

বিন্দুতে মিলাইয়া দাও; তাহা হইলে ত্রিগুণিত কঙচ কোণ, চারি সম কোণ ও কচঙ কোণের সমষ্টির সমান হইবে।

১০৭। কোন বহুভুজের একান্তর বাহু গুলি বর্দ্ধিত করিলে, তাহারা সংলগ্ন হইয়া যে সকল কোণ উৎপন্ন করিবে, তাহাদের সমষ্টি ও আটটী সম কোণ একত্র যোগে বহুভুজের বাহু গুলির দ্বিগুণ সংখ্যক সম কোণের সমান হইবে।

১০৮। যদি কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিস্থ কোণ শীর্ষ কোণের একচতুর্থাংশ হয় এবং ভূমির এক প্রান্ত হইতে তাহার সহিত সম কোণ করিয়া একটী রেখা টানা যায় ও ইহাকে বর্দ্ধিত সম্মুখীন বাহুর সহিত মিলাইয়া দেওয়া যায়, তবে এই বাহুর বর্দ্ধিত অংশ, লম্ব রেখা ও নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের অপর বাহু দ্বারা এক সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে।

১০৯। কখগ ত্রিভুজের ক সম কোণ এবং খ কোণ গ কোণের দ্বিগুণ; প্রমাণ কর যে, গখ বাহু কখ বাহুর দ্বিগুণ।

১১০। যদি কোন চতুর্ভুজের সম্মুখীন বাহু গুলি বা সম্মুখীন কোণ গুলি পরস্পর সমান হয়, তবে ক্ষেত্রটী সমান্তরিক হইবে।

১১১। যদি কোন চতুর্ভুজের চারি কোণ হইতে সমান সমান দূরে চারি বাহুতে চারিটী বিন্দু কল্পনা করা যায়, তবে তাহাদের সংযোজক রেখা চতুষ্টয়ের দ্বারা একটী সমচতুর্ভুজ হইবে।

১১২। কোন সমান্তরিকের সম্মুখীন দুই বাহুর মধ্য বিন্দু দ্বয় হইতে পরস্পর সম্মুখীন কোণ দ্বয় পর্য্যন্ত দুইটী রেখা টানিলে, কর্ণ রেখা ইহাদের দ্বারা সমান তিন ভাগে বিভক্ত হইবে।

১১৩। কোন ত্রিভুজের শৃঙ্গ হইতে ভূমির উপর লম্ব নির্দ্দিষ্ট আছে এবং লম্বের দ্বারা ভূমি যে দুই খণ্ডে বিভক্ত হইয়াছে, তাহাদের প্রত্যেকের ও তৎসংলগ্ন বাহুর অন্তরও জানা আছে ত্রিভুজটী অঙ্কিত কর।

১১৪। কোন সমান্তরিকের চারি কোণ দ্বিখণ্ড কারক রেখা দ্বারা একটী সমকোণী সমান্তরিক উৎপন্ন হইবে আর ইহার কর্ণ দ্বয় নির্দ্দিষ্ট সমান্তরিকের বাহু গুলির সমান্তর হইবে।

১১৫। এক নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের অভ্যন্তরে এমন এক রেখা স্থাপন কর, যাহার দুই প্রান্ত দুই বাহুতে সংলগ্ন হইবে ও

যাহা একটী নির্দ্দিষ্ট রেখার সমান ও আর একটী নির্দ্দিষ্ট রেখার সমান্তর হইবে।

১১৬। কোন সমান্তরিকের কর্ণের মধ্য বিন্দু দিয়া দুই বাহু পর্য্যন্ত কোন একটী রেখা টানিলে, তাহা ঐ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইবে ও সমান্তরিককে দুই সমান ভাগে বিভক্ত করিবে।

১১৭। সমকোণী ত্রিভুজের কর্ণের মধ্য বিন্দু, ত্রিভুজের তিন কোণ হইতে সমদূরবর্ত্তী।

১১৮। যদি কোন সম কোণী ত্রিভুজের সম কোণ হইতে ভূমির উপর একটী রেখা লম্ব ভাবে ও আর একটী ভূমিকে দ্বিখণ্ড করিয়া টানা যায়, তবে এই দুই রেখার অন্তর্গত কোণ, ভূমি সংলগ্ন দুই কোণের অন্তরের সমান হইবে।

১১৯। কোন ত্রিভুজের ভূমিতে এমন এক বিন্দু স্থির কর, যাহা হইতে বাহু দুইটী পর্য্যন্ত দুই বাহুর সমান্তর দুই রেখা টানিলে, তাহারা পরস্পর সমান হইবে।

১২০। কোন নির্দ্দিষ্ট ভূমির উপর এক নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান এক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

১২১। প্রতিপন্ন কর যে, কোন নির্দ্দিষ্ট ভূমির উপর যত গুলি সমান সমান ত্রিভুজ অঙ্কিত করা যাইতে পারে, তন্মধ্যে যেটী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, তাহার পরিমিতি সর্ব্বাপেক্ষা ক্ষুদ্র।

১২২। একই ভূমি ও একই পরিমিতি বিশিষ্ট ত্রিভুজ সকলের মধ্যে যেটী সমদ্বিবাহু, তাহা সর্ব্বাপেক্ষা বৃহৎ।

১২৩। যদি কোন ত্রিভুজের একটী কোণ সম কোণ এবং আর একটী সম কোণের দুই তৃতীয়াংশ হয়, তবে কর্ণের উপর অঙ্কিত সমবাহু ত্রিভুজ অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত দুই সম বাহু ত্রিভুজের সমান হইবে।

১২৪। কখগ ত্রিভুজ এবং ইহার কখ বাহুস্থিত ঘ বিন্দু নির্দ্দিষ্ট আছে; সাধারণ ক কোণ বিশিষ্ট কখগ ত্রিভুজের সমান কঘঙ ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

১২৫। নির্দ্দিষ্ট উন্নতি বিশিষ্ট কোন নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান এক ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

১২৬। কখগঘ চতুর্ভুজের খঘ কর্ণের মধ্য বিন্দু ও দিয়া

কগএর সমান্তর চঙছ রেখা টানিয়া প্রতিপন্ন কর যে, কছ সরল রেখা ক্ষেত্রকে দ্বিখণ্ড করিবে।

১২৭। কখগঘ ক্ষেত্রে কগ ও খঘ দুই গাছ জরীপের শিকল স্থাপন করিয়া দেখা গেল যে, ইহারা গঘএর সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করিতেছে এবং কগ শৃঙ্খল কঘএর সহিত যে কোণ উৎপন্ন করিতেছে, খঘ শৃঙ্খলও খগএর সহিত তত্তুল্য কোণ উৎপন্ন করিতেছে; প্রমাণ কর যে, কখ ও গঘ পরস্পর সমান্তর।

১২৮। কোন ত্রিভুজের তিন বাহুর মধ্য বিন্দু গুলি হইতে সম্মুখীন কৌণিক বিন্দু পর্য্যন্ত তিন সরল রেখা টানিলে, তাহারা একই বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিবে ও ত্রিভুজকে তিন সমান অংশে বিভক্ত করিবে।

১২৯। প্রতিপন্ন কর যে, এক শত আটাশের অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞার উল্লিখিত তিন রেখা, সাধারণ ছেদ বিন্দুতে এরূপে বিভক্ত হইয়াছে যে, প্রত্যেকের এক এক অংশ অন্যান্য অংশের দ্বিগুণ।

১৩০। দুই বাহু নির্দ্দিষ্ট থাকিলে যদি তাহাদের অন্তর্গত কোণ সম কোণ হয়, তবে যে ত্রিভুজটী অঙ্কিত হইবে, তাহা অপর কোন কোণ ও ঐ দুইটী বাহু বিশিষ্ট ত্রিভুজ অপেক্ষা বৃহৎ।

১৩১। যদি দুইটী সমান্তর বাহু বিশিষ্ট কোন বিষম চতুর্ভুজের অন্য এক বাহুর দুই প্রান্ত হইতে সম্মুখীন বাহুর মধ্য বিন্দু পর্য্যন্ত দুইটী রেখা টানা যায়, তবে প্রথমোক্ত বাহু ও ঐ দুই রেখা দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজ, বিষম চতুর্ভুজের অর্দ্ধেক হইবে।

১৩২। যদি কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির দুই প্রান্ত হইতে দুই বাহুর উপর লম্ব টানা যায়, তবে ইহাদের ছেদ বিন্দু ও শৃঙ্গ সংযোজক রেখাকে বর্দ্ধিত করিলে, উহা ভূমিকে লম্ব ভাবে দ্বিখণ্ড করিবে।

১৩৩। ইউক্লিডের প্রথম অধ্যায়ের ৪৭ প্রতিজ্ঞার চিত্রে প্রমাণ কর যে, ছখ ও জগ সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের চক ও কট কর্ণ একই রেখাস্থ হইবে।

১৩৪। উক্ত চিত্রে ঘচ ও ঙট সংযুক্ত করিলে চখঘ ও টগঙ ত্রিভুজ দ্বয়ের ভূমিস্থ কোণ গুলির সমষ্টি, এক সম কোণের সমান হইবে।

১৩৫। উক্ত চিত্রে খছ ও গজ সংযুক্ত করিলে, তাহারা পরস্পর সমান্তর হইবে।

১৩৬। উক্ত চিত্রে চ ও ট বিন্দু হইতে যদি বর্দ্ধিত খগএর উপর লম্ব টানা যায়, তবে খগএর বর্দ্ধিত অংশ দ্বয় পরস্পর সমান হইবে এবং দুইটী লম্বের সমষ্টি খগএর সমান হইবে।

১৩৭। উক্ত চিত্রে ছজ, চঘ ও টঙ সংযুক্ত করিলে, যে তিনটী ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে, তাহারা প্রত্যেকেই কখগ ত্রিভুজের সমান হইবে।

১৩৮। উক্ত চিত্রে ছজ, চঘ, ও টঙর উপর অঙ্কিত তিনটী সমচতুর্ভুজ, কগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের ছয় গুণ হইবে

১৩৯। উক্ত চিত্রে কখ ও কগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের অন্তর, কঘ ও কঙর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের অন্তরের সমান হইবে।

১৪০। কোন ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ কোণ নির্দ্দিষ্ট আছে ও ভূমিস্থ একটী কোণ অপরের তিন গুণ; ত্রিভুজটী অঙ্কিত কর।

১৪১। কখগ ত্রিভুজের খগ ভূমিতে ঘ বিন্দু এরূপে নির্ণয় কর, যেন কখএর সমান্তর ঘঙ রেখা, কগ পর্য্যন্ত টানিলে, তাহা খঘএর সমান হয়।

১৪২। কখগ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির উপর চঙ লম্ব টানিলে, যদি তাহা কখ বাহুকে ঙ বিন্দুতে ও বর্দ্ধিত গক বাহুকে চ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে ঙচক ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু হইবে।

১৪৩। এমন একটী সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার তিন বাহুর উপর অঙ্কিত তিনটী সম চতুর্ভুজের সমষ্টি, অন্য কোন নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের তিন বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমষ্টির সমান হয়।

১৪৪। দুই নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এমন দুই সরল রেখা টানিতে হইবে, যাহারা কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার সহিত সংলগ্ন হইয়া এক সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করিবে।

১৪৫। একটী কোণ, তাহার সম্মুখীন বাহু ও অন্য দুই বাহুর সমষ্টি নির্দ্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটী অঙ্কিত করিতে হইবে।

১৪৬। কোন সমান্তরিকের কর্ণ দ্বয় ও কোণ গুলি নির্দ্দিষ্ট আছে ; সমান্তরিকটী অঙ্কিত কর।

১৪৭। এক সমান্তরিকের কোন বাহু স্থিত এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে অথবা কোন কৌণিক বিন্দু হইতে সরল রেখা টানিয়া, ক্ষেত্রটীকে তিন সমান ভাগে বিভক্ত কর।

১৪৮। একটী কর্ণের দ্বারা যদি কোন চতুর্ভুজ দ্বিখণ্ডিত হয়, তবে তাহার দ্বিতীয় কর্ণও প্রথম কর্ণের দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে।

১৪৯। কোন সমান্তরিকের এক বাহুস্থিত কোন এক বিন্দু হইতে সরল রেখা টানিয়া ক্ষেত্রটীকে চারি সমান অংশে বিভক্ত কর।

১৫০। যদি কখগ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের গ বিন্দু হইতে কখএর উপর গঘ লম্ব টানা যায়, তবে কখ^2 + খগ^2 + কগ^2 = খঘ^2 + ২ কঘ^2 + ৩ গঘ^2।

১ম অধ্যায়।

ব্যাখ্যা ও পরিশিষ্ট।

ইউক্লিড লিখিত প্রথম সাতটী সংজ্ঞা লইয়া জ্যামিতি বেত্তা ও অন্যান্য পণ্ডিত গণ অনেক বিতণ্ডা করিয়া থাকেন; ইউক্লিড বিন্দু, রেখা, সরল রেখা, সমতল প্রভৃতির যেরূপ লক্ষণ করিয়াছেন, সেই লক্ষণাক্রান্ত পদার্থ জগতে আছে কি না? যদি না থাকে ও ইউক্লিডের স্বকপোল কল্পিত হয়, তবে তাহাদিগকে মূল স্বরূপ অবলম্বন করিয়া কোন শাস্ত্র বিশেষ রচনা করিবার প্রয়োজন কি ও সেই কল্পিত শাস্ত্র পাঠেই বা বিদ্যার্থীদিগের কি লাভ হইতে পারে? এই সকল প্রশ্নের উত্তর দিতে হইলে, পুঙ্খানুপুঙ্খ রূপে বিচারের আবশ্যকতা হয়; এরূপ বিচার করিতে হইলে এক খানি স্বতন্ত্র গ্রন্থ হইয়া উঠে; এই আশঙ্কায় আমরা তাহা না করিয়া সংক্ষেপে কেবল তৎসংক্রান্ত কতকগুলি স্থূল স্থূল বিষয়ের উল্লেখ করিব।

ইউক্লিডের লিখিত বিন্দু, রেখা বা তল স্বতন্ত্র রূপে কোথাও বর্ত্তমান নাই; কিন্তু প্রাকৃতিক বা কৃত্রিম বস্তু সমুদয় পর্য্যালোচনা করিলে, তৎ সম্বন্ধে ইহাদিগের বিদ্যমানতা বোধ হইবে। জগতে যত বস্তু দৃষ্ট হয়, সকলই স্থান অবরোধ করে; এই রূপে অবরুদ্ধ বা সীমাবদ্ধ স্থানের নাম ক্ষেত্র। ক্ষেত্র দুই প্রকার;— ঘনক্ষেত্র ও সামতলিক বা পৃষ্ঠ ক্ষেত্র। এই দুইএর মধ্যে কেবল প্রথম প্রকার ক্ষেত্রের স্বতন্ত্র অবস্থিতি আছে, অন্য প্রকার ক্ষেত্রের তাহা নাই। ঘনক্ষেত্রের এক একটী পার্শ্ব এক এক পৃষ্ঠ বা তল। বিদ্যার্থীদিগের সহজেই প্রতীতি হইবে যে, ঘন ক্ষেত্র মাত্রেই তিন দিকে বিস্তৃত অর্থাৎ তাহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ আছে; এই ক্ষেত্রের বেধ পরিত্যাগ করিলে তল বা পৃষ্ঠ ক্ষেত্র হইবে। আবার পৃষ্ঠ ক্ষেত্র বা তলের প্রস্থ পরিত্যাগ করিলে রেখা হইবে।

পূর্ব্বেই উল্লিখিত হইয়াছে যে, তল এবং রেখা স্বতন্ত্র রূপে জগতে বিদ্যমান নাই; কিন্তু ঘনক্ষেত্র সম্বন্ধে ইহাদের বিদ্যমানতা অনায়াসে বোধ হয়; আবার ঘন ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং বেধ এই তিনটী গুণের এক একটীকে ক্রমে পরিত্যাগ করিয়া, প্রত্যেকটীকে স্বতন্ত্র রূপে কল্পনা করা আমাদিগের মানসিক শক্তি বিশেষের বহির্ভূত কার্য্য নহে; ফলত, আমরা প্রতি দিন প্রতি দণ্ডে ও প্রতি পলে এই রূপে প্রত্যেক বস্তুর ভিন্ন ভিন্ন গুণের স্বতন্ত্র রূপে কল্পনা করিতেছি এবং তাহা না করিলে কোন বিষয়ের বিচার করিতে বা জ্ঞানোপার্জ্জন করিতে পারি না। পুষ্প মাত্রেরই আকৃতি ও বিস্তার্য্যতা গুণ আছে এবং প্রত্যেক পুষ্পই কোন না কোন বর্ণ বিশিষ্ট। যখন আমরা উহাদের সৌরভের বিচার করি, তখন অন্যান্য গুণের উল্লেখও করি না আর পুষ্পে যে অপর গুণ বিদ্যমান আছে, তাহা আমাদের মনেও উদয় হয় কি না সন্দেহ। বস্তুত, আমরা বিশিষ্ট রূপে অবগত আছি যে, অন্যান্য গুণ বিহীন, গন্ধ মাত্র গুণোপেত, কুসুম জগতে নাই। কিন্তু পুষ্পকে অন্যান্য গুণ বর্জ্জিত, কেবল গন্ধ বিশিষ্ট পদার্থ জ্ঞান করিয়া তাহার সৌরভের বিষয় অনুসন্ধান করিলে, আমাদের উদ্দেশ্য কি সফল হয় না? আর আমরা যখন কোন বস্তুর কোন গুণ সংক্রান্ত কোন বিষয়ের বিচারে প্রবৃত্ত হই, তখন তাহার অন্যান্য গুণ পরিত্যাগ ব্যতীত কি অন্য কোন পথ অবলম্বন করি? যখন যে বিষয় বিচার করি, তখন সেইটী ব্যতীত অন্য কোন বিষয় তাহার সহিত সংশ্লিষ্ট করি না; প্রণিধান করিলে সকলেই বুঝিতে পারিবেন যে, বিচারের এইটী অদ্বিতীয় পথ। ইউক্লিড তাঁহার জ্যামিতিতে এই অনতিক্রমণীয় পথ ব্যতীত অন্য কোন পথ অবলম্বন করেন নাই; তলের কেবল দৈর্ঘ্য ও বিস্তার এবং রেখার কেবল দৈর্ঘ্য লওয়াই তাঁহার উদ্দেশ্য; এজন্য তিনি তলকে বেধ বর্জ্জিত ও রেখাকে প্রস্থ বর্জ্জিত পদার্থ বলিয়া স্বীকার করিয়াছেন। ইউক্লিডের কএকটী প্রতিজ্ঞা পাঠ করিলেই তাঁহার যে এই উদ্দেশ্য ছিল, তাহা সহজেই বোধ হইবে।

বিখ্যাত দার্শনিক ডিউগালড্ ষ্টুয়ার্ট্ সাহেব লিখিয়াছেন যে, নব্য ও অদূরদর্শী শিক্ষকেরা "ইউক্লিডের রচিত একএকটী সংজ্ঞার মর্ম্ম বিশেষরূপে বুঝাইতে চেষ্টা ও অনেক বাক্য ব্যয় করিয়া, বিদ্যার্থীদিগের মনে এই রূপ জ্ঞান জন্মাইয়া দেন যে, তিনি যে সকল অভিপ্রায় প্রকাশ করিয়াছেন, সে গুলি বোধ গম্য হইবার নহে; সুতরাং তাহারা তদ্রূপ কাল্পনিক পদার্থের প্রতিরূপ কোন মতেই মনে ধারণ করিতে পারে না। যদি সংজ্ঞা গুলির উল্লেখ না করিয়া ও তদ্বিষয়ে শিক্ষা না দিয়া, অধ্যাপক মহাশয়েরা জ্যামিতির প্রকৃত বিষয় শিক্ষা দেন, তবে ছাত্রেরা অনায়াসে বুঝিতে পারিবে যে, চিত্র গুলিতে অঙ্কিত রেখা সকল দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বিশিষ্ট হইলেও তাহাদিগকে কেবল দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট জ্ঞান করিয়া, প্রতিজ্ঞা গুলির উপপত্তি করা হইয়াছে। ভিন্ন ভিন্ন গুণ বিশিষ্ট পদার্থ সকলের বিষয় বিচার করিতে হইলে, তাহাদের এক একটী গুণ পৃথক্ করিয়া, কেবল তদ্বিষয়ের বিচার করা মনুষ্যমাত্রের মানসিক শক্তির বহির্ভূত কার্য্য নহে। নিতান্ত অজ্ঞ ব্যক্তিরাও এই রূপে বিচার করিয়া থাকে; ইহা মনুষ্যমাত্রেরই স্বাভাবিক ধর্ম্ম। যখন কোন ব্যক্তি কোন গৃহের প্রস্থের কথা প্রসঙ্গ না করিয়া, কেবল দৈর্ঘ্যের বিষয় উল্লেখ করেন কিম্বা দুই স্থানের দূরত্ব লইয়া কোন কথা বলেন, তখন তিনি যেরূপ ঐ সকল পদার্থের এক একটী গুণকে পৃথক্ করিয়া মনোমধ্যে ধারণা করেন ইউক্লিড তাঁহার দ্বিতীয় সংজ্ঞাতে অবিকল সেই রূপই করিয়াছেন; অতএব এই সংজ্ঞাটী বিদ্যার্থীদিগকে বুঝাইবার জন্য টীকাকারেরা যেরূপ বাগাড়ম্বর করিয়া থাকেন তাহা নিতান্ত অনাবশ্যক।"

যে সকল কথা উল্লিখিত হইল, তদ্দ্বারা পাঠক বৃন্দের বোধ হইয়া থাকিবে যে, ইউক্লিড লিখিত বিন্দু, রেখা বা তল স্বতন্ত্র রূপে বিদ্যমান নাই; কিন্তু ইহাদিগকে পদার্থ স্বরূপ জ্ঞান করিয়া বিচারে প্রবৃত্ত হইলে, সর্ব্ব প্রকার ক্ষেত্র সম্বন্ধে যাহা কিছু আমাদিগের জানা আবশ্যক, সকলই অবগত হইতে পারি। এতদ্ভিন্ন ইউক্লিডের জ্যামিতি পাঠে আর এক মহৎ উপকার

লাভ হয়। এই গ্রন্থ পাঠ করিলে আমাদিগের বিচার শক্তি যে রূপ প্রবল হইয়া উঠে, বোধ হয়, কোন দেশীয় কোন গ্রন্থ পাঠে সেরূপ হয় না। ইউক্লিড়ের একটী কথাও পরিত্যাগ করিবার নহে; তিনি প্রতিজ্ঞা গুলি সাধন করিবার নিমিত্ত যাহা লিখিয়াছেন ও যে প্রণালী অবলম্বন করিয়াছেন, সে সকলই নিতান্ত আবশ্যক ও অভেদ্য তর্ক পংক্তির ন্যায় গ্রথিত। কেহ কেহ বলেন যে, ন্যায়শাস্ত্রের শত শত গ্রন্থ পাঠে যত উপকার দর্শে, ইউক্লিডের জ্যামিতি পাঠ করিলে তদপেক্ষা অধিকতর উপকার দর্শিয়া থাকে। ফলত, ইউক্লিডের জ্যামিতি পাঠ, আমাদিগের মানসিক বিচার শক্তির উৎকর্ষ সাধনের একটী উৎকৃষ্ট উপায়। এই নিমিত্তই এক্ষণে পৃথিবীর প্রায় সকল দেশে, সকল বিদ্যালয়ে তাঁহার রচিত পুস্তক পঠিত হইয়া থাকে।

সং ১। কেহ কেহ বলেন যে, ইউক্লিডের প্রথম সংজ্ঞা দ্বারা কোন ভাবই মনে উদয় হয় না; যেহেতু, তাঁহার লিখিত বিন্দু কোন প্রকার গুণোপেত পদার্থই নহে; যাহার অংশ নাই, তাহারই নাম বিন্দু, ইহা দ্বারা গুণের অভাবই প্রকাশ হইয়াছে। বিন্দুর অংশ নাই, তবে কি আছে? এই প্রশ্নের উত্তর করা সহজ নয় বলিয়া, প্লেফেয়ার বলেন যে, "যাহার অবস্থিতি আছে, কিন্তু বিস্তৃতি নাই, তাহাকে বিন্দু বলা যায়।" গ্রীস দেশীয় পিথাগোরাস নামক সুপ্রসিদ্ধ পণ্ডিতের সংজ্ঞা অবলম্বন করিয়া প্লেফেয়ার এই রূপ লিখিয়াছেন। পিথাগোরসের মতে "অবস্থিতিমান্ সূক্ষ্মতম অণুর নাম বিন্দু।" অপর কোন কোন টীকাকার লিখিয়াছেন যে, "বস্তুমাত্রের (যেমন রেখার) অগ্র ভাগকে বিন্দু বলে।" সম্রাট্ জগন্নাথ পণ্ডিত তাঁহার রেখাগণিতে লিখিয়াছেন, "যঃ পদার্থঃ দর্শনযোগ্যঃ বিভাগানর্হঃ স বিন্দুর্বাচ্যঃ।" এই সকল সংজ্ঞার বিষয় পুঙ্খানুপুঙ্খ বিবেচনা করা আমাদিগের উদ্দেশ্য নহে; তবে এইমাত্র বলা যাইতে পারে যে, ইউক্লিডের সংজ্ঞা অপেক্ষা ইহাদের কোনটীই উৎকৃষ্ট নহে। বিন্দুর যে অবস্থিতি আছে, তাহা সংজ্ঞাতে প্রকাশ করা নিতান্ত অনাবশ্যক; কেননা,

তাহা হইলে, পদার্থ মাত্রেরই সংজ্ঞাতে অবস্থিতিমত্ব গুণের পরিচয় দিতে হয়; আর যদি বিন্দুর স্বতন্ত্র রূপে বিদ্যমানতা ভাবিয়া তদবস্থায় উহাকে দর্শন যোগ্য বলা যায়, তবে উহা গণিত সম্বন্ধীয় বিন্দু না হইয়া, জড় পদার্থের সূক্ষ্ম অংশ হইয়া উঠে, সুতরাং উহা বিভাগার্হ হইয়া পড়ে।

সং ২। দর্শন যোগ্য রেখা মাত্রেরই দৈর্ঘ্য ও বিস্তার আছে এবং বিস্তার বিহীন রেখা অঙ্কিত করাও যায় না। সুতরাং ইউক্লিডের সংজ্ঞানুসারে বিস্তার বিহীন রেখার সত্তা ভাবিয়া লইতে হয়। কেহ কেহ বলেন যে, "বিন্দুর গতি দ্বারা রেখা উৎপন্ন হয়, অর্থাৎ সঞ্চরণশীলতা গুণের কল্পনা করিয়া বিন্দুকে চালাইয়া দিলে, উহার যে পথ হয়, তাহাকে রেখা বলে।" আবার অন্যান্য টীকাকার লিখিয়াছেন যে, "বস্তু মাত্রের সূক্ষ্ম ধারকে রেখা বলা যায়।"

সং ৩। এই সংজ্ঞা দ্বারা বিন্দু শব্দের প্রকৃত অর্থ স্পষ্ট রূপে ব্যক্ত হইয়াছে। ইউক্লিড কোন স্থানে বিশেষ রূপে উল্লেখ না করিয়া, প্রতিজ্ঞা গুলির উপপত্তি কালে, স্বীকার করিয়া লইয়াছেন যে, দুই রেখার ছেদে বিন্দু উৎপন্ন হয়।

সং ৪। সরল বা ঋজু রেখা এই শব্দগুলির অর্থ কি, তাহা সকলেই অনায়াসে বুঝিতে পারেন; ইহা অপেক্ষা সুখ বোধ শব্দ ভাষায় অপ্রসিদ্ধ; সুতরাং সরল রেখার সংজ্ঞা লিখিবার বিশেষ আবশ্যকতা দৃষ্ট হয় না। ফলতঃ "সরল রেখা" এই শব্দকে অন্য কোন রূপে প্রকাশ করিতে হইলেই, তাহা সহজ না হইয়া কঠিন হইয়া পড়ে। সহজ করিবার মানসে পণ্ডিতেরা ভিন্ন ভিন্ন রূপে উহার যে যে সংজ্ঞা লিখিয়াছেন, সেই সকল প্রদর্শিত হইতেছে;—

১ম—"দুই বিন্দুর ক্ষুদ্রতম দূরত্বের নাম সরল রেখা।"
আর্কিমিডিস ও লেজেণ্ডর।

২য়—"যে রেখার প্রান্ত বিন্দু দ্বয়ের অন্যতরের পশ্চাতে চক্ষু রাখিলে, রেখার অপরাংশের দৃষ্টি অবরোধ হয়, তাহার নাম সরল রেখা।" প্লেটো ও জগন্নাথ।

৩য়—" যদি দুই রেখা এরূপ হয় যে, তাহাদিগকে একাধিক বিন্দুতে সংলগ্ন করিতে গেলে, তাহারা সর্ব্বতোভাবে মিলিয়া যায়, তবে তাহাদের প্রত্যেককে সরল রেখা বলা যায়।"

প্লেফেয়ার।

৪থ—" যে রেখার কোন দুই বিন্দুর অবস্থিতি জানিলে, সমস্ত রেখার অবস্থিতি জানা যায়, তাহার নাম সরল রেখা।"

এই কএকটী সংজ্ঞার মধ্যে প্রথমটী প্রমাণ যোগ্য; ২য় ও ৪থটী সরল রেখার বিশেষ বিশেষ ধর্ম্ম জ্ঞাপক এবং ৩য়টীতে একটী সরল রেখার লক্ষণ না হইয়া একেবারে দুইটীর লক্ষণ হইয়াছে। ইউক্লিডের সংজ্ঞার তাৎপর্য্য এই যে, যে রেখা, সীমা সূচক দুই বিন্দুর মধ্যে থাকিয়া, ঐ দুই বিন্দু হইতে অন্য কোন দিকে মুখ না ফিরায়, তাহার নাম সরল রেখা।

সং৭। এই সংজ্ঞাটী মূলে যেরূপে লিখিত হইয়াছে, তাহা অবিকল ইউক্লিডের রচিত নহে। সিম্‌সন সাহেব, হিরো নামক গ্রীস দেশীয় পণ্ডিতের মতানুসারে সংজ্ঞাটী সেইরূপ করিয়া লিখিয়াছেন। ইউক্লিডের সংজ্ঞা এই;—"যে তল তাহার অন্তর্গত সরল রেখা গুলির ন্যায় ঋজু বা সরল ভাবে অবস্থিত, তাহার নাম সমতল।"

সং৮ ও ৯। রেখা, সমতল ও ঘনক্ষেত্র এই তিন প্রকার রাশি ব্যতীত জ্যামিতিতে আর এক প্রকার রাশির বিষয় লিখিত আছে; সেই জ্যামিতিক রাশির নাম কোণ। কোন বিন্দু হইতে দুইটী রেখা টানিলে, তাহাদের পরস্পর বিসারণে কোণের উৎপত্তি হয়। এই দুইটী রেখার হ্রাস বা বৃদ্ধি করিলে, কোণের পরিমাণের হ্রাস বা বৃদ্ধি হয় না। দুইটী কোণের মধ্যে কোন্‌টী বৃহত্তর ও কোন্‌টী ক্ষুদ্রতর নিরূপণ করিতে হইলে, সেই সেই কোণ উৎপাদক রেখা দ্বয়ের পরস্পর বিসারণের তারতম্যের অনুসারে তাহা স্থির করিতে হয়।

যে বিন্দুতে কোণ উৎপাদক সরল রেখা দুইটী সংলগ্ন হয়, তাহার নাম কৌণিক বিন্দু। যে দুই সরল রেখা বর্দ্ধিত হইলে, সংলগ্ন হয় ও কোণ উৎপন্ন করে, তাহাদিগকে পরস্পর অবনত সরল রেখা বলে।

কোন কোন জ্যামিতিবেত্তা কোণের সংজ্ঞা এইরূপ লিখিয়াছেন ;—

" কোন সরল রেখার এক প্রান্ত স্থির রাখিয়া যদি তাহাকে এমন করিয়া ঘুরাইয়া দেওয়া যায় যে, সে অপর কোন স্থানে উপস্থিত হয়, তাহা হইলে এই রেখার প্রথম ও শেষ এই দুই স্থান দ্বারা যে অবনতি বিশেষ উৎপন্ন হয়, তাহাকে কোণ বলে।"

ইউক্লিডের অষ্টম সংজ্ঞার বিশেষ আবশ্যকতা দৃষ্ট হয় না; কেননা, জ্যামিতিতে দুই বক্র রেখা দ্বারা কিম্বা একটী বক্র ও আর একটী সরল রেখা দ্বারা উৎপন্ন কোণের ব্যবহার নাই।

সং ১০। ইউক্লিড মূল গ্রন্থের সকল স্থানেই স্বীকার করিয়াছেন যে, একটী রেখা আর একটীর লম্ব হইলে দ্বিতীয়টীও প্রথমটীর লম্ব হইবে।

সং ১৩। অনাবশ্যকতা হেতু এই সংজ্ঞাটী পরিত্যাগ করিলে করা যায়।

সং ১৫। পরিবদ্ধ সমতলের নাম সামতলিক ক্ষেত্র। বৃত্তক্ষেত্রের সংজ্ঞাতে কিরূপে বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হয়, ইউক্লিড তাহা লেখেন নাই; এই নিমিত্ত কেহ কেহ বৃত্ত-ক্ষেত্রের সংজ্ঞাটী এইরূপে লিখিয়াছেন ;—

কোন সরল রেখার এক প্রান্ত স্থির রাখিয়া যদি তাহাকে কোন সমতলে একবার ঘুরাইয়া আনা যায়, তবে ঐ রেখা যে স্থান পরিভ্রমণ করিয়া আইসে, তাহাকে বৃত্ত, ঐ সরল রেখার সচল প্রান্ত দ্বারা যে রেখা অঙ্কিত হয়, তাহাকে পরিধি, ভ্রাম্যমাণ সরল রেখাকে ব্যাসার্দ্ধ এবং যে বিন্দুর চতুর্দ্দিকে রেখাটী ভ্রমিত হয়, তাহাকে কেন্দ্র বলে।

সং ২৩। যে সকল সরল রেখা দ্বারা ক্ষেত্র পরিবদ্ধ হয়, তাহাদিগকে ক্ষেত্রের ভুজ বা বাহু ও বাহু সমষ্টিকে পরিমিতি বলে।

সং ২৪—২৯। ইউক্লিড ত্রিভুজকে ভুজের তারতম্যানুসারে তিন শ্রেণীতে এবং কোণের প্রকারানুসারে তিন শ্রেণীতে বিভক্ত করিয়াছেন। ইউক্লিড সমবাহু ত্রিভুজের সংজ্ঞা করিবার

অগ্রেই তাহার বিদ্যমানতা স্বীকার করিয়াছেন বলিয়া কেহ কেহ এ প্রকারে লিখিত সংজ্ঞাতে আপত্তি করেন; তাঁহাদের মতে সমবাহু ত্রিভুজের সংজ্ঞা এইরূপে লিখিলে ভাল হইত ;— যদি কোন ত্রিভুজের তিন বাহু সমান হয়, তবে তাহাকে সমবাহু ত্রিভুজ বলে।

সং ৩০—৩৪। কোন কোন টীকাকার বলেন যে, সমচতুর্ভুজ, আয়ত ও রম্বস ক্ষেত্রের সংজ্ঞাতে ইউক্লিডের অতি ব্যাপ্তি দোষ হইয়াছে। যে ক্ষেত্রের চারি ভুজ সমান ও একটী কোণ সম কোণ সেইটী সমচতুর্ভুজ, এই পর্য্যন্ত লিখিলেই বর্গক্ষেত্রের বিষয় যথেষ্ট লেখা হইত; কেননা, একটী কোণ সম কোণ হইলেই অন্য কোণ গুলিও যে সম কোণ, তাহা সপ্রমাণ হইতে পারে। এইরূপ দোষ আয়ত ও রম্বস ক্ষেত্রের সংজ্ঞাতেও লক্ষিত হয়।

সং ৩৫। উত্তরোত্তর বর্দ্ধিত হইলে কখনই মিলিত হয় না এরূপ দুই সরল রেখা সমান্তর না হইলেও হইতে পারে। যদি তাহারা বিভিন্ন সমতলে অবস্থিত হয়, তবে মিলিত না হইলেও সমান্তর হইবে না।

স্বীকৃত বিষয়।

সরল রেখা, ত্রিভুজ ও বৃত্ত প্রভৃতি ক্ষেত্র কাহাকে বলে তাহা জানিলেই জ্যামিতি সম্বন্ধীয় কোন প্রতিজ্ঞা প্রমাণ করা যায় না; তদনুরূপ চিত্র করিতে না পারিলে কোন বিষয়েরই সিদ্ধান্ত হয় না; এজন্য এক বিন্দু হইতে অপর কোন বিন্দু পর্য্যন্ত একটী সরল রেখা অঙ্কিত করিতে পারা যায়, সরল রেখাকে ইচ্ছামত বর্দ্ধিত করিতে পারা যায় এবং বৃত্ত অঙ্কিত করিতে পারা যায়, এই কথা গুলি ইউক্লিড স্বীকার করিয়াছেন। ফলত, এরূপ স্বীকার না করিলে, কোন প্রতিজ্ঞারই উপপত্তি হইতে পারে না। কেহ কেহ বলেন যে, স্বীকৃত বিষয় গুলিতে এই মাত্র বলা হইয়াছে যে, জ্যামিতিক ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইলে, চিত্র করিবার রুল ও কম্পাসের প্রয়োজন হইবে।

কিন্তু ইউক্লিড কোন যন্ত্রেরই উল্লেখ করেন নাই; তাহার কারণ এই যে, তাঁহার লিখিত সরল রেখা, বৃত্ত প্রভৃতি ক্ষেত্র, কোন যন্ত্রের সাহায্যে অঙ্কিত হইতে পারে না; তথাপি প্রতিজ্ঞাগুলি সাধনের জন্য তাহাদিগকে অঙ্কিত করা আবশ্যক; এনিমিত্ত তিনি ইহাদিগের অঙ্কন মাত্র স্বীকার করিয়াই সন্তুষ্ট হইয়াছেন।

স্বতঃ সিদ্ধ।

সংজ্ঞা গুলির ন্যায় ইউক্লিডের স্বতঃ সিদ্ধ গুলি লইয়া জ্যামিতিবেত্তা, দার্শনিক ও তার্কিকেরা অনেক বাদানুবাদ করিয়া থাকেন। কেহ কেহ স্বতঃ সিদ্ধ গুলিকে জ্যামিতির মূল স্বরূপ জ্ঞান করিয়াছেন; অপর কোন কোন পণ্ডিত বলেন যে, ইহাদের দ্বারা কোন প্রকার জ্ঞানই লব্ধ হয় না। আমাদিগের বিবেচনায় সংজ্ঞা গুলিই জ্যামিতির প্রকৃত মূল ও স্বতঃ সিদ্ধ গুলির প্রয়োগদ্বারা ইউক্লিডের প্রতিজ্ঞা গুলির উপপত্তি হইয়াছে; যে হেতু বৃত্ত কাহাকে বলে অথবা সমকোণী ত্রিভুজ কাহাকে বলে, না জানিলে, কেবল স্বতঃ সিদ্ধ গুলির সম্যক জ্ঞান লাভ করিয়া, সমস্ত জীবন ক্ষেপণ করিলেও কেহ জানিতে পারিবেন না যে, অৰ্দ্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ বা সমকোণী ত্রিভুজের সম কোণের সম্মুখীন বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ অন্য দুইটী বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান। সুতরাং সংজ্ঞা গুলিকে মূল স্বরূপ জ্ঞান করিয়া, স্বতঃসিদ্ধ সকলের সাহায্য গ্রহণ পূৰ্ব্বক বিচারে প্রবৃত্ত হইলে, জ্যামিতি সংক্রান্ত তাবৎ বিষয়ই জানা যায়। অতএব সংক্ষেপে এরূপ বলা যাইতে পারে যে,

(১) সংজ্ঞা গুলি জ্যামিতির মূল;

(২) স্বীকৃত বিষয় গুলি অঙ্কনের মূল;

(৩) স্বতঃ সিদ্ধ গুলি বিচার বা উপপত্তির মূল।

যেমন সংজ্ঞায় লিখিত রেখা, কোণ ও ক্ষেত্র প্রভৃতি পদার্থ গুলি, স্বতন্ত্র রূপে ইন্দ্রিয় গ্রাহ্য না হইলেও প্রথমত দর্শনেন্দ্রিয়ের প্রয়োগ দ্বারা উহাদের জ্ঞান লাভ হয়, সেই প্রকার স্বতঃসিদ্ধ গুলির জ্ঞানও প্রথমত কোন না কোন জ্ঞানেন্দ্রিয়ের সাহায্যে

লব্ধ হইয়া থাকে ; এক বস্তু আর এক বস্তুর সমান বা অসমান এই জ্ঞান ইন্দ্রিয় জন্য ; প্রথমে ইন্দ্রিয়ের সহায়তায় এ জ্ঞান না জন্মিলে, ইউক্লিডের কোন স্বতঃসিদ্ধেরই সিদ্ধতা প্রতীয়মান হয় না। কিন্তু এরূপ জ্ঞান জন্মিলে, অনেকগুলি স্বতঃসিদ্ধের সিদ্ধতা স্বতই মনে উদয় হয় এবং তদ্বিষয়ে বিচারের প্রয়োজন হয় না; এই নিমিত্তই এ গুলির নাম স্বতঃসিদ্ধ হইয়াছে।

স্বতঃ ৪ ও ৫। ইউক্লিড ৪র্থ স্বতঃসিদ্ধে এই মাত্র প্রকাশ করিয়াছেন যে, যদি ক ও খ দুই অসমান রাশিতে ক্রমে গ ও ঘ দুই সমান রাশি যোগ করা যায়, তবে ক ও গএর যোগফল খ ও ঘএর যোগফলের অসমান হইবে। প্রতিজ্ঞা গুলির উপপত্তি কালে এই স্বতঃসিদ্ধটীর ঠিক এই রূপে প্রয়োগ না হইয়া ভিন্ন রূপে প্রয়োগ হইয়াছে ; যথা,—যদি ক, খ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে প্রত্যেকের সহিত গ ও ঘ এই দুইটী সমান রাশির এক একটী যোগ করিলে ক ও গএর যোগফল খ ও ঘএর যোগফল অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। পঞ্চম স্বতঃসিদ্ধটীরও প্রয়োগ এই রূপ।

স্বতঃ ৮। কি রূপে দুই জ্যামিতিক রাশির সমানত্ব জানা যাইবে, ইউক্লিড ইহাই এই স্বতঃসিদ্ধে ব্যক্ত করিয়াছেন। একটী রেখা অপর একটী রেখার উপর, একটী কোণ আর একটী কোণের উপর এবং এক সরল রৈখিক ক্ষেত্র অন্য সরল রৈখিক ক্ষেত্রের উপর স্থাপিত হইয়াছে কল্পনা করিলে, যদি এরূপ বোধ হয় যে, তাহারা সর্ব্বতোভাবে মিলিত হইয়াছে, তবে তাহারা পরস্পর সমান হইবে। ইউক্লিড এই প্রণালী অবলম্বন করিয়া তাঁহার জ্যামিতিতে ক্ষেত্র প্রভৃতির সমানত্ব প্রমাণ করিয়াছেন। এই প্রণালীকে উপস্থাপন, অর্থাৎ একটীর উপর আর একটীর স্থাপন, বলা যায়। অষ্টম স্বতঃসিদ্ধটী স্পষ্ট বুঝাইবার জন্য টীকাকারেরা "যে যে রাশি ঠিক এক স্থান আবরণ করে," এই বাক্যটী উহাতে সন্নিবেশিত করিয়াছেন ; কিন্তু মূলে এরূপ নাই। রেখা ও কোণ সম্বন্ধে এই বাক্যের উপযোগিতা দৃষ্ট হয় না; এ নিমিত্ত ঐ বাক্যের সন্নিবেশ অনাবশ্যক।

স্বতঃ ১০। প্লেফেয়ারের জ্যামিতিতে এইটী স্বতঃসিদ্ধের মধ্যে লিখিত না হইয়া সরল রেখার সংজ্ঞার অনুমান স্বরূপ লিখিত হইয়াছে। প্লেফেয়ারের সরল রেখার সংজ্ঞা এই পুস্তকে পরিগৃহীত হয় নাই ; অতএব মূল গ্রন্থানুসারে এই স্বতঃসিদ্ধটীকে যথা স্থানে সন্নিবেশিত করা গেল।

স্বতঃ ১১। একটী সম কোণ যে আর একটী সম কোণের সমান, তাহা প্রমাণ যোগ্য, এজন্য জ্যামিতিবেত্তারা সকল সম কোণ যে পরস্পর সমান ইহা স্বতঃসিদ্ধ বলিয়া স্বীকার করেন না।

স্বতঃ ১২। প্লেফেয়ার এই স্বতঃসিদ্ধটীর পরিবর্ত্তে আর একটী স্বতঃসিদ্ধ লিখিয়াছেন, তাহা এই ;—দুই সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে, উভয়েই অন্য কোন সরল রেখার সমান্তর হইতে পারে না। ইউক্লিড ও প্লেফেয়ারের রচিত দুইটী স্বতঃসিদ্ধের মধ্যে কোন্‌টী প্রকৃত স্বতঃসিদ্ধ, তাহা ২৯এর প্রতিজ্ঞার ব্যাখ্যাতে প্রকাশিত হইবে।

ইউক্লিডের প্রথম অধ্যায় তিন অংশে বিভক্ত হইতে পারে। প্রথম ২৬টী প্রতিজ্ঞায় ত্রিভুজের অঙ্কন, উপস্থাপন দ্বারা তাহাদিগের সমানত্ব বা অসমানত্ব এবং তাহাদের কোণ ও ভুজের বিষয় লিখিত হইয়াছে ; ২৭শ হইতে ৩৪শ পর্য্যন্ত আটটী প্রতিজ্ঞাতে সমান্তর রেখা ও সমান্তর রৈখিক ক্ষেত্রের ধর্ম্ম নির্ণীত হইয়াছে ; অবশিষ্ট ১৪টী প্রতিজ্ঞায় যে সকল ত্রিভুজ ও সমান্তরিক উপস্থাপন দ্বারা সর্ব্বতোভাবে মিলিত না হয়, কি রূপে তাহাদিগের ক্ষেত্র ফলের তুলনা করা যাইতে পারে, এবং সমকোণী ত্রিভুজের তিন বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ গুলির পরস্পর সম্বন্ধ কি রূপ, এই সকল স্থিরীকৃত হইয়াছে।

১ম—১। এই প্রতিজ্ঞার চিত্রে প্রত্যেক বৃত্তের কেন্দ্র অন্য বৃত্তের পরিধিতে স্থাপিত হওয়াতে সহজেই বোধ হইবে যে,

বৃত্ত দ্বয় পরস্পরকে দুই বিন্দুতে ছেদ করিবে; ঐ দুই বিন্দুর প্রত্যেককে, নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার দুই প্রান্তের সহিত সংযুক্ত করিয়া দিলে, রেখার দুই দিকে দুইটী সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত হইবে। "নির্দ্দিষ্ট সীমাবিশিষ্ট" এই বাক্যের দ্বারা বুঝিতে হইবে যে, রেখাটীর অবস্থিতি ও সীমা উভয়ই নিরূপিত আছে।

১ম—২। নির্দ্দিষ্ট বিন্দু, নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাতে বা বর্দ্ধিত নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাতে অবস্থিত না হইলে, এই প্রতিজ্ঞাটী নিম্ন লিখিত তিন রূপ অঙ্কন দ্বারা আট প্রকারে সম্পাদন করা যাইতে পারে; যথা,—

(১) নির্দ্দিষ্ট বিন্দুকে নির্দ্দিষ্ট রেখার উভয় প্রান্তের সহিত সংযুক্ত করা যাইতে পারে;

(২) সমবাহু ত্রিভুজটী সংযোজক রেখার উভয় দিকে অঙ্কিত হইতে পারে;

(৩) কখঘ সমবাহু ত্রিভুজের খঘ বাহুকে উভয় পার্শ্বে বর্দ্ধিত করা যাইতে পারে।

এই প্রতিজ্ঞাটীর চিত্র অঙ্কিত করিতে হইলে,

(১) নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে প্রথম বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ স্বরূপ লইতে হইবে ও তাহার সংযুক্ত প্রান্তকে কেন্দ্র করিতে হইবে।

(২) সমবাহু ত্রিভুজের যে বাহু নির্দ্দিষ্ট বিন্দুর সম্মুখীন, তাহাকে প্রথম বৃত্তের পরিধি পর্য্যন্ত বৃদ্ধি করিতে হইবে।

(৩) সংযোজক রেখার সম্মুখবর্ত্তী শৃঙ্গকে দ্বিতীয় বৃত্তের কেন্দ্র এবং প্রথম বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের ও সমবাহু ত্রিভুজের এক বাহুর সমষ্টি বা অন্তরকে ব্যাসার্দ্ধ করিতে হইবে।

(৪) ত্রিভুজের যে বাহু নির্দ্দিষ্ট রেখার সংযুক্ত প্রান্তের সম্মুখীন, তাহাকে ২য় বৃত্তের পরিধি পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত করিলেই সম্পাদ্য রেখা অঙ্কিত হইবে।

১ম—৪। এই প্রতিজ্ঞাটী জ্যামিতির মূল স্বরূপ জ্ঞান করিলেও করা যায়। ফলত, এই প্রতিজ্ঞার যত প্রয়োগ আছে, অন্য কোন প্রতিজ্ঞার প্রয়োগ তত দেখা যায় না। কি রূপ অবস্থাপন্ন হইলে, ত্রিভুজ গুলি সর্ব্বতোভাবে সমান হয়, তাহা দর্শাইবার

জন্য ইউক্লিড তিনটী প্রতিজ্ঞা লিখিয়াছেন; তন্মধ্যে এইটী প্রথম, অষ্টম উপপাদ্য দ্বিতীয় ও ষড়বিংশ উপপাদ্য তৃতীয়। প্রথম প্রতিজ্ঞাটী যেমন স্বীকৃত বিষয় গুলি দ্বারা সম্পাদিত হইয়াছে, ৪থ প্রতিজ্ঞাটীও সেই রূপ, উপপাদ্যের প্রথম বলিয়া, স্বতঃসিদ্ধ গুলির সাহায্যে উপপন্ন হইয়াছে। আর এই প্রতিজ্ঞার প্রমাণ ইন্দ্রিয় জ্ঞান সাপেক্ষ বলিলেও বলা যায়; কেননা, উপস্থাপন কালে যদিও আমরা একটী ত্রিভুজকে তুলিয়া লইয়া আর একটীর উপর সংস্থাপন করি না, তথাপি ঐ কার্য্য ইন্দ্রিয় জনিত পূর্ব্ব সংস্কার দ্বারা কল্পনা করিয়া থাকি।

১ম—৫। সমান দুইটী বাহু বর্দ্ধিত না করিয়া যদি কখ বাহুতে ঘ বিন্দু কল্পনা করিয়া, কগ হইতে কঘএর সমান কঙ অংশ ছেদ করা যায়, তবে গঘ ও খঙ সংযুক্ত করিলে, প্রমাণ করা যাইতে পারে যে, ত্রিভুজের ভুমি সংলগ্ন কোণ দ্বয় পরস্পর সমান।

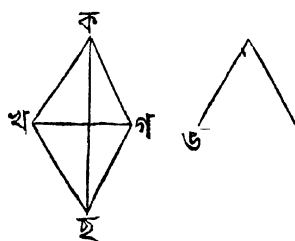
১ম—৬। এই প্রতিজ্ঞাতে কখ বাহু হইতে ক্ষুদ্রতর কগএর সমান অংশ লইতে হইলে, কখএর খ প্রান্ত হইতে আরম্ভ করিয়া সেই অংশ ছেদ করিতে হইবে; ইহা না করিলে উপপত্তিতে চতুর্থ প্রতিজ্ঞা প্রয়োগ করা যায় না।

পঞ্চম ও ষষ্ঠ প্রতিজ্ঞার সম্বন্ধ পরস্পর বিপরীত, অর্থাৎ প্রত্যেকের কল্পিত অংশ অন্যের প্রমাণ স্থল। এই দুইটী ব্যতীত আরও অনেক গুলি প্রতিজ্ঞার সম্বন্ধ এই রূপ আছে;— ১৩ ও ১৪, ১৮ ও ১৯, ২৪ ও ২৫, ৪৭ ও ৪৮ ইত্যাদি।

ইউক্লিডের অধিকাংশ প্রতিজ্ঞার প্রমাণ অন্বয় মুখে আর কতিপয় প্রতিজ্ঞার প্রমাণ ব্যতিরেক মুখে সম্পাদিত হইয়াছে। ষষ্ঠ প্রতিজ্ঞাটী ব্যতিরেক মুখে প্রমাণের প্রথম উদাহরণ।

১ম—৭। অষ্টম প্রতিজ্ঞা প্রমাণের জন্য এই প্রতিজ্ঞার প্রয়োজন হয়; ইহা ব্যতীত অন্য কোন স্থানে ইহার উপযোগিতা দৃষ্ট হয় না।

১ম—৮। এই প্রতিজ্ঞা সপ্তমের সাহায্য না লইয়া অন্বয় মুখে প্রমাণ করা যায়; তাহা করিলে সপ্তমের আর আবশ্যকতা থাকে না।

কখগ ও ঘঙচ ত্রিভুজের যেন কখ ও কগ বাহু যথাক্রমে ঘঙ ও ঘচ বাহুর সমান এবং খগ ভূমি ঙচ ভূমির সমান; তাহা হইলে খকগ কোণ ঙঘচ কোণের সমান হইবে।

ঘঙচ ত্রিভুজকে কখগ ত্রিভুজের সহিত এরূপ করিয়া রাখ, যেন ঙচ ভূমি খগ ভূমির সহিত মিলিয়া যায় ও সমান সমান বাহু পরস্পর সংলগ্ন হয় এবং ত্রিভুজ দ্বয়ের শৃঙ্গ পরস্পর বিপরীত ভাবে ভূমির উভয় দিকে পড়ে; ঘঙচ ত্রিভুজকে এই রূপে রাখিলে যেন ছখগ ত্রিভুজের ন্যায় অবস্থিত হইল, অর্থাৎ ছ বিন্দু ঘ শৃঙ্গের স্থানীয় হইল। কছ সংযুক্ত কর। তাহা হইলে, খক বাহু খছএর সমান কল্পিত হওয়াতে, খকছ কোণ খছক কোণের সমান; [১ম, ৫।

এই রূপে গকছ কোণ গছক কোণের সমান। অতএব সমস্ত খকগ কোণ সমস্ত খছগ কোণের, অর্থাৎ ঙঘচ কোণের সমান।

ত্রিভুজের প্রকার ভেদে, কছ রেখা খ অথবা গ বিন্দু দিয়া যাইতে পারে অথবা বর্দ্ধিত খগকে ছেদ করিতে পারে; তাহা হইলে এই প্রতিজ্ঞার আর দুইটী প্রকরণ হয়; সে দুইটীও উক্ত রূপে সপ্রমাণ হইবে।

১ম—৯। ঘঙ রেখার উপর দিকে সমবাহু ত্রিভুজটী অঙ্কিত করিলে, ইহা কঘঙ ত্রিভুজের সহিত মিলিয়া যাইতে পারে; এজন্য নীচে অঙ্কিত হইয়াছে; যদি সমবাহু ত্রিভুজের শৃঙ্গ ক

শৃঙ্গের সহিত মিলিত না হয়, তবে তাহা উপর দিকে অঙ্কিত হইলেও প্রতিজ্ঞাটী সিদ্ধ হইবে। এই প্রতিজ্ঞা দ্বারা সরল রৈখিক কোণকে ৪, ৮, ১৬ প্রভৃতি অংশে বিভাগ করা যায়।

১ম—১১। নির্দ্দিষ্ট বিন্দু, নির্দ্দিষ্ট রেখার কোন প্রান্তে কল্পিত হইলে, রেখাকে প্রথমত বর্দ্ধিত করিতে হইবে। এই প্রতিজ্ঞার অনুমান সিমসন সাহেবের রচিত; ইউক্লিডের মূল গ্রন্থে এ অনুমানটী নাই।

১ম—১২। নির্দ্দিষ্ট রেখাটী অসীম হওয়া আবশ্যক; তাহা না হইলে চঘছ বৃত্ত উহাকে দুই বিন্দুতে ছেদ না করিলেও করিতে পারে; দুই বিন্দুতে ছেদ না করিলে, প্রতিজ্ঞাটীর সমাধা করা যায় না।

১ম—১৪। এই প্রতিজ্ঞায় "পরস্পর বিপরীত দিকে" এই বাক্য সন্নিবেশিত করা নিতান্ত আবশ্যক; কেননা, নির্দ্দিষ্ট রেখার এক দিকে অন্য দুই সরল রেখা সংলগ্ন হইয়া যে দুইটী কোণ উৎপন্ন করে, তাহারা একত্র যোগে যদি দুই সম কোণের সমান হয়, তাহা হইলে শেষোক্ত দুই রেখা কোন ক্রমেই এক সরল রেখা হইতে পারে না।

এই প্রতিজ্ঞার উপপত্তিতে লিখিত হইয়াছে যে, "কখগ ও কখঙ কোণ দ্বয় কখগ ও কখঘ কোণ দ্বয়ের সমান," এই বাক্যটী একাদশ ও প্রথম এই দুই স্বতঃসিদ্ধের সাপেক্ষ; কেননা, সকল সম কোণ যে পরস্পর সমান, তাহা না জানিলে, কোণ গুলির সমানত্ব জানা যায় না। ইউক্লিড সর্ব্ব প্রথমে এই স্থানে ১১শ স্বতঃসিদ্ধের প্রয়োগ করিয়াছেন। পূর্ব্বে লিখিত হইয়াছে যে, এইটী প্রমাণ যোগ্য বলিয়া কেহ কেহ ইহাকে স্বতঃসিদ্ধ বলিয়া স্বীকার করেন না; ইহার প্রমাণ এই;—ত্রয়োদশ প্রতিজ্ঞার দুইটী চিত্রে ঘখ, খগ রেখা গুলি পরস্পর সমান ও খক লম্ব খঙ লম্বের সমান জ্ঞান করিয়া যদি প্রথম চিত্রটী দ্বিতীয়ের উপর স্থাপন করা যায়, তবে একের ঘ, খ, গ বিন্দু অন্যের ঘ, খ, গ বিন্দুর সহিত মিলিয়া যাইবে; এক্ষণে যদি খক লম্ব খঙ লম্বের সহিত মিলিত না হইয়া দ্বিতীয় চিত্রের খক রেখার ন্যায় অবস্থিত হয়, তবে গখঙ কোণ গখক কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে;

অতএব ঘখঙ কোণও গখক কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে; [সং১০। সুতরাং ঘখক কোণ গখক কোণ অপেক্ষা আরও বৃহত্তর ; কিন্তু গখক কোণ গখক কোণের সমান (সং ১০); অতএব এরূপ হওয়া অসম্ভব। সুতরাং উপস্থাপন করিতে হইলে, একটী চিত্র অপরটীর সহিত সম্পূর্ণ রূপে মিলিয়া যাইবে, অর্থাৎ সম কোণ গুলি পরস্পর সমান হইবে।

১ম—১৭। প্রথম অধ্যায়ের ১৬র ও ১৭র প্রতিজ্ঞা ৩২এর প্রতিজ্ঞার অন্তর্গত ; ১৭র প্রতিজ্ঞাটী ১৬র প্রতিজ্ঞার অনুমান বলিয়া লিখিলেও চলিত। ১৭র প্রতিজ্ঞা দ্বারা দ্বাদশ স্বতঃসিদ্ধের অর্থ বিশদ রূপে প্রকাশিত হইয়াছে। এই প্রতিজ্ঞার ও উক্ত স্বতঃসিদ্ধের সম্বন্ধ পরস্পর বিপরীত।

১ম—২০। কেহ কেহ বলেন যে, এই প্রতিজ্ঞাটীকে স্বতঃসিদ্ধ বলিয়া লিখিলেও চলিত ; কেননা, ত্রিভুজের দুই ভুজ যে একত্র যোগে অবশিষ্ট ভুজ অপেক্ষা বৃহত্তর, তাহা প্রমাণ না করিলেও অনায়াসে বুঝা যায়। কিন্তু প্রতিজ্ঞা গুলি অনায়াস বোধগম্য হইলেই যে তাহারা স্বতঃসিদ্ধ হইবে, এরূপ স্বীকার করা উচিত হইতেছে না। সরল রেখা যে দুই বিন্দুর ক্ষুদ্রতম দূরত্ব, তাহা এই প্রতিজ্ঞার একটী অনুমান বলিয়া লিখিলেও হয় ; কেননা, ক বিন্দু খগ রেখার যতই নিকটবর্ত্তী হউক না কেন, খক ও কগ রেখার সমষ্টি খগ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

১ম—২১। এই প্রতিজ্ঞাতে ত্রিভুজের অভ্যন্তরে যে দুইটী রেখা অঙ্কিত করিতে হইবে, তাহাদিগকে কোন এক বাহুর "দুই প্রান্ত হইতে টানা আবশ্যক" এ কথা বলা নিতান্ত প্রয়োজনীয় ; কেননা, তাহা না হইলে কোন কোন ত্রিভুজের ভুমিতে এমন দুই বিন্দু স্থির করা যাইতে পারে যে, তথা হইতে অভ্যন্তরীণ কোন বিন্দু পর্য্যন্ত দুইটী রেখা টানিলে, তাহাদিগের সমষ্টি দুই ভুজের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর হইয়া থাকে। কেবল সমবাহু ত্রিভুজের কিম্বা ভুজ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ভূমি বিশিষ্ট সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের অভ্যন্তরে ঐরূপ বৃহত্তর দুই রেখা টানা যাইতে পারে না।

১ম—২২। এই প্রতিজ্ঞাতে, তিনটী নির্দ্দিষ্ট রেখার মধ্যে দুইটীর সমষ্টি যে তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়া আবশ্যক,

এ কথার উপযোগিতা সহজেই বোধ হইবে; কেননা, ক>খ+গ হইলে, ক্ষুদ্র বৃত্তটী বৃহত্তরের অভ্যন্তরে থাকিবে, এই হেতু ত্রিভুজ অঙ্কিত হইবে না; ক=খ+গ হইলেও এই রূপ হইবে এবং দুইটী বৃত্ত পরস্পর এক বিন্দুতে সংস্পর্শ করিবে; খ>ক+গ হইলে একটী বৃত্ত সম্পূর্ণ রূপে অপরটীর বাহিরে থাকিবে এবং গ>ক+খ হইলেও এই রূপ হইবে। যদি নির্দ্দিষ্ট তিনটী রেখা পরস্পর সমান হয়, তবে এই প্রতিজ্ঞাটী অবিকল প্রথম প্রতিজ্ঞা হইয়া উঠে।

১ম—২৪। এই প্রতিজ্ঞার চিত্র অঙ্কিত করিবার সময় লিখিত হইয়াছে যে, "ঘঙ বাহু যেন ঘচ অপেক্ষা বৃহত্তর নহে," এই কথা গুলি সিমসন সাহেব ইহাতে সন্নিবেশিত করিয়াছেন; ইউক্লিডের মূল গ্রন্থে ইহার উল্লেখ ছিল না। এরূপ না লিখিলে প্রতিজ্ঞাটীর তিনটী প্রকরণ হইয়া পড়ে; যথা— চ বিন্দু (১) ঙছ রেখার নিম্নে (২) ঙছ রেখাতে এবং (৩) ঙছ রেখার উপরে, অবস্থিত হইতে পারে। প্রথম প্রকরণের উপপত্তি, মূলে লিখিত হইয়াছে; দ্বিতীয়, চ বিন্দু ঙছ রেখাস্থিত হইলে অনায়াসে বোধ হইবে যে, ঙচ ভূমি ঙছ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর (স্বতঃ ৯); তৃতীয়, চ বিন্দু ঙছ রেখার উপর অবস্থিত হইলে, ঘচ+চঙ<ঘছ+ছঙ (১ম,২১); অতএব ঙচ<ঙছ।

১ম—২৬। পূর্ব্বেই লিখিত হইয়াছে যে, সমানত্ব সম্বন্ধে এইটী ইউক্লিডের তৃতীয় প্রতিজ্ঞা। প্রত্যেক ত্রিভুজে তিন ভুজ ও তিন কোণ এই ছয়টী রাশি আছে; ইহাদিগের মধ্যে যদি এক ত্রিভুজের পরস্পর নিরপেক্ষ কোন তিন রাশি অন্য ত্রিভুজের তিন রাশির সমান হয়, তবে একের অবশিষ্ট রাশি গুলি যথা-ক্রমে অন্যের অবশিষ্ট রাশি গুলির সমান হইয়া থাকে। কখন কখন সমান হয়ও না।

ছয় রাশির মধ্যে ত্রিভুজের যে কোন তিন রাশি অার এক ত্রিভুজের তিন রাশির সমান হইতে পারে; যথা—

(১) দুই ভুজ ও তদন্তর্গত কোণ।

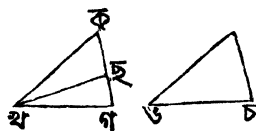
(২) দুই কোণ ও তাহাদের মধ্যস্থিত ভুজ।

(৩) দুই ভুজ ও একের সম্মুখীন কোণ।

(৪) দুই কোণ ও একের সম্মুখীন ভুজ।
(৫) তিন ভুজ।
(৬) তিন কোণ।

ইহাদের মধ্যে ইউক্লিড ৪থ প্রতিজ্ঞাতে প্রথম প্রকার, ২৬শ প্রতিজ্ঞাতে দ্বিতীয় ও চতুর্থ প্রকার, এবং ৮ম প্রতিজ্ঞাতে পঞ্চম প্রকার কল্পনা দ্বারা ত্রিভুজ দ্বয়ের সমানত্ব প্রমাণ করিয়াছেন। ষষ্ঠের তিন রাশি পরস্পর নিরপেক্ষ নহে; কেননা, দুইটী জানিলেই অবশিষ্ট কোণ স্থির করা যায় (১ম, ৩২); এজন্য এক ত্রিভুজের তিনটী কোণ, অন্যের তিনটী কোণের সমান হইলে, দুই ত্রিভুজ যে অবশ্যই সর্ব্বতোভাবে সমান হইবে, এমন নহে। ইউক্লিড তৃতীয় প্রকার কল্পনা করেন নাই; এস্থলেও একটী ত্রিভুজের দুই ভুজ ও একের সম্মুখীন কোণ অপর ত্রিভুজের দুই ভুজ ও একের সম্মুখীন কোণের সমান হইলেই যে ত্রিভুজ দুইটী অবশ্যই সর্ব্বতোভাবে সমান হইবে, এমন নহে। একাদশ প্রতিজ্ঞার চিত্রে চখ সংযুক্ত করিয়া দিলে, চখঙ ত্রিভুজের চখ ও চঙ ভুজ চখঘ ত্রিভুজের চখ ও চঘ ভুজের সমান এবং খ কোণ দুই ত্রিভুজেরই সাধারণ কোণ; কিন্তু এই দুই ত্রিভুজ সর্ব্বতোভাবে সমান নহে। কিন্তু স্থান বিশেষে দুই ত্রিভুজের এরূপ সম্বন্ধ থাকিলে, তাহারা সর্ব্বতোভাবে সমান হইতে পারে; যথা—

দুই ত্রিভুজের মধ্যে যদি একের দুই বাহু যথাক্রমে অন্যের দুই বাহুর সমান হয় এবং এক একটী সমান বাহুর সম্মুখীন কোণ সমান হয়, তবে অপর সমান সমান বাহুর সম্মুখীন কোণ দ্বয় প্রত্যেকে সূক্ষ্ম, স্থূল বা সম কোণ হইলে, ত্রিভুজ দুইটীর অবশিষ্ট বাহু ও কোণ সমান হইবে।

কখগ ত্রিভুজের কখ ও খগ বাহু যেন ঘঙচ ত্রিভুজের ঘঙ ও ঙচ বাহুর সমান এবং ক কোণ ঘ কোণের সমান; তাহা হইলে যদি গ ও চ উভয়েই সূক্ষ্ম, স্থূল বা সম কোণ হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটী সর্ব্বতোভাবে সমান হইবে।

প্রথমত, গ ও চ কোণ যেন উভয়েই সূক্ষ্ম কোণ হইল; এক্ষণে অবশিষ্ট কগ বাহু যদি অবশিষ্ট ঘচ বাহুর সমান না হয়, তবে কছ যেন ঘচএর সমান হইল। তাহা হইলে, কখছ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান (১ম, ৪) এবং কছখ কোণ ঘচঙ কোণের সমান আর খছ ভূমি ঙচএর সমান। আবার খগ বাহু ঙচএর সমান হওয়াতে (কল্পনা), খছ বাহু খগএর সমান; এই হেতু খছগ কোণ খগছ কোণের সমান (১ম, ৫); অতএব খছগ একটী সূক্ষ্ম কোণ; এজন্য খছক স্থূল কোণ (১ম, ১৩)। আবার খছক কোণ, চ কোণের সমান প্রমাণ হইয়াছে; এজন্য তাহা সূক্ষ্ম কোণ, অতএব এরূপ হওয়া অসম্ভব; সুতরাং কগ, ঘচএর অসমান নহে, অর্থাৎ সমান এবং একের অবশিষ্ট কোণ গুলি, অন্যের অবশিষ্ট কোণ গুলির সমান। দ্বিতীয়ত, গ ও চ উভয়েই স্থূল কোণ হইলে, প্রতিজ্ঞার উপপত্তি উক্তরূপই হইবে। তৃতীয়ত, দুই কোণ প্রত্যেকে সম কোণ হইলে প্রতিজ্ঞাটী ২৬শ প্রতিজ্ঞার একটী প্রকরণ মাত্র হইয়া পড়ে।

১ম, ২৭—২৯। ২৭শ ও ২৮শ এই দুই প্রতিজ্ঞার সহিত ২৯শ প্রতিজ্ঞার সম্বন্ধ পরস্পর বিপরীত। এই পুস্তকে ২৯শ প্রতিজ্ঞা ইউক্লিডের মূল গ্রন্থানুসারে দ্বাদশ স্বতঃসিদ্ধের সাহায্যে সপ্রমাণ হইয়াছে; কোন কোন টীকাকার এ প্রতিজ্ঞাটী অন্যরূপে প্রমাণ করিয়াছেন; তাহা এই—

যদি কছজ কোণ ছজঘএর সমান না হয়, তবে টছ সরল রেখা টানিয়া টছজ কোণকে ছজঘএর সমান কর এবং টছকে ঠ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি করিয়া দাও; তাহা হইলে টঠ সরল রেখা গঘএর সমান্তর হইবে (১ম, ২৭)। আর কখ, গঘএর সমান্তর (কল্পনা); সুতরাং কখ ও টঠ উভয়েই গঘএর সমান্তর; কিন্তু দুই সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে, উভয়েই অন্য কোন সরল রেখার সমান্তর হইতে পারে না (প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ); অতএব এরূপ হওয়া অসম্ভব, ইত্যাদি। ইউক্লিডের স্বতঃসিদ্ধের পরিবর্ত্তে প্লেফেয়ার এই স্বতঃসিদ্ধটী তাঁহার অনুবাদিত জ্যামিতিতে লিখিয়া দিয়াছেন। টীকাকারেরা এরূপ মত প্রকাশ করিয়াছেন যে, ইউক্লিডের স্বতঃসিদ্ধটী, স্বতঃসিদ্ধ বলিয়া গ্রহণ করা

যাইতে পারে না। সিমসন সাহেব এইটীকে প্রতিজ্ঞা জ্ঞান করিয়া, দুইটী নূতন সংজ্ঞা, একটী স্বতঃসিদ্ধ ও পাঁচটী প্রতিজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ করিয়াছেন। দুই সরল রেখা এক বিন্দুতে সংলগ্ন হইলে, স্থানান্তরে তাহাদের উপর যদি কোন তৃতীয় রেখার সম্পাত হয়, তবে তদ্দ্বারা উৎপন্ন অন্তরস্থ দুই কোণ, দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে অথবা ত্রিভুজের যে দুইটী কোণ লও, তাহারা একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে (১ম, ১৭)। এই প্রতিজ্ঞাটীর সহিত ইউক্লিডের ১২শ স্বতঃসিদ্ধের সম্বন্ধ পরস্পর বিপরীত। ইউক্লিডের ১৭শ প্রতিজ্ঞা স্বতঃসিদ্ধ বলিয়া গৃহীত হয় না, ইহা প্রমাণ সাপেক্ষ; তবে যাহার সহিত ইহার বিপরীত সম্বন্ধ, তাহা কিরূপে স্বতঃসিদ্ধ বলিয়া গৃহীত হইতে পারে? এই প্রশ্নের উত্তর দেওয়া সহজ নয় বলিয়া, জ্যামিতি-বেত্তাদিগের মধ্যে কেহ কেহ সমান্তর রেখার একটী নূতন সংজ্ঞা দ্বারা, কেহ কেহ একটী নূতন স্বতঃসিদ্ধ দ্বারা আর কেহ কেহ কেবল সরল ও সমান্তর রেখার সংজ্ঞা দ্বারা, সমান্তর রেখা সম্বন্ধীয় যাবতীয় প্রতিজ্ঞার উপপাদন করিতে চেষ্টা করিয়াছেন। কিন্তু দুই সহস্র বর্ষেও কেহ তাহাতে কৃতকার্য্য হইতে পারেন নাই, এ কথা বলিলে অত্যুক্তি দোষে দূষিত হইতে হয় না। ইউক্লিড ৩৫শ সংজ্ঞাতে এই মাত্র লিখিয়া সন্তুষ্ট হইয়াছেন যে, যে দুই রেখা উত্তরোত্তর বর্দ্ধিত হইলেও মিলিত হয় না, তাহাদিগের নাম সমান্তর রেখা; এই লক্ষণ দ্বারা সমান্তর রেখার কোন বিশেষ ধর্ম্ম ব্যক্ত হয় নাই; কেবল একটী গুণের অভাবের পরিচয় দেওয়া হইয়াছে; এই নিমিত্তই এ বিষয়টী কঠিন হইয়া পড়িয়াছে। সমান্তর রেখা সম্বন্ধীয় প্রতিজ্ঞা গুলি প্রমাণ করিবার জন্য ইউক্লিডের ১২শ স্বতঃ-সিদ্ধের পরিবর্ত্তে প্রায় ত্রিশ প্রকার নূতন উপায়ের উদ্ভাবন হইয়াছে, তন্মধ্যে লেজেণ্ডর ও প্লেফেয়ার লিখিত দুইটী প্রণালী সর্ব্বাপেক্ষা উৎকৃষ্ট বলিয়া কেহ কেহ স্বীকার করিয়া থাকেন। লেজেণ্ডরের উদ্ভাবিত উপায়টী প্রায় দোষ শূন্য, কিন্তু শিক্ষার্থীদিগের পক্ষে অত্যন্ত কঠিন; এজন্য আমরা তাহার উল্লেখ করিলাম না। প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধটী নূতন

বলিয়া বোধ না হইয়া ইউক্লিডের স্বতঃসিদ্ধের রূপান্তর বলিয়া বোধ হইতেছে আর উহাকে অবিবাদে ৩০শ প্রতিজ্ঞার অনুমান স্বরূপ গ্রহণ করা যাইতে পারে। উহা যে ইউক্লিডের স্বতঃসিদ্ধের রূপান্তর তাহা সহজেই বোধ হইবে; যথা—

২৮শ প্রতিজ্ঞায় কল্পিত হইয়াছে যে, খছজ ও ছজঘ কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হইলে, কখ ও গঘ সমান্তর হইবে; অতএব ছ দিয়া অন্য কোন সরল রেখা টানিলে, তাহা ছজএর সহিত যে কোণ উৎপন্ন করিবে, সেইটী ও ছজঘ কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অথবা বৃহত্তর হইবে; তাহা হইলে অঙ্কিত রেখাটী ও গঘ সমান্তর হইতে পারে না, অর্থাৎ তাহারা পরস্পর সংলগ্ন হইবে। অতএব স্পষ্টই বোধ হইতেছে যে, ঐ দুইটী স্বতঃসিদ্ধের কোন প্রভেদ নাই; একটী আর একটীর রূপান্তর মাত্র। এই সকল কারণ বশত পাঠক বৃন্দের অনায়াসেই বোধ হইবে যে. ইউক্লিডের স্বতঃসিদ্ধের পরিবর্ত্তে প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ গ্রহণ করিলে কিছুই লাভ হইবে না; কেননা. যদি উহাদের মধ্যে একটী স্বতঃসিদ্ধ না হয়, তাহা হইলে অপরটীও স্বতঃসিদ্ধ হইতে পারে না। এই নিমিত্ত মূলে ইউক্লিডের স্বতঃসিদ্ধ গৃহীত হইয়াছে। সংক্ষেপে একথা বলা যাইতে পারে যে, যে সকল টীকাকার দ্বাদশের পরিবর্ত্তে একটী নূতন স্বতঃসিদ্ধ উদ্ভাবিত করিয়াছেন তাঁহাদের উদ্ভাবন প্রণালী ইউক্লিডের প্রণালী অপেক্ষা সহজ নয়; ইউক্লিডের স্বতঃসিদ্ধটী একবার স্বীকার করিয়া লইলে সমান্তর সরল রেখা সংক্রান্ত যাবতীয় বিষয় অনায়াস বোধগম্য হইয়া উঠে।

১ম—৩২। এই প্রতিজ্ঞা দ্বারা স্পষ্টই বুঝা যায় যে, কোন ত্রিভুজের একটী কোণ আর দুইটীর সমষ্টির সমান হইলে সেই কোণটী সম কোণ হইবে আর সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ সম কোণের দুই তৃতীয়াংশের সমান। পুনশ্চ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের একটী কোণ সম কোণ হইলে অপর দুইটী কোণের প্রত্যেকে অৰ্দ্ধ সম কোণ হইবে।

ত্রিভুজের কোন বাহু বর্দ্ধিত না করিয়া একটী কৌণিক বিন্দু দিয়া সম্মুখীন বাহুর সমান্তর রেখা টানিলেই প্রমাণ করা যায়

যে "ত্রিভুজের অন্তরস্থ তিন কোণ দুই সম কোণের সমান।"

কোন রেখাকে বর্দ্ধিত না করিলেও এক প্রান্ত হইতে তাহার সহিত সম কোণ করিয়া এক সরল রেখা টানা যাইতে পারে। কখ যেন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা; কখএর উপর (চিত্র করিয়া লও) কখগ সম বাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিয়া খগকে ঘ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর এবং গঘকে খগএর সমান কর। কঘ রেখা কখএর সহিত সম কোণ করিবে। গঘ বাহু গকএর সমান বলিয়া, গঘক কোণ গকঘ কোণের সমান এবং গখক কোণ গকখ কোণের সমান; এই সমান সমান কোণের সমষ্টি, অর্থাৎ ঘ ও খ কোণ একত্র যোগে খকঘ কোণের সমান; সুতরাং খকঘ কোণ একটী সম কোণ (১ম, ৩২)।

৩২শ প্রতিজ্ঞার দুইটী অনুমান সিমসন সাহেবের লিখিত; ইউক্লিডের মূল গ্রন্থে এই দুইটী দৃষ্ট হয় না। ২য় অনুমানটী সকল প্রকার ক্ষেত্র দ্বারা উপপন্ন হইতে পারেনা। ইউক্লিডের লিখিত যাবতীয় কোণ দুই সম কোণ অপেক্ষা ন্যূন; তিনি প্রবৃদ্ধ অর্থাৎ দুই সম কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর কোণের বিষয় উল্লেখ করেন নাই; আর তাঁহার গ্রন্থে প্রবৃদ্ধ কোণ বিশিষ্ট ক্ষেত্রের লক্ষণ কিম্বা তাহার নামও নাই। ইহাতে স্পষ্ট বোধ হইতেছে যে, এরূপ ক্ষেত্রের পরিচয় দেওয়া তাঁহার উদ্দেশ্য ছিল না। ৩২শ প্রতিজ্ঞার ২য় অনুমানটী এক বা তদধিক প্রবৃদ্ধ কোন বিশিষ্ট ক্ষেত্র দ্বারা সপ্রমাণ হয় না। ১ম অনুমানটী সকল প্রকার ক্ষেত্রেই প্রমাণ সিদ্ধ।

১ম—৩৫। ১ম অধ্যায়ের ৪থ প্রতিজ্ঞায় লিখিত হইয়াছে যে, "ত্রিভুজ দুইটী পরস্পর সমান হইবে।" এখানে "সমান" ইহার অর্থ, সর্ব্বতোভাবে সমান, অর্থাৎ একটী ত্রিভুজের উপর আর একটী ত্রিভুজ স্থাপন করিলে তাহারা সম্যক প্রকারে মিলিয়া যাইবে। ৩৫শ প্রতিজ্ঞায় "সমান" শব্দের অর্থ অন্য প্রকার। "সমান্তরিক দুইটী সমান" ইহা দ্বারা বুঝিতে হইবে যে, একের ক্ষেত্রফল অন্যের ক্ষেত্রফলের সমান।

১ম—৪০। এই প্রতিজ্ঞাটী অন্বয় মুখেও প্রমাণ করা যায়, যথা;—খগ ও গঘ সংযুক্ত কর; তাহা হইলে খঘগ ত্রিভুজ

ঘঙচ ত্রিভুজের সমান (১ম, ৩৮); আর কখগ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান কল্পিত হইয়াছে; সুতরাং কখগ ত্রিভুজ ঘখগ ত্রিভুজের সমান (স্বতঃ ১); অতএব কঘ, খগএর সমান্তর (১ম, ৩৯)।

১ম—৪৫। একটী চতুর্ভুজ সরল রৈখিক ক্ষেত্র লইয়া এই প্রতিজ্ঞার উপপত্তি হইয়াছে। ক্ষেত্রটী পঞ্চ অথবা তদধিক ভুজ বিশিষ্ট হইলেও, ঐ রূপেই অঙ্কন ও উপপত্তি হইত।

১ম—৪৭। কথিত আছে যে, গ্রীস দেশীয় মহাপণ্ডিত পিথাগোরাস ৩২শ ও ৪৭শ প্রতিজ্ঞার আবিষ্কার করেন। ৪৭শের ন্যায় প্রয়োজনীয় প্রতিজ্ঞা জ্যামিতিতে প্রায় দৃষ্ট হয় না।

সমকোণী ত্রিভুজের সম কোণের সম্মুখীন বাহুর নাম কর্ণ; আর অপর দুই বাহুর মধ্যে অবস্থা ভেদে একটীকে কোটি ও অপরটীকে ভুজ বলা যায়।

সমকোণী ত্রিভুজের বাহু গুলির উপর সমচতুর্ভুজ গুলি ভিন্ন ভিন্ন রূপে অঙ্কিত করা যায়। ইউক্লিড তন্মধ্যে এক রূপে অঙ্কিত করিয়াছেন। সর্ব্ব শুদ্ধ ছয় প্রকারে এই প্রতিজ্ঞার অঙ্কন হইতে পারে, যথা;—

(১) তিন সমচতুর্ভুজ তিন বাহুর বহির্দ্দিকে।

(২) তিন সমচতুর্ভুজ তিন বাহুর অন্তর দিকে।

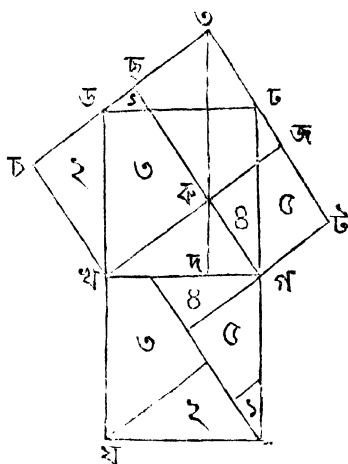
(৩) বৃহত্তর সমচতুর্ভুজটী কর্ণের অন্তর দিকে ও ক্ষুদ্রতর দুইটী অন্য দুই বাহুর বহির্দ্দিকে।

(৪) বৃহত্তর সমচতুর্ভুজটী কর্ণের বহির্দ্দিকে ও ক্ষুদ্রতর দুইটী অন্য দুই বাহুর অন্তর দিকে।

(৫) বৃহত্তর ও একটী ক্ষুদ্রতর সমচতুর্ভুজ দুই ভুজের বহির্দ্দিকে ও অপর সমচতুর্ভুজ অবশিষ্ট ভুজের অন্তর দিকে।

(৬) বৃহত্তর ও একটী ক্ষুদ্রতর সমচতুর্ভুজ দুই ভুজের অন্তর দিকে ও অপর সমচতুর্ভুজ অবশিষ্ট ভুজের বহির্দ্দিকে।

উক্তরূপ অঙ্কন হইলে উপপত্তিও বিভিন্ন প্রকার হইতে পারে; ইউক্লিড কেবল প্রথম প্রকারের উপপত্তি করিয়াছেন; এস্থলে আর দুই প্রকারের উপপত্তি লিখিত হইল; অবশিষ্ট

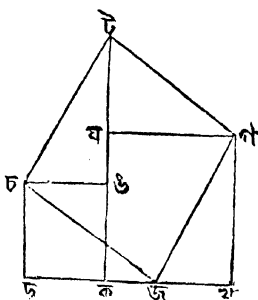
গুলি বিদ্যার্থীগণ অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞা স্বরূপ জ্ঞান করিয়া প্রমাণ করিবেন।

(১ম) এই চিত্রে কচ ও কট এই দুইটী ক্ষেত্র কখ ও কগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ; খড ও গঢ এই দুই রেখা খগএর উপর লম্ব; ডঢ ও তক সংযুক্ত কর এবং তককে দ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর। এক্ষণে খচড ও গটঢ এই দুই ত্রিভুজের প্রত্যেকে কখগ ত্রিভুজের সমান; ডগ একটী সমচতুর্ভুজ এবং ইহা খগ কণের অন্তর দিকে স্থাপিত হইয়াছে।

পরে, কছত ত্রিভুজ কখগ ত্রিভুজের সমান; এজন্য ছতক কোণ, কগখ অর্থাৎ চডখ কোণের সমান; সুতরাং খড ও কত উভয়রা পরস্পর সমান্তর। এই রূপে কত ও গঢ পরস্পর সমান্তর; অতএব খত ও গত এই দুইটী ক্ষেত্র সমান্তরিক।

পুনশ্চ, খছ সমচতুর্ভুজ খত সমান্তরিকের সমান; (১ম, ৩৫) আবার খত সমান্তরিক ডদ সমান্তরিকের সমান; অতএব খছ সমচতুর্ভুজ ডদ সমান্তরিকের সমান। এই রূপে সপ্রমাণ হইবে যে,

গজ সমচতুর্ভুজ চদ সমান্তরিকের সমান। সুতরাং খছ ও গজ সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে ডগ সমচতুর্ভুজের সমান।

তিন ভুজের বহির্দ্দিকে তিনটী সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিয়া পূর্ব্ব পৃষ্ঠের চিত্রে যেরূপ ১,২ ইত্যাদি সংখ্যা লিখিত হইয়াছে, তদ্রূপে চতুর্ভুজ তিনটীকে বিভক্ত করিলে, প্রত্যক্ষ হইবে যে, বৃহত্তর ক্ষেত্রটী ক্ষুদ্রতর দুইটীর সমান।

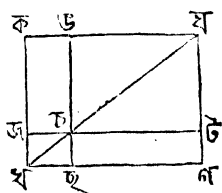
(২য়) কগ ও কচ দুইটী সমচতুর্ভুজ এরূপে স্থাপন কর যে, তাহাদের কখ ও কছ ভূমি এক রেখাস্থ হয়। ছজ ও ঙটকে কখএর সমান কর এবং টচ, চজ, জগ ও গট সংযুক্ত করিয়া দাও। এক্ষণে সহজেই প্রমাণ হইবে যে, টচঙ ত্রিভুজ গজখ ত্রিভুজের এবং টঘগ ত্রিভুজ চছজ ত্রিভুজের সহিত সর্ব্বতোভাবে সমান। অতএব টঘগ ও টঙচ ত্রিভুজ একত্র যোগে চছজ ও গজখ এই দুই ত্রিভুজের সমষ্টির সমান; এই দুই সমান বস্তুতে গঘঙচজ ক্ষেত্র যোগ করিলে, টচজগ চতুর্ভুজ চক ও কগ বর্গ ক্ষেত্র দ্বয়ের সমষ্টির সমান। আবার টঘগ, টচঙ, চছজ ও জখগ এই চারিটী ত্রিভুজ পরস্পর সর্ব্বতোভাবে সমান হওয়াতে অনায়াসে প্রমাণ করা যায় যে, টচজগ ক্ষেত্র সমচতুর্ভুজ এবং ইহা জগ কর্ণের উপর অঙ্কিত হইয়াছে আর চক ও কগ সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের বাহু গুলি জখ ও খগ বাহুর সমান; সুতরাং জখ ও খগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয় জগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান।

৪৭শ প্রতিজ্ঞার এই চিত্র দেখিলেও প্রতীত হইবে যে, দুইটী ক্ষুদ্র সমচতুর্ভুজকে খণ্ড খণ্ড করিয়া বৃহত্তরের উপর রাখিলে ঠিক বৃহৎ সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

২য় অধ্যায়।

সংজ্ঞা

১। প্রত্যেক সমকোণী সমান্তর রৈখিক ক্ষেত্রকে, অর্থাৎ আয়তকে, কোন একটী সম কোণাশ্রিত দুই বাহুর অন্তর্গত বলা যায়।

২। প্রত্যেক সমান্তরিকের অভ্যান্তরীণ ও কর্ণের পরিতস্থ কোন একটী সমান্তরিক ও দুইটী অনুপূরক ক্ষেত্রের যোগে যে ক্ষেত্র হয়, তাহাকে শঙ্কু ক্ষেত্র বলা যায়।

যথা, জছ সমান্তরিক এবং কচ ও চগ দুইটী অনুপূরক ক্ষেত্র একত্র যোগে, শঙ্কু হইয়াছে; সংক্ষেপে উল্লেখ করিতে হইলে, এই ক্ষেত্র যে যে সমান্তরিকের যোগে উৎপন্ন হয়, তাহাদের পরস্পর সম্মুখীন কোণিক বিন্দুতে লিখিত অক্ষর গুলি দ্বারা ব্যক্ত করিতে হইবে, যথা;—কছট অথবা ঙজগ।

১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই সরল রেখার মধ্যে যদি একটী কতিপয় অংশে বিভক্ত হয়, তবে এই দুই রেখার অন্তর্গত আয়ত, বিভাজিত রেখার ভিন্ন ভিন্ন অংশের ও অবিভাজিত রেখার অন্তর্গত আয়ত সমষ্টির সমান হইবে।

ক ও খগ দুই সরল রেখার মধ্যে খগ যেন ঘ, ঙ বিন্দুতে কতিপয় অংশে বিভক্ত হইয়াছে; ক ও খগএর অন্তর্গত আয়ত, ক ও খঘএর, ক ও ঘঙর এবং ক ও ঙগএর অন্তর্গত আয়ত সমষ্টির সমান হইবে।

খ বিন্দু হইতে খগএর সহিত সম কোণ করিয়া খচ সরল রেখা টান; [১ম, ১১।
এবং খচ হইতে কএর সমান খছ অংশ ছেদ কর; [১ম, ৩।

ছ বিন্দু দিয়া খগএর সমান্তর ছজ সরল রেখা টান; এবং ঘ, ঙ ও গ বিন্দু দিয়া খছএর সমান্তর ঘট, ঙঠ ও গজ সরল রেখা টান। [১ম, ৩১।

এক্ষণে, খজ আয়ত, খট, ঘঠ ও ঙজ এই কএকটী আয়তের সমান। ইহাদের মধ্যে খজ আয়ত ক ও খগএর অন্তর্গত; কেননা, এই আয়তটী খছ ও খগএর অন্তর্গত এবং খছ সরল রেখা কএর সমান; [অঙ্কন।
খট আয়ত ক ও খঘএর অন্তর্গত; কেননা ইহা খছ ও খঘএর অন্তর্গত এবং খছ, কএর সমান; [অঙ্কন।

আর ঘঠ, ক ও ঘঙর অন্তর্গত; কেননা, ঘট, খছএর সমান এবং খছ, কএর সমান; [১ম, ৩৪।

এই রূপে ঙজ, ক ও ঙগএর অন্তর্গত।

সুতরাং ক ও খগএর অন্তর্গত আয়ত, ক ও খঘএর, ক ও ঘঙর এবং ক ও ঙগএর অন্তর্গত আয়ত সমষ্টির সমান।

অতএব দুই সরল রেখার ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। খগ রেখার অংশ গুলি যেন, প, ফ, ব; ∴ খগ = প + ফ + ব; ∴ ক.খগ = ক (প + ফ + ব) = কপ + কফ + কব।

অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞা—১। দুই সরল রেখা প্রত্যেকে যদি কতিপয় অংশে বিভক্ত হয়, তবে এই দুই রেখার অন্তর্গত আয়ত, প্রত্যেক রেখার এক একটী অংশ লইলে যে সকল আয়ত হয় তাহাদিগের সমষ্টির সমান হইবে।

২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

এক সরল রেখা কোন দুই অংশে বিভক্ত হইলে, সমস্ত রেখার ও প্রত্যেক অংশের অন্তর্গত আয়ত একত্র যোগে, সমুদয় রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

কখ সরল রেখা যেন গ বিন্দুতে কোন দুই অংশে বিভক্ত হইয়াছে; কখ ও খগএর অন্তর্গত আয়ত এবং কখ ও কগএর অন্তর্গত আয়ত একত্র যোগে, কখএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।*

---

* "কখ ও কগএর অন্তর্গত আয়ত" এ প্রকার বাক্য পুনঃ পুনঃ প্রয়োগ না করিয়া কখন কখন সংক্ষেপে "কখ, কগএর

কখএর উপর কঘঙখ সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত কর; [১ম, ৪৬।

এবং গ বিন্দু দিয়া কঘ বা খঙর সমান্তর গচ রেখা টান। [১ম, ৩য়।

ক গ খ
ঘ চ ঙ

এক্ষণে, কঙ ক্ষেত্র, কচ ও গঙ আয়ত দ্বয়ের সমান;

ইহাদের মধ্যে কঙ ক্ষেত্র, কখএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ; আর কচ আয়ত, কখ ও কগএর অন্তর্গত; কেননা ইহা ঘক, কগএর অন্তর্গত এবং ঘক, কখএর সমান।

আবার গঙ আয়ত, কখ ও খগএর অন্তর্গত; কেননা খঙ রেখা কখএর সমান। সুতরাং কখ, কগএর আয়ত এবং কখ, খগএর আয়ত একত্র যোগে, কখএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান।

অতএব এক সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। ক যেন সমস্ত রেখা; ম ও ন ইহার দুই অংশ, অর্থাৎ, ক = ম + ন; ∴ ক × ক = ক (ম + ন);
অথবা, $ক^২$ = কম + কন।

অঃ প্রঃ—২। কখগ সমকোণী ত্রিভুজের ক সম কোণ হইতে ভূমির উপর কঘ লম্ব টানিয়া প্রমাণ কর যে,

$$খগ.খঘ + খগ.গঘ = খঘ^২ + ঘগ^২ + ২কঘ^২।$$

আয়ত” এই রূপ লেখা যাইবে; আর “কখএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ” ইহার পরিবর্তে “কখএর উপর সমচতুর্ভুজ” এই রূপ প্রকাশিত হইবে।

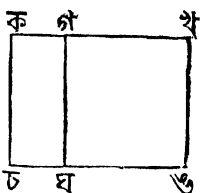
দ্বিতীয় অধ্যায়

৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

এক সরল রেখা কোন দুই অংশে বিভক্ত হইলে, সমস্ত রেখা ও এক অংশের অন্তর্গত আয়ত, দুই অংশের অন্তর্গত আয়ত ও পূর্ব্বোক্ত অংশের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

কখ সরল রেখা যেন গ বিন্দুতে কোন দুই অংশে বিভক্ত হইয়াছে; কখ, খগএর আয়ত, কগ ও গখএর আয়ত এবং খগএর উপর সমচতুর্ভুজ এই দুইএর যোগফলের সমান হইবে।

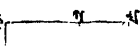
খগএর উপর খঙঘগ সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত কর; ঙঘকে চ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর এবং ক বিন্দু দিয়া গঘএর বা খঙর সমান্তর কচ সরল রেখা টান। [১ম, ৩১।

ক গ খ
চ ঘ ঙ

এক্ষণে, কঙ আয়ত, কঘ ও গঙ ক্ষেত্র দ্বয়ের সমান। ইহাদের মধ্যে কঙ আয়ত, কখ ও খগএর অন্তর্গত; কেননা ইহা কখ, খঙর অন্তর্গত এবং খঙ, খগএর সমান; আর কঘ আয়ত, কগ ও গখএর অন্তর্গত; কেননা গঘ, গখএর সমান;

এবং গঙ ক্ষেত্র, গখএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ।

সুতরাং কখ, খগএর আয়ত, কগ ও গখএর আয়ত এবং খগএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান।

অতএব এক সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। ক যেন সমস্ত রেখা ; ম ও ন ইহার দুই অংশ ; অর্থাৎ, ক = ম + ন, ∴ ক × ন = ন (ম + ন) ;
অথবা কন = মন + ন²।

অঃ প্রঃ—৩। এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে এরূপে বর্দ্ধিত করিতে হইবে যেন, সমস্ত বর্দ্ধিত রেখা ও বর্দ্ধিত অংশের অন্তর্গত আয়ত, নির্দ্দিষ্ট রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ হয়।

৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

এক সরল রেখা কোন দুই অংশে বিভক্ত হইলে, সমস্ত রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ, দুই অংশের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ এবং দুই অংশের অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়তের সমষ্টির সমান হইবে।

কখ সরল রেখা যেন গ বিন্দুতে কোন দুই অংশে বিভক্ত হইয়াছে ; কখএর উপর সমচতুর্ভুজ কগএর উপর ও গখএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় এবং কগ, গখএর দ্বিগুণিত আয়তের সমষ্টির সমান হইবে।

কখএর উপর কঘঙখ সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত কর ; [১ম, ৪৬।

ক গ খ

জ

এবং খঘ সংযুক্ত করিয়া, গ বিন্দু দিয়া কঘ বা খঙর সমান্তর গছচ সরল রেখা এবং ছ বিন্দু দিয়া কখ বা ঘঙর সমান্তর জট সরল রেখা টান। [১ম, ৩১।

পরে গচ, কঘএর সমান্তর বলিয়া, এবং খঘ ইহাদের উপর পতিত হওয়াতে, বহিস্থ খছগ কোণ অন্তরস্থ দূরবর্ত্তী

খঘক কোণের সমান; [১ম, ২৯।
ইহাদের মধ্যে খঘক কোণ, ঘখক কোণের সমান, [১ম, ৫।
কেননা, কঘ ও কখ প্রত্যেকে সমচতুর্ভুজের বাহু বলিয়া, পরস্পর সমান;
অতএব গছখ কোণ, গখছ কোণের সমান; [স্বতঃ ১।
এই হেতু খগ বাহু গছ বাহুর সমান; [১ম, ৬।
এই দুইটী বাহুর মধ্যে, গখ বাহু ছটএর এবং গছ বাহু খটএর সমান; [১ম, ৩৪।
সুতরাং গছটখ ক্ষেত্র সমবাহু।
আর ইহা সম কোণ বিশিষ্টও বটে; কারণ গছ, খটএর সমান্তর এবং ইহাদের উপর গখ রেখার পাত হইয়াছে বলিয়া, টখগ ও খগছ কোণ দ্বয় একত্র যোগে, দুই সম কোণের সমান। [১ম, ২৯।
ইহাদের মধ্যে গখট এক সম কোণ, [১ম, ৩০ সং।
অতএব ছগখ কোণও এক সম কোণ। [স্বতঃ ৩।
এই হেতু ইহাদের সম্মুখীন গছট ও খটছ কোণ প্রত্যেকে সম কোণ। [১ম, ৩৪ ও স্বতঃ ১।
সুতরাং গছটখ ক্ষেত্র সমকোণী; আর ইহা যে সমবাহু, তাহা সপ্রমাণ হইয়াছে;
অতএব ইহা একটী সমচতুর্ভুজ এবং গখএর উপর অঙ্কিত হইয়াছে।
এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে যে, জচ একটী সমচতুর্ভুজ এবং ইহা জছএর উপর অঙ্কিত হইয়াছে; আর জছ রেখা কগএর সমান। [১ম, ৩৪।

অতএব জচ ও গট এই দুইটী ক্ষেত্র কগ ও গখএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ।

আবার কছ অনুপূরক ক্ষেত্র ছঙ অনুপূরক ক্ষেত্রের সমান, [১ম, ৪৩।
এবং কছ আয়ত, কগ ও গখএর অন্তর্গত ; কেননা গছ, গখএর সমান ;
অতএব ছঙ আয়ত, কগ ও গখএর অন্তর্গত আয়তের সমান। [স্বতঃ ১।
সুতরাং কছ ও ছঙ একত্র যোগে, কগ ও গখএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান ;
আর জচ ও গট, কগ ও গখএর উপর দুই সমচতুর্ভুজ।
অতএব জচ, গট, কছ ও ছঙ এই চারি ক্ষেত্র, কগএর উপর ও গখএর উপর সমচতুর্ভুজের এবং কগ ও গখএর দ্বিগুণিত আয়তের সমষ্টির সমান ;
আর জচ, গট, কছ ও ছঙ এই চারিটীতে, সমস্ত কঘঙখ ক্ষেত্র হইয়াছে এবং এই ক্ষেত্রটী কখএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ ;
সুতরাং কখএর উপর সমচতুর্ভুজ, কগএর উপর ও গখএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় এবং কগ, গখএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান।
অতএব এক সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অনুমান। এই উপপত্তি হইতে সহজেই বোধ হইবে যে, সমচতুর্ভুজের অভ্যন্তরীণ ও কর্ণের পারিতস্থ সমান্তরিক গুলি সমচতুর্ভুজ।

বীজঃ উপঃ। ক যেন সমস্ত রেখা এবং ম ও ন ইহার দুই অংশ; অর্থাৎ, ক = ম + ন; ∴ ক² = (ম + ন)² = ম² + ন² + ২মন।

অঃ প্রঃ—৪। যদি কখগ সমকোণী ত্রিভুজের ক সম কোণ হইতে ভূমির উপর কঘ লম্ব টানা যায়, তবে খঘ ও ঘগএর অন্তর্গত আয়ত, কঘএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন সরল রেখা দুই সমান এবং দুই অসমান অংশে ছেদিত হইলে, অসমান অংশ দ্বয়ের অন্তর্গত আয়ত এবং ছেদ বিন্দু দ্বয়ের মধ্যস্থ রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, নির্দ্দিষ্ট রেখার অর্দ্ধেকের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

কখ সরল রেখা যেন গ বিন্দুতে দুই সমান অংশে ও ঘ বিন্দুতে দুই অসমান অংশে ছেদিত হইয়াছে; কঘ, ঘখএর আয়ত এবং গঘএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, গখএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

গখএর উপর গঙচখ সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত কর; [১ম, ৪৬।
এবং খঙ সংযুক্ত করিয়া,
ঘ বিন্দু দিয়া গঙ বা খচএর,
সমান্তর ঘজছ সরল রেখা, জ বিন্দু দিয়া গখ বা ঙচএর সমান্তর টঠড সরল রেখা এবং ক বিন্দু দিয়া গঠ বা খডএর সমান্তর কট সরল রেখা টান। [১ম, ৩১।

পরে, গজ অনুপূরক ক্ষেত্র জচ অনুপূরক ক্ষেত্রের সমান

বলিয়া, প্রত্যেকর সহিত ঘড যোগ করিলে, সমস্ত গড, সমস্ত ঘচএর সমান হইবে। [স্বতঃ ২।
ইহাদের মধ্যে গড, কঠএর সমান; [১ম, ৩৬।
কেননা কগ, গখএর সমান, [কল্পনা।
অতএব ঘচও কঠএর সমান; [স্বতঃ ১।
প্রত্যেকের সহিত গজ যোগ করিলে, সমস্ত কজ, ঘচও গজএর সমষ্টির সমান হইবে: [স্বতঃ ২।
ইহাদের মধ্যে কজ ক্ষেত্র কঘ, ঘখএর আয়ত; কেননা ঘজ, ঘখএর সমান; [২য়, ৪, অনু।
এবং ঘচ ও গজ একত্র যোগে, গডছ শঙ্কু ক্ষেত্র হইয়াছে;
অতএব গডছ শঙ্কু, কঘ ও ঘখএর আয়তের সমান;
প্রত্যেকের সহিত ঠছ অর্থাৎ গঘএর উপর সমচতুর্ভুজ যোগ করিলে, [২য়, ৪, অনু ও ১ম, ৩৪।
গডছ শঙ্কু ও ঠছ একত্র যোগে, কঘ ও ঘখএর আয়ত এবং গঘএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান হইবে। [স্বতঃ ২।
এই দুই সমান বস্তুর মধ্যে গডছ শঙ্কু ও ঠছ এই দুইটী দ্বারা গচ ক্ষেত্র পূর্ণ হইয়াছে, আর এই ক্ষেত্রটী গখএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ;
সুতরাং কঘ, ঘখএর আয়ত এবং গঘএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, গখএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান।
অতএব কোন সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অনুমান। এই প্রতিজ্ঞা দ্বারা সহজেই বোধ হইবে যে, কগ ও গঘ এই দুই অসমান সরল রেখার উপর অঙ্কিত

দুই সমচতুর্ভুজের অন্তর, ইহাদের সমষ্টির ও অন্তরের অন্তর্গত আয়তের সমান।

বীজঃ উপঃ। মনে কর, কখ = ২ ক; গঘ = ম; ∴ কঘ = ক + ম; ঘখ = গখ − গঘ = ক − ম;
∴ (ক + ম) (ক − ম) = ক^2 − ম^2; ∴ (ক + ম) (ক − ম) + ম^2 = ক^2 অর্থাৎ কঘ.ঘখ = গখ^2।

অঃ প্রঃ—৫। নির্দ্দিষ্ট পরিমিতি বিশিষ্ট যাবতীয় সমকোণী সমান্তরিকের মধ্যে সমচতুর্ভুজের ক্ষেত্র ফল সর্ব্বাপেক্ষা বৃহৎ।

৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যদি কোন সরল রেখা দ্বিখণ্ডিত হয় এবং তাহাকে কোন বিন্দু পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত করা যায়, তাহা হইলে সমস্ত বর্দ্ধিত রেখা ও বর্দ্ধিত অংশের অন্তর্গত আয়ত এবং দ্বিখণ্ডিত রেখার অর্দ্ধেকের উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ঐ অর্দ্ধ রেখা এবং বর্দ্ধিত অংশের যোগে উৎপন্ন রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

কখ সরল রেখা যেন গ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত ও ঘ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত হইয়াছে; কঘ, ঘখএর আয়ত এবং গখএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, গঘএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

গঘএর উপর গঙচঘ সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত কর; এবং ঘঙ সংযুক্ত করিয়া খ বিন্দু দিয়া গঙ বা ঘচএর সমান্তর খজছ, জ বিন্দু দিয়া কঘ বা

ক গ খ ঘ
জ
ঙ ছ চ

ঙচএর সমান্তর টঠড এবং ক বিন্দু দিয়া গঠ বা ঘডএর সমান্তর কট সরল রেখা টান। [১ম, ৩১।

পরে, কগ রেখা গখএর সমান বলিয়া, [কল্পনা।
কঠ আয়ত গজ আয়তের সমান; [১ম, ৩৬।
ইহাদের মধ্যে গজ, জচএর সমান; [১ম, ৪৩।
এই হেতু কঠ, জচএর সমান; [স্বতঃ ১।
ইহাদের প্রত্যেকের সহিত গড যোগ করিলে, সমস্ত কড আয়ত, গডছ শঙ্কুর সমান হইবে। [স্বতঃ ২।
এই দুইএর মধ্যে কড আয়ত, কঘ ও ঘখএর অন্তর্গত; কেননা, ঘড বাহু, ঘখএর সমান; [২য়, ৪, অনু।
অতএব কঘ, ঘখএর আয়ত গডছ শঙ্কুর সমান। [স্বতঃ ১।
ইহাদের প্রত্যেকের সহিত ঠছ অর্থাৎ গখএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ যোগ করিলে, [২য়, ৪, অনু ও ১ম, ৩৪।
কঘ, ঘখএর আয়ত এবং গখএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, গডছ শঙ্কু এবং ঠছ ক্ষেত্রের সমান;
এই দুই সমান বস্তুর মধ্যে গডছ শঙ্কু এবং ঠছ এই দুইটী দ্বারা, গচ ক্ষেত্র হইয়াছে; আর গচ ক্ষেত্র, গঘএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ;
সুতরাং কঘ, ঘখএর আয়ত এবং গখএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, গঘএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান।
অতএব যদি কোন সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। যদি কগ = গখ = ক এবং খঘ = ম হয়, তবে, (২ক + ম) ম = ২ কম + ম^{২}; ∴ (২ক + ম) ম + ক^{২} = ক^{২} + ২ কম + ম^{২} = (ক + ম)^{২}, অর্থাৎ, কঘ.ঘখ = গঘ^{২}।

অঃ প্রঃ—৬। কখগ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক শৃঙ্গ হইতে ভূমি বা বর্দ্ধিত ভূমি পর্য্যন্ত কঘ সরল রেখা টানিয়া প্রমাণ কর যে, কঘ এবং কগএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের অন্তর, খঘ ও ঘগএর অন্তর্গত আয়তের সমান।

৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

এক সরল রেখা কোন দুই অংশে বিভক্ত হইলে, সমস্ত রেখার এবং এক অংশের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ, সমস্ত রেখার এবং ঐ অংশের অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়ত ও অপর অংশের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

কখএর উপর কঘঙখ সমচতুর্ভুজ আঁকিয়া, পূর্ব্ববর্ত্তী প্রতিজ্ঞা গুলির ন্যায় চিত্র অঙ্কিত কর।

পরে কছ, ছঙর সমান বলিয়া, [১ম, ৪৩

প্রত্যেকে গট যোগ করিলে, সমস্ত কট সমস্ত গঙর সমান হইবে ; [স্বতঃ ২।

অতএব কট ও গঙ একত্র যোগে কটএর দ্বিগুণ ;

আবার কট ও গঙ একত্র যোগে কটচ শঙ্কু এবং গট সমচতুর্ভুজের সমান ;

এই হেতু কটচ শঙ্কু এবং গট সমচতুর্ভুজ, কটএর দ্বিগুণ ;

আর যে ক্ষেত্র কটএর দ্বিগুণ তাহা কখ ও খগএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান ;

কেননা, খট বাহু খগএর সমান ; [২য়, ৪, অনু।

অতএব কটচ শঙ্কু এবং গট সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে কখ ও খগএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান ;

আর এই দুই সমান বস্তুতে জচ অর্থাৎ কগএর উপর সমচতুর্ভুজ যোগ করিলে, [২য়, ৪, অনু ও ১ম, ৩৪।

কটচ শঙ্কু এবং গট ও জচ সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে কখ ও খগএর দ্বিগুণিত আয়ত এবং কগএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

ইহাদের মধ্যে কটচ শঙ্কু এবং গট ও জচ সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে সমস্ত কঙ ক্ষেত্র এবং গট ক্ষেত্র হইয়াছে ; আর এই দুইটী ক্ষেত্র কখ ও খগএর উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ ;

সুতরাং কখ ও খগএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কখ ও খগএর দ্বিগুণিত আয়ত এবং কগএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান।

অতএব এক সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

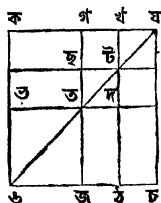
বীজঃ উপঃ। ক যেন সমস্ত রেখা, এবং ম ও ন দুই অংশ ; $\therefore$ ক = ম + ন ; অথবা, ক^২ = ম^২ + ২মন + ন^২ ; $\therefore$ ক^২ + ন^২ = ম^২ + ২মন + ২ ন^২ = ম^২ + ২ ন (ম + ন) = ম^২ + ২ কন।

অঃ প্রঃ – ৭। ক, খ, গ ও ঘ একই রেখাস্থ চারি বিন্দু ; এই রেখায়, কখ ও গঘএর মধ্য বিন্দু দ্বয় হইতে সমদূরে ঙ বিন্দু লও ; পরে কঘ রেখার যে কোন স্থানে চ বিন্দু কল্পনা করিয়া প্রমাণ কর যে, কচ^২ + খচ^২ + গচ^২ + ঘচ^২ + ৪ঙচ^২ = কঙ^২ + খঙ^২ + গঙ^২ + ঘঙ^২।

৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

এক সরল রেখা কোন দুই অংশে বিভক্ত হইলে, সমস্ত রেখার ও এক অংশের অন্তর্গত চতুর্গুণিত আয়ত এবং অপর অংশের উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে সমস্ত রেখার ও প্রথমোক্ত অংশের যোগে উৎপন্ন রেখার উপর সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

কখ সরল রেখা যেন গ বিন্দুতে কোন দুই অংশে বিভক্ত হইয়াছে; কখ, খগএর চতুর্গুণিত আয়ত এবং গকএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, কখ ও খগএর যোগে উৎপন্ন রেখার উপর সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

কখকে ঘ পর্য্যন্ত এরূপে বৃদ্ধি কর, যেন খঘ, খগএর সমান হয়; [স্বীঃ ২ ও ১ম, ৩। এবং কঘএর উপর কঙচঘ সমচতুর্ভুজ আঁকিয়া, পূর্ব্ব প্রতিজ্ঞা গুলির ন্যায় এই প্রতিজ্ঞার অভ্যন্তরীণ দুইটী চিত্র অঙ্কিত কর।

পরে গখ, খঘএর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন।

এবং গখ, ছটএর ও খঘ, টঢএর সমান বলিয়া, [১ম, ৩৪।

ছট, টঢএর সমান। [স্বতঃ ১।

এই কারণে, তদ, দণএর সমান;

আর গখ, খঘএর ও ছট, টঢএর সমান হওয়াতে,

গট আয়ত, খচ আয়তের এবং ছদ আয়ত, দচ আয়তের সমান ; [১ম, ৩৬।

আবার গট, দচএর সমান ; কেননা, ইহারা গণ সমান্তরিকের অনুপূরক ক্ষেত্র ; [১ম, ৪৩।

এই হেতু খচও ছদএর সমান ; [স্বতঃ ১।

সুতরাং খচ, গট, ছদ ও দণ এই চারিটী আয়ত পরস্পর সমান এবং এই চারিটী একত্র যোগে একটীর অর্থাৎ গটএর চতুর্গুণ।

পুনর্ব্বার গখ, খঘএর সমান, [অঙ্কন।

ও খঘ, খটএর সমান, [২য়, ৪, অনু।

অর্থাৎ গছএর সমান, [১ম, ৩৪।

এবং গখ, ছটএর অর্থাৎ ছতএর সমান, [২য়, ৪, অনু।

অতএব গছ, ছতএর সমান ; [স্বতঃ ১।

আর গছ, ছতএর এবং তদ, দণএর সমান বলিয়া, কছ আয়ত, ডত আয়তের এবং তঠ আয়ত দচ আয়তের সমান। [১ম, ৩৬।

ইহাদের মধ্যে ডত, তঠএর সমান ; কেননা, ইহারা ডঠ সমান্তরিকের অনুপূরক ক্ষেত্র, [১ম, ৪৩।

এই হেতু কছও দচএর সমান ; [স্বতঃ ১।

সুতরাং কছ, ডত, তঠ ও দচ এই চারি আয়ত পরস্পর সমান এবং এই চারিটী একত্র যোগে একটীর অর্থাৎ কছএর চতুর্গুণ।

আবার প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, গট, খচ, ছদ ও দচ এই চারিটী গটএর চতুর্গুণ ; অতএব যে আটটী আয়ত

লইয়া কগজ শঙ্কু হইয়াছে, তাহারা একত্র যোগে কটএর চতুর্গুণ ;

আর কট আয়ত, কখ ও খগএর অন্তর্গত ; কেননা খট, খগএর সমান ;

এই হেতু কখ, খগএর চতুর্গুণিত আয়ত কটএর চতুর্গুণ ; এবং কগজ শঙ্কু কটএর চতুর্গুণ সপ্রমাণ হইয়াছে ;

অতএব কখ, খগএর চতুর্গুণিত আয়ত, কগজ শঙ্কুর সমান ; [স্বতঃ ১।

প্রত্যেকে ভজ, অর্থাৎ কগএর উপর সমচতুর্ভুজ যোগ করিলে, [২য়, অনু ও ১ম, ৩৪।

কখ, খগএর চতুর্গুণিত আয়ত ও কগএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে কগজ শঙ্কু এবং ভজ সমচতুর্ভুজের সমান ; ইহাদের মধ্যে কগজ শঙ্কু এবং ভজ সমচতুর্ভুজে, বঙচঘ ক্ষেত্র হইয়াছে ; আর এই ক্ষেত্র কঘএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ ;

সুতরাং কখ, খগএর অন্তর্গত চতুর্গুণিত আয়ত ও কগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে কঘএর উপর, অর্থাৎ কখ ও খগএর যোগে উৎপন্ন রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান।

অতএব এক সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। সমস্ত রেখা যেন ক ; ম এবং ন ইহার দুই অংশ ; $\therefore$ ম + ন = ক, অথবা ম = ক—ন ; $\therefore$ ম^২ = ক^২—২কন + ন^২ ; সমীকরণের দুই পার্শ্বে ৪কন যোগ করিলে, ম^২ + ৪কন = ক^২ + ২ কন + ন^২ = (ক + ন)^২।

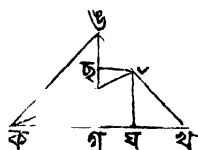
অঃ প্রঃ—৮। প্রতিপন্ন কর যে, দুই সরল রেখার সমষ্টির উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ, ঐ দুই রেখার অন্তরের উপর সমচতুর্ভুজ এবং উহাদের অন্তর্গত চতুর্গুণিত আয়তের সমান।

৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন সরল রেখা দুই সমান এবং দুই অসমান অংশে বিভক্ত হইলে, দুই অসমান অংশের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, অর্দ্ধ রেখার উপর এবং ছেদ বিন্দু দ্বয়ের মধ্যস্থ রেখার উপর দুই সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ হইবে।

কখ সরল রেখা যেন গ বিন্দুতে দুই সমান ভাগে এবং ঘ বিন্দুতে দুই অসমান ভাগে বিভক্ত হইয়াছে; কঘ ও ঘখ এর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজদ্বয়, কগ ও গঘএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ হইবে।

গ বিন্দু হইতে কখএর সহিত সম কোণ করিয়া গঙ সরল রেখা টান, [১ম, ১১।

এবং ইহাকে গক বা গখএর সমান কর; [১ম, ৩।

আর ঙক ও ঙখ সংযুক্ত করিয়া, ঘ বিন্দু দিয়া গঙর সমান্তর ঘচ সরল রেখা ও চ বিন্দু দিয়া খকএর সমান্তর চছ সরল রেখা টান, [১ম, ৩১।

এবং কচ সংযুক্ত কর।

পরে কগ, গঙর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন।

ঙকগ কোণ, কঙগ কোণের সমান ; [১ম, ৫।
আর কগঙ কোণ, সম কোণ বলিয়া, [অঙ্কন।
ঙকগ ও কঙগ অপর দুই কোণ একত্র যোগে এক সম কোণের সমান ; [১ম, ৩২।
এবং এই দুই কোণ পরস্পর সমান বলিয়া,
প্রত্যেকেই অর্দ্ধ সম কোণ।
এই কারণে, গঙখ ও ঙখগ কোণ প্রত্যেকে অর্দ্ধ সম কোণ ;
অতএব সমস্ত কঙঘ কোণ, এক সম কোণ।

আবার সপ্রমাণ হইয়াছে যে, ছঙচ কোণ অর্দ্ধ সম কোণ, এবং ঙছচ কোণ অন্তরস্থ দূরবর্ত্তী ঙগঘ কোণের সমান বলিয়া এক সম কোণ ; [১ম, ২৯।
অতএব অবশিষ্ট ঙচছ কোণ অর্দ্ধ সম কোণ ;
সুতরাং, ছঙচ কোণ ঙচছ কোণের সমান হওয়াতে,
ঙছ বাহু চছ বাহুর সমান। [১ম, ৬।

পুনর্ব্বার, প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, খ কোণ, অর্দ্ধ সম কোণ, এবং চঘখ কোণ অন্তরস্থ দূরবর্ত্তী ঙগখ কোণের সমান বলিয়া এক সম কোণ ; [১ম, ২৯।
অতএব অবশিষ্ট খচঘ কোণ অর্দ্ধ সম কোণ ;
সুতরাং খ কোণ খচঘ কোণের সমান হওয়াতে,
ঘচ বাহু ঘখ বাহুর সমান। [১ম, ৬।

আবার কগ, গঙর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন।
কগএর উপর সমচতুর্ভুজ গঙর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ;
এই হেতু কগ ও গঙর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় কগএর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ ;

আর কগঙ, সম কোণ হওয়াতে, কঙর উপর সমচতুর্ভুজ, কগ ও গঙর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান; [১ম, ৪৭।
অতএব কঙর উপর সমচতুর্ভুজ, কগএর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ।

পুনর্ব্বার, ঙছ রেখা ছচএর সমান বলিয়া,
ঙছএর উপর সমচতুর্ভুজ, ছচএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান;
এই হেতু ঙছ ও ছচএর উপর দুই সমচতুর্ভুজ, ছচএর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ;
আর ঙছচ কোণ, এক সম কোণ বলিয়া, ঙচএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ, ঙছ ও ছচএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান; [১ম, ৪৭।
অতএব ঙচএর উপর সমচতুর্ভুজ, ছচএর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ;
এবং ছচ, গঘএর সমান; [১ম, ৩৪।
এই হেতু ঙচএর উপর সমচতুর্ভুজ, গঘএর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ;
আর কঙর উপর সমচতুর্ভুজ, কগএর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ সপ্রমাণ হইয়াছে;
সুতরাং কঙ ও ঙচএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কগ ও গঘএর উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ।
ইহাদের মধ্যে কঙ ও ঙচএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কচএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান; কেননা, কঙচ কোণ সম কোণ। [১ম, ৪৭।

অতএব কচএর উপর সমচতুর্ভুজ, কগ ও গঘএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ;

আর কঘচ সম কোণ হওয়াতে কঘ ও ঘচএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কচএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান; [১ম, ৪৭।

এই হেতু কঘ ও ঘচএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কগ ও গঘএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ;

আর ঘচ, ঘখএর সমান বলিয়া, কঘ ও ঘখএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কগ ও গঘএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ।

অতএব কোন সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। সমস্ত কখ রেখার পরিমাণ যেন ২ক; গঘ = ম; ∴ কঘ = ক + ম; ঘখ = ক − ম; (ক + ম)^2 = ক^2 + ২কম + ম^2; এবং (ক − ম)^2 = ক^2 − ২ কম + ম^2; এই দুই সমীকরণ যোগ করিলে, (ক + ম)^2 + (ক − ম)^2 = ২ক^2 + ২ম^2।

অঃ প্রঃ—৯। কোন সরল রেখাকে এমন দুই অংশে বিভক্ত করিতে হইবে যেন, তাহাদের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয়, অন্য রূপে বিভক্ত অংশ দ্বয়ের উপর দুই সমচতুর্ভুজ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়।

১০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

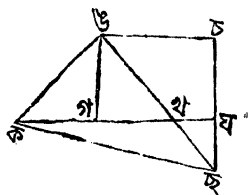
এক সরল রেখাকে দ্বিখণ্ড করিয়া কোন বিন্দু পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত করিলে, সমস্ত বর্দ্ধিত রেখার উপর এবং বর্দ্ধিত অংশের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, দ্বিখণ্ডিত রেখার অর্দ্ধেকের উপর এবং

অৰ্দ্ধ রেখা ও বৰ্দ্ধিত অংশের যোগে উৎপন্ন রেখার উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ হইবে।

কখ সরল রেখাকে গ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড করিয়া ঘ বিন্দু পর্য্যন্ত বৰ্দ্ধিত করিলে কঘ ও ঘখএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে, কগ ও গঘএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ হইবে।

গ বিন্দু হইতে কখএর সহিত সম কোণ করিয়া গঙ সরল রেখা টান, [১ম, ১১।

এবং ইহাকে কগ বা গখএর সমান কর; [১ম, ৩।

কঙ ও ঙখ সংযুক্ত কর; ঙ বিন্দু দিয়া কখএর সমান্তর ঙ চএবং ঘ বিন্দু দিয়া গঙর সমান্তর ঘচ সরল রেখা টান। [১ম, ৩১।

এক্ষণে. ঙচ সরল রেখা ঙগ ও চঘ সমান্তর রেখা দ্বয়ের উপর পতিত হওয়াতে, গঙচ ও ঙচঘ কোণ একত্র যোগে, দুই সমকোণের সমান; [১ম, ২৯।

এই হেতু খঙচ ও ঙচঘ একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর;

সুতরাং ঙখ ও চঘকে খ ও ঘএর দিকে বৰ্দ্ধিত করিলে সংলগ্ন হইবে; [স্বতঃ ১২।

তাহারা যেন ছ বিন্দুতে সংলগ্ন হইল; কছ সংযুক্ত কর।

পরে, কগ বাহু গঙর সমান বলিয়া, [অঙ্কন।

গঙক কোণ ঙকগ কোণের সমান; [১ম, ৫।

আর কগঙ কোণ, এক সম কোণ ; [অঙ্কন।
এই হেতু গঙক ও ঙকগ এই দুই কোণের প্রত্যেকে অর্দ্ধ সম কোণ। [১ম, ৩২।
এই কারণে, গঙখ ও ঙখগ কোণ, প্রত্যেকে অর্দ্ধ সম কোণ;
অতএব কঙখ, এক সম কোণ।

আবার ঙখগ অর্দ্ধ সম কোণ বলিয়া, ইহার প্রতীপ ঘখছ কোণও অর্দ্ধ সম কোণ ; [১ম, ১৫।
আর খঘছ কোণ, ইহার একান্তর ঘগঙ কোণের সমান বলিয়া এক সম কোণ ; [১ম, ২৯।
এই হেতু অবশিষ্ট ঘছখ কোণ অর্দ্ধ সম কোণ, [১ম, ৩২।
সুতরাং ইহা ঘখছ কোণের সমান ;
অতএব খঘ বাহু ঘছএর সমান। [১ম, ৬।

পুনর্ব্বার, ঙছচ কোণ, অর্দ্ধ সম কোণ,
এবং চ কোণ ইহার সম্মুখীন গ কোণের সমান বলিয়া, এক সম কোণ ; [১ম, ৩৪।
এই হেতু অবশিষ্ট ছঙচ কোণ অর্দ্ধ সম কোণ, [১ম, ৩২।
সুতরাং ইহা ঙছচ কোণের সমান ;
অতএব ছচ বাহু, চঙর সমান। [১ম, ৬।

আবার ঙগ, গকএর সমান বলিয়া, ঙগএর উপর সমচতুর্ভুজ গকএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ;
এই হেতু ঙগ ও গকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে গকএর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ ; আর ঙগ ও গকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে, কঙর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ; [১ম, ৪৭।

অতএব কঙর উপর সমচতুর্ভুজ, কগএর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ।

পুনর্ব্বার, ছচ বাহু, চঙর সমান হওয়াতে, ছচএর উপর সমচতুর্ভুজ চঙর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ;
এই হেতু ছচ ও চঙর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে চঙর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ ;
আর ছচ ও চঙর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে ঙছএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান : [১ম, ৪৭।
অতএব ঙছএর উপর সমচতুর্ভুজ ঙচএর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ ;
এবং ঙচ, গঘএর সমান হওয়াতে, [১ম, ৩৪।
ঙছএর উপর সমচতুর্ভুজ গঘএর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ ;
আর প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, কঙর উপর সমচতুর্ভুজ কগএর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ।
এই হেতু কঙ ও ঙছএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কগ ও গঘএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ।
ইহাদের মধ্যে কঙ ও ঙছএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কছএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ; [১ম, ৪৭।
অতএব কছএর উপর সমচতুর্ভুজ কগ ও গঘএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ।
আবার কছএর উপর সমচতুর্ভুজ কঘ ও ঘছএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের সমান ; [১ম, ৪৭।
সুতরাং কঘ ও ঘছএর উপর দুই সমচতুর্ভুজ, কগ ও

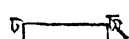
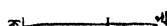
গঘএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের দ্বিগুণ;

এবং ঘছ, ঘখএর সমান বলিয়া,

কঘ ও ঘখএর উপর দুই সমচতুর্ভুজ, কগ ও গঘএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের দ্বিগুণ।

অতএব এক সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। কখএর পরিমাণ যেন ২ক এবং খঘ = ম;
∴ কঘ = ২ক + ম, গঘ = ক + ম; $(২ক + ম)^২ = ৪ক^২ + ৪কম + ম^২$;
সমীকরণের দুই দিকে $ম^২$ যোগ করিলে,
$(২ক+ম)^২ + ম^২ = ৪ক^২ + ৪কম + ২ম^২ = ২ক^২ + ২ক^২ + ৪কম + ২ম^২$
$= ২ক^২ + ২(ক^২ + ২কম + ম^২) = ২ক^২ + ২(ক+ম)^২$।

অাঃ প্রঃ—১০। কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে এরূপে বর্দ্ধিত কর, যেন সমস্ত বর্দ্ধিত রেখার ও বর্দ্ধিত অংশের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, নির্দ্দিষ্ট রেখার অর্দ্ধেকের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের ছয় গুণ হয়।

১১। কোন ত্রিভুজের বাহু দ্বয়ের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, অর্দ্ধ ভূমির এবং ভূমির মধ্য বিন্দু ও শৃঙ্গ সংযোজক রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের দ্বিগুণ।

১২। সমান্তরিকের দুই কর্ণের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে, চারি বাহুর উপর অঙ্কিত চারিটী সমচতুর্ভুজের সমান।

১১ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে এমন দুই অংশে বিভক্ত করিতে হইবে যেন সমস্ত রেখা ও এক অংশের অন্তর্গত আয়ত, অন্য অংশের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হয়।

কখ যেন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা; কখকে এমন দুই অংশে বিভক্ত করিতে হইবে, যেন সমস্ত রেখার ও এক অংশের অন্তর্গত আয়ত, অন্য অংশের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হয়।

কখএর উপর কখঘগ সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিয়া, কগকে ঙ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর; [১ম, ৪৬ ও ১০।

খঙ সংযুক্ত কর; এবং ঙক সরল রেখাকে চ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত করিয়া ঙচকে ঙখএর সমান কর। [১ম, ৩।

কচএর উপর কচছজ সমচতুর্ভুজ আঁক;

তাহা হইলে কখ সরল রেখা জ বিন্দুতে এরূপে বিভক্ত হইবে যে, কখ ও খজএর আয়ত, কজএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান।

ছজকে ট পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর।

পরে, কগ সরল রেখা ঙ বিন্দুতে দুই সমান অংশে বিভক্ত হইয়া চ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত হইয়াছে বলিয়া, গচ ও চকএর আয়ত এবং কঙর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ঙচএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান, [২য়, ৬।

আর ঙচ, ঙখএর সমান হওয়াতে,

গচ, চকএর আয়ত এবং কঙর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ঙখএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান।

ইহাদের মধ্যে ঙখএর উপর সমচতুর্ভুজ, ঙক ও কখএর

উপর দুই সমচতুর্ভুজের সমান; কেননা ঙকখ' কোণ সম কোণ, [১ম, ৪৬।

অতএব গচ, চকএর আয়ত এবং কঙর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, কঙ ও কখএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান।

এই দুই সমান বস্তু হইতে কঙর উপর সমচতুর্ভুজ বিয়োগ করিলে,

অবশিষ্ট গচ ও চকএর আয়ত, কখএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান। [স্বতঃ ৩।

আবার চট ক্ষেত্র, গচ ও চকএর আয়ত; কেননা চছ, চকএর সমান;

এবং কঘ ক্ষেত্র, কখএর উপর সমচতুর্ভুজ;

এই হেতু কঘ ক্ষেত্র, চটএর সমান;

প্রত্যেক হইতে সামান্য কট অংশ বিয়োগ করিলে, অবশিষ্ট চজ অবশিষ্ট জঘএর সমান হইবে। [স্বতঃ ৩।

ইহাদের মধ্যে জঘ ক্ষেত্র, কখ ও খজএর অন্তর্গত আয়ত, কেননা কখ, খঘএর সমান;

এবং চজ ক্ষেত্র, কজএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ,

সুতরাং কখ, খজএর আয়ত, কজএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান।

অতএব কখ রেখা জ বিন্দুতে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত হইল যে, কখ ও খজএর আয়ত, কজএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

বীজঃ উপঃ। মনে কর কখ = ক এবং কজ = অ ; ∴ খজ = ক − অ। ∴ ক (ক − অ) = $অ^২$; অথবা $ক^২$ − কঅ = $অ^২$; ∴ $অ^২$ + কঅ = $ক^২$, অথবা $অ^২ + কঅ + \frac{ক^২}{৪} = \frac{৫ক^২}{৪}$;

∴ $অ + \frac{ক}{২} = \frac{\pm\sqrt{৫}.ক}{২}$; ∴ $অ = \frac{\pm ক\sqrt{৫} - ক}{২}$।

অএর দুইটী পরিমাণের মধ্যে প্রথমটী দ্বারা জ বিন্দু স্থির হইতেছে কজ = $\frac{ক\sqrt{৫} - ক}{২}$ হইলে, খজ = $\frac{৩ - \sqrt{৫}}{২}$·ক হইবে। এখানে স্পষ্টই দেখা যাইতেছে যে কজ ও খজএর পরিমাণ, রূপ রাশিতে প্রকাশিত হইতে পারে না; $\sqrt{৫}$ একটী করণী বা অমেয় রাশি ; কোন সসীম রাশি দ্বারা ইহার মান প্রকাশ করা যায় না কিন্তু ইহার আসন্ন মান স্থির হইতে পারে।

অএর দ্বিতীয় পরিমাণ লইলে, তাহার অর্থ কি সহজেই বোধ হইতে পারে ; প্রথম সমীকরণে অএর পরিবর্ত্তে — অ লিখিলে, সমীকরণটী ক (ক + অ) = $অ^২$ হইবে। ইহা ভাষাতে লিখিলে এই প্রতিজ্ঞা হইবে ;—

কোন সরল রেখাকে এরূপে বৃদ্ধি করিতে হইবে যেন সমস্ত বর্দ্ধিত রেখাও বর্দ্ধিত অংশের অন্তর্গত আয়ত, বর্দ্ধিত অংশের উপর সমচতুর্ভুজের সমান হয়।

অঃ প্রঃ—১৩। ইউক্লিডের ২য় অধ্যায়ের একাদশ প্রতিজ্ঞার চিত্রে প্রমাণ কর যে $কখ^২ + খজ^২ = ৩ কজ^২$।

১৪। উক্ত চিত্রে প্রমাণ কর যে,

(কজ + খজ) (কজ — খজ) = কজ·খজ।

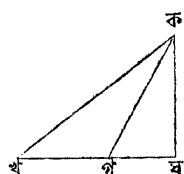
১২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

স্থূলকোণী ত্রিভুজের একটী সূক্ষ্ম কোণ হইতে সম্মুখীন বর্দ্ধিত বাহুর উপর লম্ব টানিলে, স্থূল কোণের সম্মুখীন বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ, ইহার পার্শ্বস্থ

দুই বাহুর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় অপেক্ষা, যে বর্দ্ধিত বাহুর উপর লম্ব পতিত হইয়াছে সেই বাহু এবং স্থূল কোণ ও লম্বের মধ্যবর্ত্তী ত্রিভুজের বহিস্থ সরল রেখা, এই দুইএর অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়ত পরিমাণে বৃহত্তর হইবে।

কখগ স্থূল কোণী ত্রিভুজের কগখ যেন স্থূল কোণ, ক বিন্দু হইতে বর্দ্ধিত খগএর উপর কঘ লম্ব টান; কখএর উপর সমচতুর্ভুজ, কগ ও গখএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় অপেক্ষা, খগ ও গঘএর দ্বিগুণিত আয়ত পরিমাণে বৃহত্তর হইবে।

খঘ সরল রেখা গ বিন্দুতে দুই অংশে বিভক্ত হওয়াতে, খঘ এর উপর, সমচতুর্ভুজ খগ ও গঘ এর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় এবং খগ, গঘএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান;

[২য়, ৪।

প্রত্যেকে ঘকএর উপর সমচতুর্ভুজ যোগ করিলে,

খঘ ও ঘকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে খগ, গঘ ও ঘকএর উপর তিন সমচতুর্ভুজ এবং খগ, গঘএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান হইবে। [স্বতঃ ২।

ইহাদের মধ্যে খঘও ঘকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় খকএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান; কেননা, খঘক কোণ এক সম কোণ, [১ম, ৪৭।

এবং গঘ ও ঘকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, গকএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান।

সুতরাং খকএর উপর সমচতুর্ভুজ, খগ ও গকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের এবং খগ, গঘএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান; অর্থাৎ, খকএর উপর সমচতুর্ভুজ, খগ ও গকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় অপেক্ষা, খগ ও গঘএর দ্বিগুণিত আয়ত পরিমাণে বৃহত্তর।

অতএব স্থূল কোণী ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। যদি খগ, গক ও কখএর পরিমাণ ক্রমে ক, খ ও গ হয় এবং গঘ=ম ও কঘ=ন হয়, তবে $গ^২=(ক+ম)^২+ন^২$; এবং $খ^২=ম^২+ন^২$; $\therefore গ^২-খ^২=(ক+ম)^২-ম^২$ $=ক^২+২কম+ম^২-ম^২=ক^২+২কম$;

$\therefore গ^২=ক^২+খ^২+২কম$।

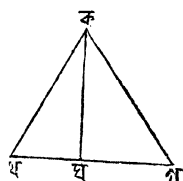
অঃ প্রঃ—১৫। যদি কখগ ত্রিভুজের খ ও গ কোণ প্রত্যেকে ক কোণের দ্বিগুণ হয়, তবে কখএর উপর সমচতুর্ভুজ, খগএর উপর সমচতুর্ভুজ ও কখ, খগএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান হইবে।

১৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

প্রত্যেক ত্রিভুজের কোন সূক্ষ্ম কোণের সম্মুখীন বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ, ঐ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু দ্বয়ের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ অপেক্ষা, এই দুই বাহুর একটী এবং সম্মুখীন কোণ হইতে তাহার উপর পাতিত লম্ব ও সূক্ষ্ম কোণের মধ্যবর্ত্তী সরল

রেখা, এই দুইএর অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়ত পরিমাণে ক্ষুদ্রতর হইবে।

কখগ ত্রিভুজের যেন খ একটী সূক্ষ্ম কোণ, এই কোণের পার্শ্বস্থ দুই বাহুর মধ্যে খগএর উপর সম্মুখীন ক কোণ হইতে কঘ লম্ব টান, তাহা হইলে কগএর উপর সমচতুর্ভুজ, কখ ও খগএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় অপেক্ষা, গখ ও খঘএর দ্বিগুণিত আয়ত পরিমাণে ক্ষুদ্রতর হইবে।

প্রথমত, কখ লম্ব ত্রিভুজের অভ্যন্তরে পড়িলে, গখ রেখা ঘ বিন্দুতে দুই অংশে বিভক্ত হওয়াতে, গখ ও খঘএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, গখ ও খঘএর দ্বিগুণিত আয়ত এবং গঘএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান হইবে; [২য়, ৭।

ক খ ঘ গ

প্রত্যেকে ঘকএর উপর সমচতুর্ভুজ যোগ করিলে,

গখ, খঘ ও ঘকএর উপর তিনটী সমচতুর্ভুজ, গখ ও খঘএর দ্বিগুণিত আয়ত এবং গঘ ও ঘকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান হইবে। [স্বতঃ ২।

ইহাদের মধ্যে, খঘ ও ঘকএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয় খকএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান; কেননা, খঘক কোণ এক সম কোণ; [১ম, ৪৭।

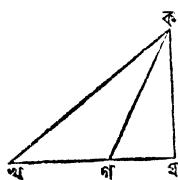
এবং গঘ ও ঘকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, গকএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান; [১ম, ৪৭।

সুতরাং গখ ও খকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কগএর

উপর সমচতুর্ভুজের এবং গখ, খঘএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান;

অর্থাৎ শুদ্ধ কগএর উপর সমচতুর্ভুজ, গখ ও খকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় অপেক্ষা, গখ ও খঘএর দ্বিগুণিত আয়ত পরিমাণে ক্ষুদ্রতর।

দ্বিতীয়ত, কঘ লম্ব ত্রিভুজের বাহিরে পড়িলে, ঘ কোণ সম কোণ হওয়াতে, [অঙ্কন।

কগখ কোণ সম কোণ অপেক্ষ বৃহত্তর; [১ম, ১৬।

এই হেতু কখএর উপর সমচতুর্ভুজ, কগ ও গখএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় এবং খগ ও গঘএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান; [২য়, ১২।

প্রত্যেকে খগএর উপর সমচতুর্ভুজ যোগ করিলে,

কখ ও খগএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে, কগএর উপর সমচতুর্ভুজ, খগএর উপর দ্বিগুণিত সমচতুর্ভুজ এবং খগ, গঘএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান; [স্বতঃ ২।

আর খঘ রেখা গ বিন্দুতে দুই অংশে বিভক্ত হওয়াতে, ঘখ ও খগএর আয়ত, খগ ও গঘএর আয়ত এবং খগএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান; [২য়, ৩।

এবং ইহাদিগকে দ্বিগুণ করিলে,

ঘখ, খগএর দ্বিগুণিত আয়ত, খগ ও গঘএর দ্বিগুণিত আয়ত এবং খগএর উপর দ্বিগুণিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে;

সুতরাং **কখ** ও **খগ**এর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, **কগ**এর উপর সমচতুর্ভুজ এবং **ঘখ, খগ**এর দ্বিগুণিত আয়তের সমান; অর্থাৎ শুদ্ধ **কগ**এর উপর সমচতুর্ভুজ, **কখ** ও **খগ**এর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় অপেক্ষা **ঘখ, খগ**এর দ্বিগুণিত আয়ত পরিমাণে ক্ষুদ্রতর।

তৃতীয়ত, যদি **কগ** বাহু **খগ**এর লম্ব হয়, তবে **খগ**ই লম্ব ও সূক্ষ্ম কোণের মধ্যবর্ত্তী রেখা; তাহা হইলে অনায়াসেই বোধ হইবে যে **কখ** ও **খগ**এর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কগএর উপর সমচতুর্ভুজ এবং **খগ**এর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণের সমান। [১ম,৪৭ ও স্বতঃ ২। অতএব প্রত্যেক ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। যদি খগ, কগ ও কখএর পরিমাণ ক্রমে ক, খ ও গ হয় এবং খঘ = ম ও কঘ = ন হয়, তবে (১ম প্রকরণ) $\text{ঘগ} = \text{ক} - \text{ম}$; $\therefore \text{গ}^{২} = \text{ন}^{২} + \text{ম}^{২}$ এবং $\text{খ}^{২} = \text{ন}^{২} + (\text{ক} - \text{ম})^{২}$; $\therefore \text{গ}^{২} - \text{খ}^{২} = \text{ম}^{২} - (\text{ক} - \text{ম})^{২} = \text{ম}^{২} - \text{ক}^{২} + ২\text{কম} - \text{ম}^{২} = -\text{ক}^{২} + ২\text{কম}$; $\therefore \text{খ}^{২} + ২\text{কম} = \text{ক}^{২} + \text{গ}^{২}$।

(২য় প্রকরণ) $\text{ঘগ} = \text{ম} - \text{ক}$; $\therefore \text{গ}^{২} = \text{ম}^{২} + \text{ন}^{২}$; এর $\text{খ}^{২} = (\text{ম} - \text{ক})^{২} + \text{ন}^{২}$;

$\therefore \text{গ}^{২} - \text{খ}^{২} = \text{ম}^{২} - (\text{ম} - \text{ক})^{২} = \text{ম}^{২} - \text{ম}^{২} + ২\text{কম} - \text{ক}^{২} = ২\text{কম} - \text{ক}^{২}$; $\therefore \text{ক}^{২} + \text{গ}^{২} = \text{খ}^{২} + ২\text{কম}$ অথবা $\text{খ}^{২} + ২\text{কম} = \text{ক}^{২} + \text{গ}^{২}$।

(৩য় প্রকরণ) এখানে $\text{ম} = \text{ক}$; এবং $\text{খ}^{২} + \text{ক}^{২} = \text{গ}^{২}$; সমীকরণের দুই দিকে $\text{ক}^{২}$ যোগ করিলে, $\text{খ}^{২} + ২\text{ক}^{২} = \text{গ}^{২} + \text{ক}^{২}$

অঃ প্রঃ—১৬। কখগ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের খগ ভূমির খ প্রান্ত হইতে সম্মুখীন কগ বাহুর উপর খঘ লম্ব টানিয়া প্রমাণ কর যে $\text{কগ}.\text{গঘ} = \frac{১}{২}\text{খ}^{২}$।

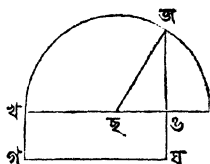
১৪ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমান এক সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

ক যেন নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্র; কএর সমান এক সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

ক ক্ষেত্রের সমান খগঘঙ সমকোণী সমান্তরিক অঙ্কিত কর।

এক্ষণে যদি ইহার খঙ ও ঙঘ বাহু দ্বয় পরস্পর সমান হয়, তবে ইহা সমচতুর্ভুজ হইবে এবং তাহা হইলে সম্পাদ্য ক্ষেত্র অঙ্কিত হইল।

যদি সমান না হয়, তবে উহাদের মধ্যে একটী অর্থাৎ খঙকে চ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি করিয়া, ঙচকে ঙঘএর সমান এবং খচকে ছ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর; [১ম, ৩ ও ১০।

ছ কেন্দ্র হইতে ছচ বা ছখএর প্রান্ত দিয়া খজচ অর্দ্ধ বৃত্ত আঁক এবং ঘঙকে জ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর।

ঙজএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ ক ক্ষেত্রের সমান হইবে।

ছজ সংযুক্ত কর।

পরে, খচ সরল রেখা ছ বিন্দুতে দুই সমান এবং ঙ বিন্দুতে দুই অসমান অংশে বিভক্ত হওয়াতে,

খঙ, ঙচএর আয়ত এবং ছঙর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র

যোগে, ছচএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান। [২য়, ৫।
আর ছচ, ছজএর সমান বলিয়া,
খঙ, ঙচএর আয়ত এবং ছঙর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ছজএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান।
ইহাদের মধ্যে ছজএর উপর সমচতুর্ভুজ, ছঙ ও ঙজএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের সমান; [১ম, ৪৭।
এই হেতু খঙ, ঙচএর আয়ত এবং ছঙর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ছঙ ও ঙজএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান;
এই সমান সমান বস্তু হইতে ছঙর উপর সমচতুর্ভুজ বিয়োগ করিলে, খঙ ও ঙচএর আয়ত, ঙজএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে; [স্বতঃ ৩।
আর খঘ সমান্তরিক, খঙ ও ঙচএর অন্তর্গত আয়ত;
কেননা ঙচ, ঙঘএর সমান।
অতএব খঘ ক্ষেত্র, ঙজএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান;
আর খঘ, ক সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমান। [অঙ্কন।
সুতরাং ঙজএর উপর সমচতুর্ভুজ ক ক্ষেত্রের সমান।
অতএব ক সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমান একটী সমচতুর্ভুজ ঙজ রেখার উপর অঙ্কিত হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য। *

* এই ১৪টী প্রতিজ্ঞা ইউক্লিডের লিখিত। এতদ্ব্যতীত কোন কোন পুস্তকে আর তিনটী ও অন্যান্য পুস্তকে পাঁচটী প্রতিজ্ঞা সন্নিবেশিত হইয়াছে। এই সকল প্রতিজ্ঞার উপপত্তি সহজেই সম্পন্ন হইতে পারে; এজন্য আমরা ইহাদিগকে, অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞা স্বরূপ, এ পুস্তকে গ্রহণ করিয়াছি।

অাঃ প্রঃ—১৭। কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে এমন দুই অংশে বিভক্ত করিতে হইবে যেন তাহাদের অন্তর্গত আয়ত কোন নির্দ্দিষ্ট সমচতুর্ভুজের সমান হয়।

১৮। সমকোণী ত্রিভুজের কোন একটী সূক্ষ্ম কোণ হইতে সম্মুখীন বাহুর মধ্য বিন্দু পর্য্যন্ত এক সরল রেখা টানিলে, সেই রেখার উপর সমচতুর্ভুজ এবং দ্বিখণ্ডিত রেখার অর্দ্ধেকের উপর ত্রিগুণিত সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, সমকোণী ত্রিভুজের কর্ণের উপর সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

১৯। সমকোণী ত্রিভুজের কোন ভুজের মধ্য বিন্দু হইতে কর্ণের উপর লম্ব টানিলে, কর্ণের দুই অংশের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের অন্তর, অন্য ভুজের উপর সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

২০। কমখ, কোন বৃত্ত পাদের ম বিন্দু কেন্দ্র; কখ পরিধি খণ্ডে গ বিন্দু কল্পনা করিয়া মক বা মখএর উপর গঘ লম্বটান; গঘ যেন কমখ কোণ দ্বিখণ্ড কারক রেখাকে ঙ বিন্দুতে ছেদ করিল; প্রমাণ কর যে গঘ ও ঘঙর উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ, মকএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান।

২১। অর্দ্ধ বৃত্তের ব্যাসের কোন বিন্দু হইতে ব্যাসের সহিত সম কোণ করিয়া একটী ও পরিধির মধ্য বিন্দু পর্য্যন্ত আর একটী সরল রেখা টানিলে, এই দুই রেখার উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ব্যাসার্দ্ধের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ হইবে।

২২। কোন সরল রৈখিক ক্ষেত্রের অভ্যান্তরীণ কোন বিন্দু হইতে যাবতীয় বাহুর উপর লম্ব টানিলে, বাহুর একান্তর খণ্ড সমূহের উপর সমচতুর্ভুজ গুলির সমষ্টি দ্বয়, পরস্পর সমান হইবে।

২৩। এমন একটী সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা দুই সমচতুর্ভুজের অন্তরের সমান হয়।

২৪। কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে এমন দুই অংশে বিভক্ত করিতে হইবে যাহাদের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয়

কোন নির্দ্দিষ্ট সমচতুর্ভুজের সমান হয়। এই প্রতিজ্ঞাটী কখন অসাধ্য হইবে?

২৫। কখগ সমবাহু ত্রিভুজের কগ বাহুর মধ্য বিন্দু ঘ হইতে খগএর উপর ঘঙ লম্ব টানিয়া প্রতিপন্ন কর যে, খঘএর উপর সমচতুর্ভুজ খগএর উপর সমচতুর্ভুজের তিন চতুর্থাংশ এবং খঙ রেখা খগএর তিন চতুর্থাংশ।

২৬। কোন নির্দ্দিষ্ট রেখাকে এরূপে বর্দ্ধিত করিতে হইবে, যেন সমস্ত বর্দ্ধিত রেখা এবং নির্দ্দিষ্ট রেখার অন্তর্গত আয়ত কোন নির্দ্দিষ্ট সমচতুর্ভুজের সমান হয়।

২৭। কোন বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের উপর একটী অর্দ্ধ বৃত্ত অঙ্কিত করিয়া দুই বৃত্তের সাধারণ ব্যাসের উপর একটী লম্ব টানিলে, সেই ব্যাসের প্রান্ত হইতে লম্ব দ্বারা বৃহৎ বৃত্তের পরিধির ছেদ বিন্দু পর্য্যন্ত অঙ্কিত জ্যা, ক্ষুদ্র বৃত্তের ছেদ বিন্দু পর্য্যন্ত অঙ্কিত জ্যার দ্বিগুণ হইবে।

২৮। কোন সরল রেখার দুই প্রান্ত হইতে সমদূরবর্ত্তী এমন দুই বিন্দু ঐ রেখাতে স্থির কর, যেন নির্দ্দিষ্ট রেখার মধ্য খণ্ডের উপর সমচতুর্ভুজ, অন্য দুই খণ্ডের উপর দুইটী সমচতুর্ভুজের সমষ্টির সমান হয়; আর প্রতিপন্ন কর যে, রেখাটী এই রূপে বিভক্ত হইলে, সমস্ত রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ, পার্শ্বস্থ দুই অংশের উপর দুই সমচতুর্ভুজ এবং সমস্ত রেখা ও মধ্য অংশের অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়তের সমান হইবে।

২৯। কোন সরল রেখাকে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর, যেন সমস্ত রেখার উপর ও এক অংশের উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে, অন্য অংশের উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ হয়, আর প্রতিপন্ন কর যে, রেখাটী এই রূপে বিভক্ত হইলে, বৃহত্তর অংশের উপর সমচতুর্ভুজ, সমস্ত রেখার ও ক্ষুদ্রতর অংশের অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়তের সমান হইবে।

৩০। প্রতিপন্ন কর যে, দুই রেখার উপর অঙ্কিত দুইটী সমচতুর্ভুজ, ইহাদের অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না এবং ঐ দুই সমচতুর্ভুজের অন্তর নির্দ্দিষ্ট দুইটী রেখার সমষ্টির ও অন্তরের অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে।

৩১। (ক + অ) (ক—অ) + অ^{২} = ক^{২}; (ক + অ)^{২} + (ক—অ)^{২} = ২ক^{২} + ২অ^{২}। প্রতিপন্ন কর যে, এই দুইটী বৈজিক সমীকরণের মধ্যে প্রথমটী দ্বারা ইউক্লিডের দ্বিতীয় অধ্যায়ের ৫ম বা ৬ঠ, এবং দ্বিতীয়টী দ্বারা ৯ম বা ১০ম প্রতিজ্ঞা প্রকাশিত হইতেছে।

৩২। কখগঘ একটী আয়ত; খগতে ঙ বিন্দু এবং গঘতে চ বিন্দু কল্পনা করিয়া প্রতিপন্ন কর যে, কখগঘ আয়ত, দ্বিগুণিত কঙচ ত্রিভুজের এবং খঙ ও ঘচএর অন্তর্গত আয়তের সমান।

৩৩। যদি কোন সরল রেখা দুই সমান ও দুই অসমান অংশে ছেদিত হয়, তবে দুই অসমান অংশের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, এই দুই অংশের অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়ত এবং ছেদ বিন্দু দ্বয়ের মধ্যবর্ত্তী অংশের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

৩৪। কোন ত্রিভুজের তিন বাহুর পরিমাণ ২, ৪, ৫ অথবা এই তিন সংখ্যার কোন সমগুণিত হইলে, ত্রিভুজটী স্থূল কোণী না সূক্ষ্ম কোণী হইবে?

৩৫। কোন ত্রিভুজের একটী কোণ $\frac{৪}{৩}$ সম কোণ হইলে, এই কোণের সম্মুখীন বাহুর উপর সমচতুর্ভুজ, ইহার পার্শ্বস্থ বাহু দ্বয়ের উপর দুই সমচতুর্ভুজ এবং ঐ দুই বাহুর অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে।

৩৬। কখগ ত্রিভুজের কগ ও কখ বাহুর অথবা বর্দ্ধিত কগ ও কখ বাহুর উপর যদি খত ও গথ লম্ব টানা যায়, তবে খ ও গ উভয়ে সূক্ষ্ম কোণ হইলে, খগএর উপর সমচতুর্ভুজ কখ ও খথএর আয়ত এবং কগ ও গতএর আয়ত সমষ্টির সমান হইবে; আর ঐ দুইটীর মধ্যে একটী সূক্ষ্ম কোণ হইলে, সমচতুর্ভুজটী দুইটী আয়তের অন্তরের সমান হইবে।

৩৭। সমকোণী ত্রিভুজের কর্ণের বহির্দ্দিকে সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিয়া সম কোণ হইতে সমচতুর্ভুজের দূরবর্ত্তী দুই কোণ পর্য্যন্ত দুইটী রেখা টানিলে, উহাদের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজের অন্তর, ত্রিভুজের দুই বাহুর উপর দুই সমচতুর্ভুজের অন্তরের সমান হইবে।

৩৮। কোন আয়তের পরস্পর সন্নিহিত দুই বাহুর উপর দুই সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিলে, ইহাদের কর্ণ দুইটীর অন্তর্গত আয়ত, নির্দ্দিষ্ট আয়তের দ্বিগুণ হইবে।

৩৯। আয়তের অভ্যন্তরীণ কোন বিন্দু হইতে চারি কোণ পর্য্যন্ত চারিটী রেখা টানিলে, সম্মুখীন দুইটী দুইটী কোণ পর্য্যন্ত অঙ্কিত রেখা গুলির উপর দুইটী দুইটী সমচতুর্ভুজের সমষ্টি পরস্পর সমান হইবে।

৪০। কোন চতুর্ভুজের কর্ণ দ্বয়ের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, চারি ভুজের উপর অঙ্কিত চারি সমচতুর্ভুজ অপেক্ষা, কর্ণ দ্বয়ের দুইটী মধ্য বিন্দু যোজক রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ পরিমাণে ক্ষুদ্রতর হইবে।

৪১। কোন চতুর্ভুজের কর্ণ দ্বয়ের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে পরস্পর সম্মুখীন বাহু গুলির মধ্য বিন্দু সংযোজক রেখা দ্বয়ের দুই সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ।

৪২। কোন ত্রিভুজের তিন কোণ হইতে সম্মুখীন বাহু গুলির মধ্য বিন্দু পর্য্যন্ত তিনটী রেখা টানিলে, সাধারণ ছেদ বিন্দু হইতে কোণ গুলি পর্য্যন্ত ইহাদের তিন খণ্ডের উপর অঙ্কিত তিনটী সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ত্রিভুজের বাহু ত্রয়ের উপর তিনটী সমচতুর্ভুজের তৃতীয়াংশ হইবে।

৪৩। কোন সমচতুর্ভুজের দুই সম্মুখীন বাহু দ্বিখণ্ড করিলে, অন্য দুই বাহুর উপর দুই সমচতুর্ভুজ এবং কর্ণ দ্বয়ের উপর দুই সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, দ্বিখণ্ডিত বাহু দ্বয়ের উপর দুই সমচতুর্ভুজ এবং ছেদ বিন্দু দ্বয় সংযোজক রেখার উপর চতুর্গুণিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

৪৪। যদি কখগ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির সমান্তর ঘঙ রেখা টানা যায়, তবে খঙ^2 = খগ. ঘঙ + গঙ^2।

৪৫। দুই সমান্তর বাহু বিশিষ্ট কোন বিষম চতুর্ভুজের দুই কর্ণের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, দুই সমান্তর বাহুর উপর দুই সমচতুর্ভুজের এবং অন্য দুই বাহুর অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়তের সমান হইবে।

৪৬। কোন ত্রিভুজের কখ ও কগ বাহুর উপর খঘ ও গঙ

দুই সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিয়া প্রতিপন্ন কর যে, খগ এবং ঘঙর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, কখ ও কগএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ।

৪৭। কোন ত্রিভুজের তিন বাহুর উপর তিনটী সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিয়া, ইহাদের কৌণিক বিন্দুগুলি সংযুক্ত করিয়া দিলে যে ষড়্ভুজ ক্ষেত্র হইবে, তাহার বাহু সকলের উপর অঙ্কিত ছয়টী সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ত্রিভুজের তিন বাহুর উপর অঙ্কিত তিনটী সমচতুর্ভুজের চতুর্গুণ হইবে।

৪৮। কোন বৃত্তের ব্যাসে, কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্ত্তী দুই বিন্দু কল্পনা করিলে, পরিধিস্থ কোন বিন্দু হইতে ইহাদের যোজক রেখা দ্বয়ের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজের সমষ্টি, অপরিবর্ত্তনীয় রাশি হইবে।

৪৯। কখগ সমকোণী ত্রিভুজের কখ কর্ণ ঘওঙ বিন্দুতে তিন সমান ভাগে বিভক্ত হইয়াছে; যদি গঘ ও গঙ সংযুক্ত করা যায়, তবে গঘঙ ত্রিভুজের বাহু গুলির উপর অঙ্কিত তিনটী সমচতুর্ভুজ, কখএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের দুই তৃতীয়াংশ হইবে।

৫০। কখগঘ চতুর্ভুজের দুই কর্ণের মধ্য বিন্দু দ্বয় সংযোজক রেখা যদি ঙ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হয় এবং ঙকে কেন্দ্র করিয়া যে কোন বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়, তবে এই বৃত্ত পরিধিতে ব বিন্দু কল্পনা করিলে, (বক^2 + বখ^2 + বগ^2 + বঘ^2) অপরিবর্ত্তনীয় রাশি এবং (ঙক^2 + ঙখ^2 + ঙগ^2 + ঙঘ^2 + ৪ ঙব^2)এর সমান হইবে।

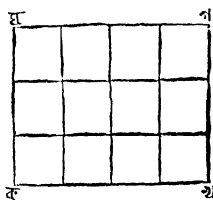
দ্বিতীয় অধ্যায়।

ব্যাখ্যা ও পরিশিষ্ট।

জ্যামিতিক ক্ষেত্র গুলির মধ্যে ত্রিভুজের ব্যবহার সর্ব্বাপেক্ষা অধিক হওয়াতে ইহা বিশেষ ফলোপধায়ক হইয়াছে; আয়ত ক্ষেত্রও প্রায় তদ্রূপ। ইউক্লিড ২য় অধ্যায়ে আয়ত ক্ষেত্রের বিষয় পর্য্যালোচনা করিয়াছেন এবং স্থূল ও সূক্ষ্ম কোণী ত্রিভুজের বাহু সকলের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ গুলির মধ্যে কিরূপ সম্বন্ধ থাকে, তাহা নিরূপণ করিয়াছেন। তিনি আয়ত সকলের বিশেষ পরিমাণ কি, তদ্বিষয়ে কিছুই উল্লেখ না করিয়া, ইহারা ভিন্ন ভিন্ন অংশে বিভক্ত হইলে, খণ্ড গুলির পরস্পর কিরূপ সম্বন্ধ হইবে, তাহাই স্থির করিয়াছেন। ২য় অধ্যায়ে আয়ত শব্দের ব্যাপক ভাব গ্রহণ করিতে হইবে; যথা ;— যে সমান্তরিকের একটী কোণ সম কোণ, তাহার নাম আয়ত, আর যে আয়তের ভুজ গুলি পরস্পর সমান, তাহার নাম সমচতুর্ভুজ।

প্রতিজ্ঞা গুলির উপপত্তিতে যে সকল সমচতুর্ভুজের উল্লেখ করা হইয়াছে, তাহারা কোন না কোন সরল রেখার উপর বাস্তবিক অঙ্কিত হইয়াছে অথবা অঙ্কিত হইয়াছে এরূপ অনুমান করিয়া লইতে হইবে। এজন্য "কখএর সমচতুর্ভুজ" এরূপ বাক্য প্রয়োগ না করিয়া "কখএর উপর সমচতুর্ভুজ" অর্থাৎ কখএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ, এইরূপ লিখিত হইয়াছে; "কখএর বর্গ" এরূপ বাক্য পাটীগণিতে বা বীজগণিতে ব্যবহৃত হইতে পারে; তাহা হইলে এই মাত্র বুঝিতে হইবে যে, ইহা দ্বারা কখএর পরিমাণ সূচক সংখ্যার বর্গ অর্থাৎ ঐ সংখ্যাকে উহা দ্বারাই গুণ করিলে যে ফল লব্ধ হইবে, তাহাই প্রকাশিত

হইতেছে; কিন্তু কোন রেখা সেই রেখা দ্বারা গুণিত হইয়াছে এরূপ বাক্য প্রয়োগ করা অসঙ্গত; তাহা করিলে কোমল মতি বিদ্যার্থী দিগকে ভ্রম জালে পাতিত করা হয়।

এই রূপে কখ ও খগ এর অন্তর্গত ক্ষেত্রকে প্রকাশ করিতে হইলে, কেহ কেহ কখ গুণিত খগ অথবা বৈজিক চিহ্ন দ্বারা কখ.খগ এইরূপ লিখিয়া থাকেন। পূর্ব্বেই উল্লিখিত হইয়াছে যে ইহা দ্বারা ভ্রম জন্মিবার বিলক্ষণ সম্ভাবনা। পার্শ্ববর্ত্তী চিত্রে কখ যেন ৪ অঙ্গুল ও খগ ৩ অঙ্গুল; তাহা হইলে কখগঘ আয়ত ক্ষেত্র ১ অঙ্গুল দৈর্ঘ্য ও ১ অঙ্গুল প্রস্থ বিশিষ্ট ১২টী ক্ষেত্রে বিভক্ত হইবে অর্থাৎ এক অঙ্গুল দৈর্ঘ্য প্রস্থ বিশিষ্ট ১২টী সমচতুর্ভুজ যেস্থল ব্যাপিয়া থাকে এই আয়তও ঠিক সেই পরিমিত স্থান ব্যাপিয়া থাকিবে।

আবার আয়তের দৈর্ঘ্য পরিমাণ সূচক অঙ্ক অর্থাৎ ৪কে, প্রস্থ পরিমাণ সূচক অঙ্ক অর্থাৎ ৩ দিয়া গুণ করিলেও গুণফল ১২ হয়; এই অঙ্ক দ্বারা পাটীক সংখ্যা মাত্র পাওয়া যায়; কিন্তু কখ ও খগএর অন্তর্গত আয়ত বলিলে, কখগঘ ক্ষেত্র দ্বারা যে স্থান পরিপূরণ হইতেছে, তাহাই বোধ হইবে। ক্ষেত্রের, অর্থাৎ পরিবদ্ধ স্থানের সম্বন্ধ নিরূপণ করা জ্যামিতির উদ্দেশ্য; অতএব জ্যামিতিতে শেষোক্ত, অর্থাৎ, কখ, ও কগএর অন্তর্গত আয়ত, এইরূপ বাক্য প্রয়োগ করা বিধেয়।

যাহা উল্লিখিত হইল, তদ্দ্বারা পাঠক বৃন্দের বোধ হইয়া থাকিবে যে, জ্যামিতি সংক্রান্ত আয়ত এবং পাটী ও বীজ গণিত সংক্রান্ত গুণফল এই উভয়ই সদৃশ অর্থ বোধক; এই জন্য জ্যামিতির প্রণালী অবলম্বন করিলে যেরূপ ফল লব্ধ হয়, পাটীক বা বৈজিক প্রণালী দ্বারাও তদনুরূপ ফল লাভ হইবে এবং ইহা দেখাইবার জন্যই প্রতিজ্ঞা গুলির শেষ ভাগে বৈজিক উপপত্তি লিখিত হইয়াছে।

প্রথম অধ্যায়ের ৩৫শ প্রতিজ্ঞা দ্বারা প্রতীত হইয়া থাকিবে

যে, একই ভূমি ও সমান সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট অসংখ্য সমান্তরিক অঙ্কিত করা যায় ও ইহাদের মধ্যে একটী আয়ত ক্ষেত্র হইতে পারে। অতএব প্রত্যেক সমান্তরিক ঐ আয়তের সমান, অর্থাৎ আয়তের সন্নিহিত দুই বাহুর অন্তর্গত বলিতে হইবে; প্রকারান্তরে বলা যাইতে পারে যে, প্রত্যেক সমান্তরিক ইহার উন্নতি ও ভূমির অন্তর্গত। যদি কোন সমান্তরিকের উন্নতি =ক এবং ভূমি =খ হয়, তবে বৈজিক প্রণালী অবলম্বন করিলে সমান্তরিকের ক্ষেত্রফল =কখ এবং এই উন্নতি ও ভূমি বিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{১}{২}$ কখ হইবে; কেননা ত্রিভুজটী সমান্তরিকের অর্দ্ধেক (১ম, ৪১)।

২য়, ১—৩। দ্বিতীয় অধ্যায়ের ২য় ও ৩য় প্রতিজ্ঞা ১ম প্রতিজ্ঞার বিশেষ বিশেষ প্রকরণ মাত্র; এই দুইটী প্রথমের অনুমান স্বরূপ লিখিলেও হইত; কেননা, প্রথমের নির্দ্দিষ্ট দুই রেখা পরস্পর সমান হইলেই দ্বিতীয় প্রতিজ্ঞা এবং অবিভাজিত রেখাটী বিভাজিত রেখার এক অংশের সমান হইলেই তৃতীয় প্রতিজ্ঞা হইবে। আবার ২য় ও ৩য় প্রতিজ্ঞা নিম্ন প্রকারে লিখিলে দুইটীতে, একটী মাত্র প্রতিজ্ঞা হইবে, যথা;—দুই রেখার অন্তর্গত আয়ত ও একটীর উপর সমচতুর্ভুজ এই দুইএর অন্তর, শেষোক্ত রেখার এবং দুই রেখার অন্তরের অন্তর্গত আয়তের সমান। ২য় রেখাটী ১ম অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে এইটী দ্বিতীয় এবং ক্ষুদ্রতর হইলে তৃতীয় প্রতিজ্ঞা হইবে।

২য়, ৪। চিত্র অঙ্কিত না করিয়া এই প্রতিজ্ঞাটী ২য় ও ৩য় দ্বারা সম্পন্ন করা যাইতে পারে। ইউক্লিড তাহা না করিয়া ক্ষেত্র গুলির সমানত্ব দেখাইয়া প্রতিজ্ঞাটী সিদ্ধ করিয়াছেন। দ্বিতীয় অধ্যায়ের মধ্যে এই প্রতিজ্ঞাটী অত্যন্ত প্রয়োজনীয়। যদি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার দুই অংশ পরস্পর সমান হয়, তবে সহজেই বোধ হইবে যে, কোন রেখার উপর সমচতুর্ভুজ তাহার অর্দ্ধেকের উপর সমচতুর্ভুজের চতুর্গুণ; ১ম অধ্যায়ের ৪৬শ প্রতিজ্ঞা দ্বারাও ইহা প্রতিপন্ন করা যাইতে পারে।

২য়, ৫—৬। পঞ্চম ও ষষ্ঠ প্রতিজ্ঞার সাধারণ সূত্র একই প্রতিজ্ঞাতে প্রকাশ করিতে পারা যায়, যথা;—দুই রেখার

সমষ্টি ও অন্তরের অন্তর্গত আয়ত, ঐ দুই রেখার উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজের সমান।

২য়, ৮। এই প্রতিজ্ঞাটী দ্বিতীয় অধ্যায়ের ৪থ ও ৭ম দ্বারা অনায়াসে প্রমাণ করা যায়, যথা;—কঘএর উপর সমচতুর্ভুজ কখ ও খগ এর উপর দুই সমচতুর্ভুজ এবং কখ, খঘএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান (২য়, ৪); অথবা কখ ও খগএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় এবং কখ, খগএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান; আর কখ ও খগএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কখ ও খগএর দ্বিগুণিত আয়ত এবং কগএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান: (২য়,৭) এই হেতু কঘএর উপর সমচতুর্ভুজ, কখ ও খগএর চতুর্গুণিত আয়ত এবং কগএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান।

"একটী সম্পূর্ণ রাশি ইহার অংশ সমষ্টির সমান" এই স্বতঃসিদ্ধটীর প্রয়োগ দ্বারা যে ইউক্লিড দ্বিতীয় অধ্যায়ের প্রথম আটটী প্রতিজ্ঞার উপপাদন করিয়াছেন ইহা পাঠক বর্গের অনায়াসেই বোধ হইবে।

২য়, ৯—১০। নবম প্রতিজ্ঞাটীও ৪থ ও ৭ম দ্বারা প্রমাণ করা যায়, যথা;—
কঘএর উপর সমচতুর্ভুজ, কগ ও গঘএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় এবং কগ, গঘএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান বলিয়া (২য়,৪), প্রত্যেকে ঘখএর সমচতুর্ভুজ যোগ করিলে, কঘ ও ঘখএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে, কগ ও গঘএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় এবং কগ, গঘএর দ্বিগুণিত আয়ত ও ঘখএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান অথবা খগ ও গঘএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, খগ ও গঘএর দ্বিগুণিত আয়ত এবং ঘখএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান; কেননা, খগ, কগএর সমান আর খগ ও গঘএর দ্বিগুণিত আয়ত এবং ঘখএর সমচতুর্ভুজ খগ ও গঘএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান; সুতরাং কঘ ও ঘখএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে, খগ ও গঘএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ।

৯ম প্রতিজ্ঞা দ্বারা সহজেই বোধ হইবে যে, কগ ও গঘ এই দুই রেখার সমষ্টি ও অন্তরের উপর অঙ্কিত দুইটী সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, এই দুই রেখার উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ।

দ্বিতীয় অধ্যায়ের দশম প্রতিজ্ঞারও উপপত্তি উক্তরূপে ৭ম প্রতিজ্ঞা দ্বারা সিদ্ধ হইতে পারে। ৫ম ও ৬ষ্ঠ প্রতিজ্ঞার ন্যায় ৯ম ও ১০মের সাধারণ সূত্র একই প্রতিজ্ঞাতে প্রকাশ করা যায়, যথা ;—দুই রেখার সমষ্টির উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ এবং তাহাদের অন্তরের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ঐ দুই রেখার উপর অঙ্কিত দুইটী সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ।

২য়। ১১। এই প্রতিজ্ঞার বৈজিক উপপত্তি দ্বারা শিক্ষার্থী দিগের প্রতীতি হইয়া থাকিবে যে, ইউক্লিডের উপপত্তি অনুসারে কোন একটী বিশেষ বর্গীয় সমীকরণের ফল জ্যামিতি দ্বারা লব্ধ হইয়াছে।

২য়। ১২—১৩। প্রথম অধ্যায়ের ৪৭শ প্রতিজ্ঞার সহিত ২য় অধ্যায়ের ১২শ ও ১৩শের সম্বন্ধ থাকাতে এই দুইটী প্রতিজ্ঞা অন্যাপেক্ষা ছাত্রদিগের হৃদয় গ্রাহী হইয়া থাকে ; আর ত্রিকোণমিতি শাস্ত্রেও ইহাদের বিশেষ উপযোগিতা দৃষ্ট হয় ; কিন্তু ইউক্লিডের যে যে অংশ সচরাচর বিদ্যালয়ে পঠিত হইয়া থাকে, তাহাতে ইহাদিগের ব্যবহার স্থল দৃষ্ট হয় না। পূর্ব্বে লিখিত হইয়াছে যে, ইউক্লিডের ৪৭শ ও ৪৮শ প্রতিজ্ঞার সম্বন্ধ পরস্পর বিপরীত ; যে যে প্রতিজ্ঞার সহিত ২য় অধ্যায়ের ১১শ ও ১২শের বিপরীত সম্বন্ধ সেই গুলির উপপত্তি সহজেই সম্পন্ন করা যাইতে পারে ; যথা—

যদি কোন ত্রিভুজের এক বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে প্রথম বাহুর সম্মুখীন কোণ স্থূল কোণ হইবে ; কেননা, যদি সেই কোণ সম কোণ হয়, তবে প্রথম বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ, অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজের সমান হইবে ; (১ম, ৪৭) আর সূক্ষ্ম কোণ হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে ; (২য়, ১৩) অতএব উহা সম কোণ বা সূক্ষ্ম কোণ হইতে পারে না ; সুতরাং উহা স্থূল কোণ।

এই রূপে সপ্রমাণ হইবে যে, কোন ত্রিভুজের এক বাহুর উপর সমচতুর্ভুজ অন্য দুই বাহুর উপর দুই সমচতুর্ভুজ

অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে, প্রথম বাহুর সম্মুখীন কোণ সূক্ষ্ম কোণ হইবে।

২য়, ১৩। ইউক্লিড তাঁহার মূল গ্রন্থে এই প্রতিজ্ঞার কেবল প্রথম প্রকরণটী প্রমাণ করিয়াছেন। সিম্‌সন সাহেব লিখিয়াছেন যে, ত্রিভুজটী যে প্রকার হউক না কেন তাহাই অবলম্বন করিয়া এ প্রতিজ্ঞাটী প্রমাণ করা যায়; এজন্য ২য় ও ৩য় প্রকরণে স্থূল ও সমকোণী ত্রিভুজ লইয়া প্রতিজ্ঞাটী প্রমাণ করিয়াছেন। প্রথম দুইটী প্রকরণ এক রূপেই সপ্রমাণ হইতে পারে; যথা—

গখ ও খঘএর উপর অঙ্কিত দুই সম চতুর্ভুজ একত্র যোগে, (২য় ১৩শের ১ম ও ২য় চিত্র দেখ) গখ ও খঘএর অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়ত এবং গঘএর উপর সমচতুর্ভুজ সমান; [২য়,৭। প্রত্যেকে ঘকএর উপর সমচতুর্ভুজ যোগ করিলে, গখ, খঘ ও ঘক এই তিন রেখার উপর তিনটী সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, গখ ও খঘএর অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়ত এবং গঘ ও ঘকএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের সমান হইবে; এইগুলির মধ্যে খঘ ও ঘকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কখএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান এবং গঘ ও ঘকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় কগএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান; [১ম, ৪৭।

সুতরাং গখ ও খকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে, কগ এর উপর সমচতুর্ভুজ এবং গখ, খঘএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান;

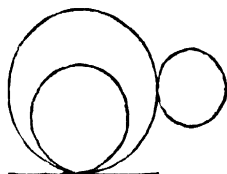
অর্থাৎ শুদ্ধ কগএর উপর সমচতুর্ভুজ, গখ ও খকএর উপর দুই সমচতুর্ভুজ অপেক্ষা, গখ ও খঘএর আয়ত পরিমাণে ক্ষুদ্রতর।

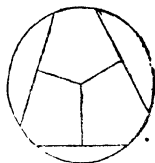
তৃতীয় অধ্যায়।

সংজ্ঞা।

১। যে সকল বৃত্তের ব্যাস সমান অথবা যাহাদের কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্য্যন্ত অঙ্কিত সরল রেখা গুলি সমান তাহাদিগকে সমান বৃত্ত বলা যায়।

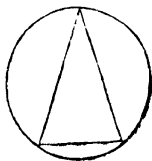
"এইটীকে সংজ্ঞা স্বরূপ জ্ঞান না করিয়া, উপপাদ্য বলিয়া গ্রহণ করিতে হইবে; কেননা, বৃত্ত গুলিকে পরস্পর উপর্য্যুপরি স্থাপন করিলে, যদি কেন্দ্র গুলি মিলিয়া যায় তবে বৃত্ত সকলও মিলিয়া যাইবে; কারণ, তাহাদের কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত সরল রেখা গুলি সমান।"

২। এক সরল রেখা কোন বৃত্তকে স্পর্শ করিয়াছে বলিলে বুঝিতে হইবে যে, সরল রেখাটী বৃত্তে সংলগ্ন হইয়াছে এবং উহা বর্দ্ধিত হইলে বৃত্তকে ছেদ করে না।

৩। বৃত্ত সকল পরস্পর স্পর্শ করিয়াছে বলিলে বুঝিতে হইবে যে, তাহারা সংলগ্ন হইয়াছে কিন্তু পরস্পরকে ছেদ করে নাই।

৪ কোন বৃত্তের কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্ত্তী সরল রেখা সকল বলিলে বুঝিতে হইবে যে, কেন্দ্র হইতেঐ সকল রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব গুলি পরস্পর সমান।

৫। যে সরল রেখার উপর সর্ব্বাপেক্ষা বৃহত্তর লম্ব টানা যায়, সেইটীকে কেন্দ্র হইতে সর্ব্বাপেক্ষা অধিক দূরবর্ত্তী বলা যায়।

৬। একটী সরল রেখা ও তদ্দ্বারা ছেদিত পরিধিখণ্ড দ্বারা পরিবদ্ধ ক্ষেত্রের নাম বৃত্তখণ্ড।

৭। এই সরল রেখার ও পরিধি-খণ্ডের অন্তর্গত কোণকে বৃত্তখণ্ডের কোণ বলা যায়।

৮। পরিধির কোন বিন্দু হইতে বৃত্তখণ্ডের ভূমির দুই প্রান্ত পর্য্যন্ত দুই সরল রেখা টানিলে, ইহাদের অন্ত-র্গত কোণকে বৃত্তখণ্ডস্থ কোণ বলা যায়।

৯। এই কোণের পার্শ্বস্থ দুই রেখার মধ্যবর্ত্তী পরিধিখণ্ডের উপর ইহা দণ্ডায়মান আছে, এরূপ বলা যায়।

১০। কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত দুই সরল রেখা ও তন্মধ্যস্থিত পরিধিখণ্ড দ্বারা পরিবদ্ধ ক্ষেত্রকে বৃত্তচ্ছেদক বলা যায়।

১১। যে সকল বৃত্তখণ্ডস্থ কোণ পরস্পর সমান, তাহাদিগকে সদৃশ বৃত্তখণ্ড বলা যায়।

অতিরিক্ত সংজ্ঞা।

১। পরিধি খণ্ডের নাম চাপ।

২। চাপের দুই প্রান্ত সংযোজক সরল রেখার নাম জ্যা।

৩। বৃত্তের বহিস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন সরল রেখা টানিলে, যদি তাহা বৃত্ত পরিধিকে দুই বিন্দুতে ছেদ করে। তবে তাহাকে খণ্ডিনী বলা যায়। ইহা বৃত্তকে দুই সমান বা অসমান খণ্ডে বিভক্ত করিতে পারে। খণ্ডিনী বৰ্দ্ধিত জ্যা মাত্র।

৪। যে সরল রেখা কোন বৃত্ত স্পর্শ করে, তাহাকে স্পর্শিনী বা স্পর্শক রেখা বলা যায়।

৫। যে সকল বৃত্তের কেন্দ্র একই বিন্দু তাহাদিগকে ঐককেন্দ্রিক বৃত্ত বলা যায়।

১ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে।

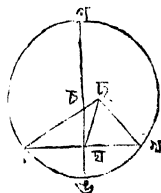
কখগ নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত; ইহার কেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে।

বৃত্তের অভ্যন্তরে কখ সরল রেখা টান; এবং কখকে ঘ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর; [১ম, ১০।

ঘ বিন্দু হইতে কখএর সহিত সম কোণ করিয়া ঘগ সরল রেখা টান; [১ম, ১১।

এবং গঘকে ঙ পর্য্যন্ত বৰ্দ্ধিত করিয়া গঙকে চ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর। [১ম, ১০।

চ বিন্দু কখগ বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

যদি চ কেন্দ্র না হয়, তবে ছ যেন কেন্দ্র হইল;
ছক, ছঘ ও ছখ সংযুক্ত কর।
পরে ঘক, ঘখএর সমান হওয়াতে,
এবং ঘছ, কঘছ ও খঘছ ত্রিভুজ
দ্বয়ের সাধারণ বাহু বলিয়া,
কঘ ও ঘছ দুই বাহু ক্রমে খঘ ও
ঘছ দুই বাহুর সমান;
এবং ছক ভূমি ছখ ভূমির সমান;
কেননা, এই দুই সরল রেখা কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্য্যন্ত
টানা হইয়াছে;* [১ম, সংজ্ঞা ১৫।
অতএব কঘছ কোণ খঘছ কোণের সমান; [১ম, ৮।
আর এক সরল রেখা অন্য একটী সরল রেখার উপর
দণ্ডায়মান হইলে, যদি সন্নিহিত কোণ দ্বয় পরস্পর সমান
হয়, তবে তাহাদের প্রত্যেক কোণকে সম কোণ বলা
যায়; [১ম, সংজ্ঞা ১০।
এই হেতু ছঘখ কোণ সম কোণ,
আর চঘখ কোণও সম কোণ, [অঙ্কন।
সুতরাং ছঘখ কোণ চঘখ কোণের সমান, [স্বতঃ ১১।
অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর বৃহত্তরের সমান;
কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব।
অতএব ছ বিন্দু কখগ বৃত্তের কেন্দ্র নহে।

* এই প্রতিজ্ঞা গুলিতে "কেন্দ্র হইতে সরল রেখা" এইরূপ লিখিত হইলে, বুঝিতে হইবে যে, রেখাটী কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্য্যন্ত টানা হইয়াছে।

এই রূপে প্রতিপন্ন করা যাইতে পারে যে, গঙ রেখার বহিস্থ কোন বিন্দু কেন্দ্র হইতে পারে না; আর গঙ, চ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হওয়াতে, গঙ রেখাস্থ অন্য কোন বিন্দু ইহাকে দুই অসমান ভাগে বিভক্ত করিবে; এজন্য তাহা কেন্দ্র হইতে পারে না।

সুতরাং চ ব্যতীত অন্য কোন বিন্দু কেন্দ্র হইতে পারে না, অর্থাৎ চ, কখগ বৃত্তের কেন্দ্র। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অনুমান। ইহা দ্বারা সহজেই বোধ হইবে যে, বৃত্তের অভ্যন্তরীণ কোন সরল রেখা, অন্তরস্থ অন্য এক সরল রেখার সহিত সম কোণ করিয়া তাহাকে দ্বিখণ্ড করিলে, বৃত্তের কেন্দ্র দ্বিখণ্ডকারক রেখাতে অবস্থিত হয়।

অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞা—১। কোন বৃত্তের চাপ নির্দ্দিষ্ট আছে; এই চাপের অর্থাৎ ইহা যে বৃত্তের চাপ তাহার কেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে।

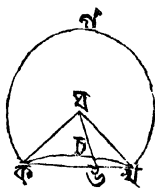
১। এমন একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার পরিধি, তিনটী নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়; কিন্তু ঐ তিন বিন্দু এক সরল রেখাতে অবস্থিত নহে।

২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

বৃত্ত পরিধিতে দুই বিন্দু কল্পনা করিলে, তাহাদের যোজক সরল রেখা বৃত্তের ভিতরে পড়িবে।

কখগ বৃত্তের পরিধিতে ক ও খ যেন দুই কল্পিত বিন্দু; ক হইতে খ পর্য্যন্ত সরল রেখা টানিলে তাহা বৃত্তের ভিতরে পড়িবে।

যদি এরূপ না হয়, তবে সরল রেখাটী যেন বৃত্তের বাহিরে পড়িল; যথা—**কঙখ**;

কখগ বৃত্তের **ঘ** কেন্দ্র নির্ণয় করিয়া, [৩য়, ১।

ঘক ও ঘখ সংযুক্ত কর; এবং **কখ** পরিধিখণ্ডে **চ** বিন্দু কল্পনা করিয়া, ঘচ সংযুক্ত ও ইহাকে ঙ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর।

পরে ঘক, ঘখএর সমান বলিয়া, [১ম, সংজ্ঞা ১৫।

ঘকখ কোণ ঘখক কোণের সমান। [১ম, ৫।

আবার ঘকঙ ত্রিভুজের কঙ বাহু খ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত হইয়াছে বলিয়া, বহিস্থ ঘঙখ কোণ, অন্তরস্থিত ঘকঙ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর; [১ম, ১৬।

ইহাদের মধ্যে ঘকঙ, ঘখঙ কোণের সমান প্রমাণ হইয়াছে;

এই হেতু ঘঙখ কোণ, ঘখঙ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর;

আর বৃহত্তর কোণের সম্মুখীন বাহু বৃহত্তর হয়; [১ম, ১৯।

অতএব ঘখ, ঘঙ অপেক্ষা বৃহত্তর;

কিন্তু ঘখ, ঘচএর সমান; [১ম, সংজ্ঞা ১৫।

সুতরাং ঘচ, ঘঙ অপেক্ষা বৃহত্তর, অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর বৃহত্তর অপেক্ষা বড়;

কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব।

অতএব ক হইতে খ পর্য্যন্ত সরল রেখা টানিলে, তাহা বৃত্তের বাহিরে পড়িবে না।

এই রূপে সপ্রমাণ হইবে যে, ইহা পরিধিখণ্ডের সহিত

সংলগ্ন হইবে না।

সুতরাং ইহা বৃত্তের মধ্যে পড়িবে।

অতএব বৃত্ত পরিধিতে ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৩। এক সরল রেখা কোন বৃত্ত পরিধিকে দুইএর অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

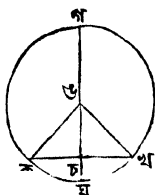
৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া কোন সরল রেখা টানিলে, যদি তাহা বৃত্তের অভ্যন্তরীণ ও কেন্দ্রের বহির্গত অন্য কোন সরল রেখাকে দ্বিখণ্ড করে, তবে তাহার সহিত সম কোণ করিবে, আর সম কোণ করিলে তাহাকে দ্বিখণ্ড করিবে।

কখগ বৃত্তের কেন্দ্র হইতে গঘ সরল রেখা টানিলে, যদি ইহা বৃত্তের অভ্যন্তরীণ ও কেন্দ্রের বহির্গত কখ সরল রেখাকে চ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড করে, তবে গঘ, কখএর সহিত সম কোণ করিবে।

ঙকে বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় করিয়া, [৩য়, ১।

ঙক ও ঙখ সংযুক্ত কর।

পরে কচ, চখএর সমান বলিয়া, [কল্পনা।

এবং চঙ, কচঙ ও খচঙ ত্রিভুজ দ্বয়ের সাধারণ বাহু বলিয়া, কচ ও চঙ বাহু দ্বয় ক্রমে খচ ও চঙ বাহু দ্বয়ের সমান;

এবং ঙক ভুমি ঙখ ভুমির সমান; [১ম, সংজ্ঞা ১৫।

অতএব কচঙ কোণ খচঙ কোণের সমান ; [১ম, ৮।
আর এক সরল রেখা অন্য একটী সরল রেখার উপর দণ্ডায়মান হইলে, যদি সন্নিহিত কোণ দ্বয় পরস্পর সমান হয়, তবে তাহাদের প্রত্যেক কোণকে সম কোণ বলা যায় ; [১ম, সংজ্ঞা ১০।
সুতরাং কচঙ ও খচঙ এই দুইএর প্রত্যেকে সম কোণ।

অতএব কেন্দ্র গত গঘ সরল রেখা, কেন্দ্রের বহির্গত কখ সরল রেখাকে দ্বিখণ্ড করিয়া ইহার সহিত সম কোণ করিতেছে।

অনন্তর গঘ যেন কখএর সহিত সম কোণ করিতেছে ; গঘ, কখকে দ্বিখণ্ড করিবে, অর্থাৎ কচ, চখএর সমান হইবে।

পূর্ব্ব রূপ চিত্র অঙ্কিত কর।

এক্ষণে, কেন্দ্র হইতে ঙক ও ঙখ দুই রেখা টানা হইয়াছে বলিয়া ইহারা পরস্পর সমান, [১ম, সংজ্ঞা ১৫।
এই হেতু ঙকচ কোণ, ঙখচ কোণের সমান ; [১ম, ৫।
অতএব কচঙ ও খচঙ ত্রিভুজ দ্বয়ের একের দুইটী কোণ, ক্রমে অন্যের দুইটী কোণের সমান ; এবং প্রত্যেক ত্রিভুজের এক একটী সমান কোণের সম্মুখীন চঙ রেখা দুই ত্রিভুজের সাধারণ বাহু ;
এই হেতু অন্যান্য বাহু গুলি সমান ; [১ম, ২৬।
সুতরাং কচ, চখএর সমান।
অতএব বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

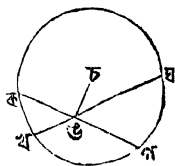
অঃ প্রঃ—৪। যদি কোন সরল রেখা দুই ঐককেন্দ্রিক বৃত্তের পরিধি ছেদ করে, তবে পরিধি দ্বয়ের মধ্যস্থিত তাহার দুই খণ্ড পরস্পর সমান হইবে।

৫। কখগ বৃত্তের কখ জ্যার মধ্য বিন্দু চ এবং ঙ ঐ বৃত্তের কেন্দ্র; যদি কখ, ঙচএর দ্বিগুণ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, কঙচ একটী সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইবে।

৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন বৃত্তের অন্তরস্থ দুই সরল রেখা যদি পরস্পরকে ছেদ করে, আর উহাদের মধ্যে একটী বা উভয়েই কেন্দ্র গত না হয়, তবে তাহারা পরস্পরকে দ্বিখণ্ড করিবে না।

কখগঘ বৃত্তের অন্তরস্থ কগ ও খঘ রেখা যেন পরস্পরকে ছেদ করিতেছে, কিন্তু উভয়ে কেন্দ্র গত নহে; কগ ও খঘ পরস্পর দ্বিখণ্ড করিবে না।

এই দুইটী সরল রেখার মধ্যে একটী কেন্দ্র গত হইলে, সহজেই বোধ যইবে যে, অন্যটীর অর্থাৎ যেটী কেন্দ্র গত নহে, তাহা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইতে পারে না;

আর ইহাদের মধ্যে কোনটীই কেন্দ্র গত না হইলে, যদি সম্ভব হয়, তবে যেন কঙ, ঙগএর এবং গঙ, ঙঘএর সমান হইল।

বৃত্তের কেন্দ্র স্বরূপ চ বিন্দু কল্পনা করিয়া, [৩য়, ১। চঙ সংযুক্ত কর।

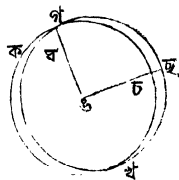
পরে কেন্দ্র গত চণ্ড সরল রেখা, কেন্দ্রের বহির্গত অন্য একটী কগ রেখাকে দ্বিখণ্ড করিয়াছে বলিয়া, [কল্পনা।
চণ্ড, কগএর সহিত সম কোণ করিতেছে; [৩য়, ৩।
এই হেতু চণ্ডক, সম কোণ।
আবার চণ্ড, কেন্দ্রের বহির্গত খঘ সরল রেখাকে দ্বিখণ্ড করিতেছে বলিয়া, [কল্পনা।
চণ্ড, খঘএর সহিত সম কোণ করিতেছে; [৩য়, ৩।
এই হেতু চণ্ডখ সম কোণ;
আর চণ্ডক কোণ যে সম কোণ, তাহা প্রমাণ হইয়াছে;
অতএব চণ্ডক কোন চণ্ডখএর সমান, [স্বতঃ ১১।
অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর বৃহত্তের সমান; কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব।
সুতরাং কগ ও খঘ পরস্পরকে দ্বিখণ্ড করিতে পারে না।
অতএব কোন বৃত্তের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৬। বৃত্তের অন্তর্গত সমান্তরিক মাত্রেই সমকোণী হইবে।

৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ করিলে, উভয়ের এক কেন্দ্র হইবে না।

কখগ ও গঘছ বৃত্ত দ্বয় যেন পরস্পরকে গ ও খ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে; এই দুই বৃত্তের এক কেন্দ্র হইবে না।

যদি সম্ভব হয়, তবে ঙ যেন উভয়ের কেন্দ্র হইল;
ঙগ সংযুক্ত কর এবং ঙচছ সরল রেখা টান;
ঙচছ যেন পরিধি দ্বয়ের সহিত চ ও ছ বিন্দুতে সংলগ্ন হইল।

পরে, ঙ বিন্দু কখগ বৃত্তের কেন্দ্র বলিয়া, ঙগ সরল রেখা ঙচএর সমান। [১ম, সংজ্ঞা ১৫।
আবার ঙ বিন্দু গঘছ বৃত্তের কেন্দ্র বলিয়া, ঙগ, ঙছএর সমান; [১ম, সংজ্ঞা ১৫।
আর প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, ঙগ, ঙচএর সমান;
এই হেতু ঙচ, ঙছএর সমান।
অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর বৃহত্তরের সমান; কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব;
সুতরাং ঙ, কখগ এবং গঘছ এই উভয় বৃত্তের কেন্দ্র হইতে পারে না।
অতএব দুই বৃত্ত ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৭। দুই বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ করিলে তাহাদের কেন্দ্র সংযোজক রেখা, সাধারণ জ্যাকে দ্বিখণ্ড করিয়া তাহার সহিত সম কোণ করিবে।

৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

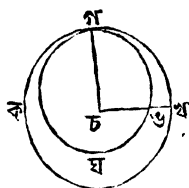
এক বৃত্ত অন্য বৃত্তকে অন্তরে স্পর্শ করিলে, তাহাদের উভয়েরই কেন্দ্র এক হইবে না।

গঘঙ বৃত্ত যেন কখগ বৃত্তকে অন্তরে গ বিন্দুতে স্পর্শ করিল ;

ইহাদের উভয়েরই কেন্দ্র এক হইবে না।

যদি সম্ভব হয়, তবে চ যেন দুই বৃত্তের কেন্দ্র হইল ;

চগ সংযুক্ত কর এবং চঙখ সরল রেখা টান ;

এই রেখা যেন পরিধি দ্বয়ের সহিত ঙ ও খ বিন্দুতে সংলগ্ন হইল।

পরে, চ বিন্দু কখগ বৃত্তের কেন্দ্র বলিয়া, চগ, চখএর সমান। [১ম, সংজ্ঞা ১৫।

আবার, চ বিন্দু গঘঙ বৃত্তের কেন্দ্র বলিয়া চগ, চঙর সমান। [১ম, সংজ্ঞা ১৫।

আর প্রমাণ হইয়াছে যে, চগ, চখএর সমান ;

অতএব চঙ, চখএর সমান, [স্বতঃ ১।

অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর বৃহত্তরের সমান ; কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব ;

সুতরাং চ বিন্দু কখগ ও গঘঙ এই উভয় বৃত্তেরই কেন্দ্র নহে।

অতএব এক বৃত্ত ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৮। দুই ঐককেন্দ্রিক বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ বা ছেদ করিতে পারে না। (এই অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞার সহিত তৃতীয় অধ্যায়ের ৫ম ও ৬ঠের বিপরীত সম্বন্ধ।)

৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

বৃত্তের ব্যাসে কেন্দ্র ভিন্ন অন্য কোন বিন্দু কল্পনা করিলে, সেই বিন্দু হইতে পরিধি পর্য্যন্ত যত গুলি সরল রেখা অঙ্কিত করিতে পারা যায়, তন্মধ্যে যেটীতে কেন্দ্র অবস্থিত হইবে, সেইটী বৃহত্তম ও ব্যাসের অবশিষ্ট অংশ ক্ষুদ্রতম; আর অন্যান্য রেখা গুলির মধ্যে যেটী কেন্দ্র গত সরল রেখার নিকটবর্ত্তী সেইটী অধিকতর দূরবর্ত্তী রেখা অপেক্ষা বৃহত্তর, এবং ক্ষুদ্রতম রেখার দুই দিকে এক একটী করিয়া দুইটী মাত্র সমান সরল রেখা, ঐ বিন্দু হইতে পরিধি পর্য্যন্ত টানা যাইতে পারে।

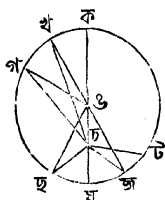
কখগঘ বৃত্তের কঘ ব্যাসে, কেন্দ্র হইতে ভিন্ন চ বিন্দু কল্পিত হইয়াছে; ঙ যেন বৃত্তের কেন্দ্র; চ বিন্দু হইতে পরিধি পর্য্যন্ত অঙ্কিত চখ, চগ, চছ প্রভৃতি যাবতীয় সরল রেখার মধ্যে, কেন্দ্র গত চক রেখা বৃহত্তম এবং ব্যাসের অপরাংশ অর্থাৎ চঘ ক্ষুদ্রতম; আর অন্যান্য রেখা গুলির মধ্যে চখ, চগ অপেক্ষা এবং চগ, চছ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

• খঙ, গঙ ও ছঙ সংযুক্ত কর।

পরে, ত্রিভুজের দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হয় বলিয়া, [১ম, ২০।

খঙ ও ঙচ একত্র যোগে, খচ অপেক্ষা বৃহত্তর;

ইহাদের মধ্যে খঙ, কঙর সমান; [১ম, সংজ্ঞা ১৫।
অতএব কঙ ও ঙচ একত্র যোগে খচ অপেক্ষা বৃহত্তর;
অর্থাৎ কচ রেখা খচ অপেক্ষা বৃহত্তর।

আবার খঙ, গঙর সমান বলিয়া, [১ম, সংজ্ঞা ১৫।
এবং খঙচ ও গঙচ দুই ত্রিভুজের ঙচ সাধারণ ভুজ বলিয়া, খঙ ও ঙচ দুই ভুজ ক্রমে গঙ ও ঙচ দুই ভুজের সমান;
কিন্তু খঙচ কোণ, গচঙ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর;
এই হেতু চখ ভূমি চগ ভূমি অপেক্ষা বৃহত্তর।
এই রূপে প্রমাণ হইবে যে, চগ, চছ অপেক্ষা বৃহত্তর।

পুনর্ব্বার ছচ ও চঙ একত্র যোগে, ঙছ অপেক্ষা বৃহত্তর বলিয়া, [১ম, ২০।
এবং ঙছ, ঙঘএর সমান হওয়াতে, [১ম, সংজ্ঞা ১৫।
ছচ ও চঙ একত্র যোগে, ঙঘ অপেক্ষা বৃহত্তর।
এই দুই সমান বস্তু হইতে সাধারণ অংশ, অর্থাৎ চঙ বিয়োগ করিলে,
অবশিষ্ট ছচ, অবশিষ্ট চঘ অপেক্ষা বৃহত্তর;
সুতরাং চ বিন্দু হইতে পরিধি পর্য্যন্ত অঙ্কিত সরল রেখা গুলির মধ্যে চক বৃহত্তম ও চঘ ক্ষুদ্রতম;
আর চখ, চগ অপেক্ষা এবং চগ, চছ অপেক্ষা বৃহত্তর।

আবার চ বিন্দু হইতে চঘ রেখার দুই দিকে দুইটী মাত্র সমান সরল রেখা টানা যাইতে পারে।

ঙচ রেখার ঙ বিন্দুতে চঙছ কোণের সমান চঙজ কোণ অঙ্কিত করিয়া চজ সংযুক্ত কর। [১ম, ২৩।

পরে ঙছ, ঙজএর সমান হওয়াতে, [১ম,সংজ্ঞা ১৫।

এবং ছঙচ ও জঙচ এই দুই ত্রিভুজের চঙ সাধারণ বাহু বলিয়া,

ঙছ ও ঙচ দুই বাহু ক্রমে ঙজ ও ঙচ দুই বাহুর সমান;

এবং ছঙচ কোণ, জঙচ কোণের সমান; [অঙ্কন।

এই হেতু চছ ভূমি চজ ভূমির সমান। [১ম, ৪।

আর চ বিন্দু হইতে পরিধি পর্য্যন্ত চজ ব্যতীত অন্য কোন সরল রেখা চছএর সমান করিয়া টানা যায় না;

যদি সম্ভব হয়, তবে চট রেখাও যেন চছএর সমান হইল।

পরে চট, চছএর সমান বলিয়া, [কল্পনা।

এবং চজ, চছএর সমান হওয়াতে,

চজ, চটএর সমান; [স্বতঃ ১।

অর্থাৎ কেন্দ্র গত রেখার নিকটবর্ত্তী একটী সরল রেখা তদপেক্ষা দূরবর্ত্তী রেখার সমান;

কিন্তু পূর্ব্বে প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, এরূপ হওয়া অসম্ভব।

অতএব বৃত্তের ব্যাসে ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৯। ব্যাসের কোন বিন্দু হইতে তাহার সহিত সমান সমান কোণ করিয়া যদি দুইটী জ্যা টানা যায়, তবে ঐ দুইটী জ্যা পরস্পর সমান ও কেন্দ্র হইতে সম দূরবর্ত্তী হইবে।

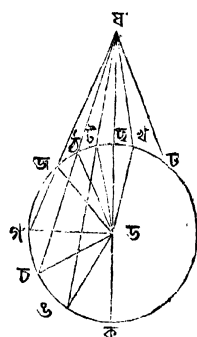
৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন বৃত্তের বাহিরে একটী বিন্দু কল্পনা করিয়া তথা হইতে পরিধি পর্য্যন্ত যদি কতিপয় সরল রেখা টানা যায় ও তন্মধ্যে একটী কেন্দ্র গত হয়, তবে যে রেখা গুলি পরিধির ন্যুব্জ পৃষ্ঠে পতিত হয়, তাহাদের মধ্যে কেন্দ্র গত রেখাটী বৃহত্তম এবং অবশিষ্ট গুলির মধ্যে যেটী কেন্দ্রগত রেখার নিকটবর্ত্তী, সেইটী অধিকতর দূরবর্ত্তী রেখা অপেক্ষা বৃহত্তর; কিন্তু যে রেখা গুলি কুব্জ পৃষ্ঠে পতিত হয়, তন্মধ্যে যেটী বৃত্তের বহিস্থ কল্পিত বিন্দু ও ব্যাসের মধ্যস্থিত, সেইটী ক্ষুদ্রতম এবং অবশিষ্ট গুলির মধ্যে যেটী, ক্ষুদ্রতমের নিকটবর্ত্তী, সেইটী অধিকতর দূরবর্ত্তী রেখা হইতে ক্ষুদ্রতর; আর ঐ বিন্দু হইতে পরিধি পর্য্যন্ত ক্ষুদ্রতম রেখার দুই দিকে এক একটী করিয়া দুইটী মাত্র সমান সরল রেখা টানা যাইতে পারে।*

কখগ বৃত্তের বাহিরে ঘ বিন্দু কল্পনা করিয়া ঘক, ঘঙ, ঘচ ও ঘগ কতিপয় সরল রেখা টান এবং ইহাদের মধ্যে ঘক যেন কেন্দ্র গত হইয়াছে; যে রেখা গুলি কঙচগ ন্যুব্জ পৃষ্ঠে পতিত হইয়াছে, তন্মধ্যে ঘক রেখা বৃহত্তম এবং যেটী ইহার নিকটবর্ত্তী, সেইটী অধিকতর দূরবর্ত্তী রেখা অপেক্ষা

* বৃত্ত পরিধির বহির্দ্দিকের নাম কুব্জ ও অন্তর দিকের নাম ন্যুব্জ পৃষ্ঠ।

বৃহত্তর; অর্থাৎ ঘঙ, ঘচ অপেক্ষা ও ঘচ, ঘগ অপেক্ষা বৃহত্তর; কিন্তু যে রেখা গুলি ছটঠজ কুব্জ পৃষ্ঠে পতিত হইয়াছে, তন্মধ্যে ঘ বিন্দু ও কছ ব্যাসের মধ্য স্থিত ঘছ রেখা ক্ষুদ্রতম এবং যেটী ইহার নিকটবর্ত্তী সেইটী অধিকতর দূরবর্ত্তী রেখা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, অর্থাৎ ঘট, ঘঠ অপেক্ষা ও ঘঠ, ঘজ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

ড বিন্দুকে কখগ বৃত্তের কেন্দ্র কল্পনা কর। [৩য়, ১।
এবং ডট, ডঠ, ডজ, ডগ, ডচ ও ডঙ সংযুক্ত করিয়া দাও।

পরে, ত্রিভুজের দুই বাহু একত্র যোগে তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হয় বলিয়া, [১ম ২০।
ঙড ও ডঘ একত্র যোগে ঙঘ অপেক্ষা বৃহত্তর;
ইহাদের মধ্যে ঙড, কঙএর সমান;　　[১ম, সং ১৫।
অতএব কড ও ডঘ একত্র যোগে ঙঘ অপেক্ষা বৃহত্তর;
অর্থাৎ কঘ, ঙঘ অপেক্ষা বৃহত্তর।

আবার ঙড, চঙর সমান বলিয়া, [১ম, সংজ্ঞা ১৫।
এবং ঙডঘ ও চডঘ দুই ত্রিভুজের ডঘ সাধারণ বাহু হওয়াতে,

ঙড ও ডঘ দুই বাহু ক্রমে চড ও ডঘ দুই বাহুর সমান;
কিন্তু ঙডঘ কোণ চডঘ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর;

এই হেতু ঙঘ ভূমি, চঘ ভূমি অপেক্ষা বৃহত্তর। [১ম, ২৪।
এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে যে, চঘ, গঘ অপেক্ষা বৃহত্তর ;
সুতরাং ঘক বৃহত্তম এবং ঘঙ, ঘচ অপেক্ষা ও ঘচ, ঘগ
অপেক্ষা বৃহত্তর।

পুনর্ব্বার, ডট ও টঘ একত্র যোগে ডঘ অপেক্ষা
বৃহত্তর বলিয়া, [১ম, ২০।
এবং ডট, ডছএর সমান হওয়াতে, [১ম, সংজ্ঞা ১৫।
অবশিষ্ট টঘ, অবশিষ্ট ছঘ অপেক্ষা বৃহত্তর,
অর্থাৎ ছঘ, টঘ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

আবার, ডঠঘ ত্রিভুজের ডঘ ভূমির ড ও ঘ দুই প্রান্ত
হইতে অভ্যন্তরীণ ট বিন্দু পর্য্যন্ত ডট ও ঘট দুই সরল
রেখা টানা হইয়াছে বলিয়া,
ডট ও ঘট রেখা দ্বয় একত্র যোগে ডঠ ও ঘঠ অপেক্ষা
ক্ষুদ্রতর ; [১ম, ২১।
ইহাদের মধ্যে ডট, ডঠএর সমান ; [১ম, সংজ্ঞা ১৫।
অতএব অবশিষ্ট টঘ, অবশিষ্ট ঠঘ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।
এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে যে, ঠঘ, জঘ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ;
সুতরাং ঘছ ক্ষুদ্রতম এবং ঘট, ঘঠ অপেক্ষা ও ঘঠ, ঘজ
অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।
অনন্তর, ঘ বিন্দু হইতে পরিধি পর্য্যন্ত ক্ষুদ্রতম রেখার
দুই দিকে এক একটী করিয়া দুইটী মাত্র সমান সরল রেখা
টানিতে পারা যায়।

ডঘ রেখার ড বিন্দুতে ঘডট কোণের সমান ঘডথ
কোণ কর, [১ম, ২৩।

এবং ঘখ সংযুক্ত করিয়া দাও।

পরে ডট, ডখএর সমান বলিয়া, [১ম, সংজ্ঞা ১৫।
টড ও ডঘ দুই বাহু ক্রমে খড ও ডঘএর সমান;
আর ঘডট কোণ, ঘডখ কোণের সমান; [অঙ্কন।
সুতরাং ঘট ভূমি ঘখ ভূমির সমান। [১ম, ৪।
আর ঘ বিন্দু হইতে পরিধি পর্য্যন্ত ঘখ ব্যতীত অন্য কোন সরল রেখা ঘটএর সমান করিয়া টানা যাইতে পারে না;
যদি এরূপ সম্ভব হয়, তবে ঘঢ যেন ঘটএর সমান হইল।
পরে ঘঢ, ঘটএর সমান বলিয়া,
এবং ঘখ, ঘটএর সমান হওয়াতে,
ঘখ, ঘঢএর সমান; [স্বতঃ ১।
অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর রেখার নিকটবর্ত্তী রেখা অধিকতর দূরবর্ত্তী রেখার সমান;
কিন্তু পূর্ব্বে প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, এরূপ হওয়া অসম্ভব।
অতএব কোন বৃত্তের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—১০। যদি কোন বৃত্তের দুই বর্দ্ধিত জ্যা বর্দ্ধিত ব্যাসের কোন এক বিন্দুতে সংলগ্ন হইয়া তাহার সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, তবে ঐ দুইটী জ্যা পরস্পর সমান ও কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্ত্তী হইবে।

৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

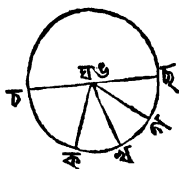
বৃত্তের অভ্যন্তরে একটী বিন্দু কল্পনা করিলে, যদি তথা হইতে পরিধি পর্য্যন্ত দুইএর অধিক কতিপয়

সমান সরল রেখা টানিতে পারা যায়, তবে সেই বিন্দুই বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

কখগ বৃত্তের অভ্যন্তরে ঘ বিন্দু কল্পনা করিলে, যদি তথা হইতে পরিধি পর্য্যন্ত দুইএর অধিক ঘক, ঘখ, ঘগ কতিপয় সমান সরল রেখা টানিতে পারা যায়, তবে ঘ বিন্দুই ঐ বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

যদি না হয়, তবে যেন ঙ বিন্দু কেন্দ্র হইল;

ঘঙ সংযুক্ত কর এবং ইহাকে উভয় পার্শ্বে বর্দ্ধিত করিয়া পরিধির সহিত চ ও ছ বিন্দুতে মিলাইয়া দাও;

তাহা হইলে চছ রেখা কখগ বৃত্তের একটী ব্যাস হইবে।

পরে, কখগ বৃত্তের চছ ব্যাসে কেন্দ্র হইতে ভিন্ন ঘ বিন্দু কল্পিত হইয়াছে বলিয়া, ঘ হইতে পরিধি পর্য্যন্ত অঙ্কিত সরল রেখা গুলির মধ্যে ঘছ বৃহত্তম এবং ঘগ, ঘখ অপেক্ষা ও ঘখ, ঘক অপেক্ষা বৃহত্তর; [৩য়, ৭।

কিন্তু ইহারা পরস্পর সমান কল্পিত হইয়াছে;

অতএব এরূপ হওয়া অসম্ভব;

এই হেতু ঙ বিন্দু কখগ বৃত্তের কেন্দ্র নহে।

এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে যে, ঘ ব্যতীত অন্য কোন বিন্দু কখগ বৃত্তের কেন্দ্র হইতে পারে না;

সুতরাং ঘ বিন্দুই কখগ বৃত্তের কেন্দ্র।

অতএব বৃত্তের অভ্যন্তর ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—১১। যদি কোন বৃত্তের পরিধিতে সমকোণী ত্রিভুজের তিনটী কৌণিক বিন্দু অবস্থিত হয়, তবে কর্ণের মধ্য বিন্দু ঐ বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

১০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন বৃত্ত পরিধি অন্য এক বৃত্ত পরিধিকে দুইএর অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

যদি সম্ভব হয়, তবে কখগ বৃত্ত পরিধি যেন ঘঙচ বৃত্ত পরিধিকে দুইএর অধিক খ, ছ, চ বিন্দুতে ছেদ করিল।

ট বিন্দুকে কখগ বৃত্তের কেন্দ্র কল্পনা কর, [৩য়, ১।
এবং টখ, টছ ও টচ সংযুক্ত করিয়া দাও।

পরে, ট বিন্দু কখগ বৃত্তের কেন্দ্র বলিয়া,

টখ, টছ ও টচ ইহারা পরস্পর সমান। [১ম, সংজ্ঞা১৫।
আবার, ঘঙচ বৃত্তের অভ্যন্তরে ট বিন্দু কল্পিত হইয়াছে এবং তথা হইতে পরিধি পর্য্যন্ত দুইএর অধিক টখ, টছ ও টচ সমান সরল রেখা গুলি অঙ্কিত হইয়াছে; অতএব ট বিন্দু ঘঙচ বৃত্তের কেন্দ্র; [৩য়, ৯।
আর ট বিন্দু কখগ বৃত্তেরও কেন্দ্র। [অঙ্কন।
সুতরাং এক বিন্দু পরস্পর ছেদিত দুই বৃত্তেরই কেন্দ্র হইল; কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব। [৩য়, ৫।
অতএব কোন বৃত্ত পরিধি ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

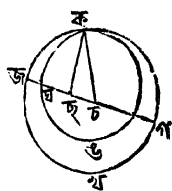
অঃ প্রঃ—১২। দুই বৃত্ত পরিধি পরস্পরকে ছেদ করিলে, যদি একটী ছেদ বিন্দু হইতে দুই বৃত্তের দুইটী ব্যাস টানা যায়, তবে ঐ দুই ব্যাসের অপর প্রান্ত দ্বয় এবং বৃত্ত দুইটীর অন্য ছেদ বিন্দু, একই সরল রেখাতে থাকিবে।

১১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যদি এক বৃত্ত অন্য এক বৃত্তকে অন্তরে স্পর্শ করে, তবে তাহাদের কেন্দ্র সংযোজক সরল রেখা বর্দ্ধিত হইলে বৃত্ত দ্বয়ের সংযোগ বিন্দু দিয়া যাইবে।

কঘঙ বৃত্ত কখগ বৃত্তকে যেন ক বিন্দুতে অন্তরে স্পর্শ করিয়াছে; এবং চ যেন কখগ বৃত্তের ও ছ যেন কঘঙ বৃত্তের কেন্দ্র; চ ও ছ কেন্দ্র দ্বয়ের সংযোজক রেখা বর্দ্ধিত হইলে ক বিন্দু দিয়া যাইবে।

যদি ক বিন্দু দিয়া না যায়, তবে চছঘজএর ন্যায় অন্য রূপে যাইবে; কচ ও কছ সংযুক্ত কর।

পরে, চছ ও ছক একত্র যোগে চক অপেক্ষা বৃহত্তর বলিয়া, [১ম, ২০।
এবং চক, চজএর সমান হওয়াতে, ১ম, সংজ্ঞা ১৫।
চছ ও ছক, একত্র যোগে, চজ অপেক্ষা বৃহত্তর;
এই দুই সমান বস্তু হইতে সাধারণ চছ অংশ বিয়োগ করিলে, অবশিষ্ট ছক অবশিষ্ট ছজ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে; [স্বতঃ ৫।
ইহাদের মধ্যে ছক, ছঘএর সমান বলিয়া, [১ম, সংজ্ঞা ১৫।

ছঘ, ছজ অপেক্ষা বৃহত্তর, অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর বৃহত্তর অপেক্ষা বড় ;

কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব ;

সুতরাং চ ও ছএর সংযোজক রেখা ক ব্যতীত অন্য কোন বিন্দু দিয়া যাইতে পারে না ; অর্থাৎ ইহা ক বিন্দু দিয়াই যাইবে।

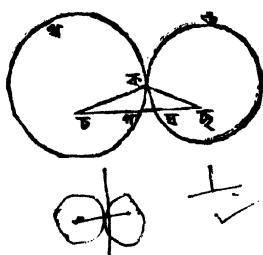
অতএব যদি এক বৃত্ত ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—১৩। এক বৃত্ত অন্য এক বৃত্তকে অন্তরে স্পর্শ করিলে, তাহাদের কেন্দ্র সংযোজক রেখা দুই বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের অন্তরের সমান হইবে।

১২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই বৃত্ত পরস্পরকে বাহিরে স্পর্শ করিলে তাহাদের কেন্দ্র সংযোজক রেখা, বৃত্ত দ্বয়ের সংযোগ বিন্দু দিয়া যাইবে।

কখগ ও কঘঙ দুই বৃত্ত যেন ক বিন্দুতে পরস্পরকে বাহিরে স্পর্শ করিতেছে ; এবং চ যেন কখগ বৃত্তের ও ছ যেন কঘঙ বৃত্তের কেন্দ্র ; চ ও ছ কেন্দ্র দ্বয় সংয়োজক রেখা, ক বিন্দু দিয়া যাইবে।

যদি ক বিন্দু দিয়া না যায়, তবে সম্ভব হইলে অন্য রূপে চগঘছএর ন্যায় যাইবে। কচ ও কছ সংযুক্ত কর।

পরে, চ বিন্দু কখগ বৃত্তের কেন্দ্র হওয়াতে, চক, চগএর সমান; [১ম, সংজ্ঞা ১৫।

আর ছ বিন্দু কঘঙ বৃত্তের কেন্দ্র হওয়াতে, ছক, ছঘএর সমান;

এই হেতু চক ও কছএর সমষ্টি চগ ও ঘছএর সমষ্টির সমান; [স্বতঃ ২।

এজন্য সমস্ত চছ রেখা, চক ও কছ অপেক্ষা বৃহত্তর;

আবার চছ রেখা, চকওকছ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর; [১ম, ২০।

অতএব এরূপ হওয়া অসম্ভব;

সুতরাং চ ও ছ কেন্দ্র সংযোজক রেখা ক ব্যতীত অন্য কোন বিন্দু দিয়া যাইতে পারে না, অর্থাৎ ইহা ক বিন্দু দিয়াই যাইবে।

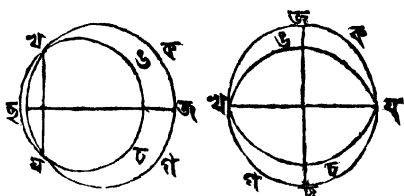
অতএব দুই বৃত্ত ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—১৪। এক বৃত্ত অন্য এক বৃত্তকে বাহিরে বা অন্তরে স্পর্শ করিলে যদি দুইটী বৃত্তের পরস্পর সমান্তর দুইটী ব্যাস টানা যায়, তবে বৃত্তদ্বয়ের সংযোগ বিন্দু ও প্রত্যেক ব্যাসের এক একটী প্রান্ত একই সরল রেখাতে থাকিবে।

১৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

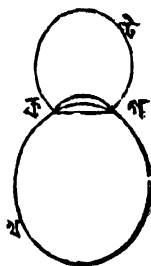
কোন বৃত্ত আর একটীকে একাধিক বিন্দুতে অন্তরে বা বাহিরে স্পর্শ করিতে পারে না।

যদি সম্ভব হয়, তবে প্রথমত যেন ঙখচ বৃত্ত, বৃত্তকে অন্তরে, একাধিক খ ও ঘ বিন্দুতে, স্পর্শ করিল।

খঘ সংযুক্ত ও তাহাতে দ্বিখণ্ড কর;
খঘএর সহিত সম কোণ করিয়া তাহার মধ্য বিন্দু হইতে
ছজ সরল রেখা টান। [১ম, ১০ ও ১১।

পরে, খ ও ঘ এই দুই বিন্দু প্রত্যেক বৃত্ত পরিধিতে
অবস্থিত হওয়াতে, খঘ সরল রেখা প্রত্যেকের অন্তরে
থাকিবে; [৩য়, ২।
এই হেতু খঘএর সহিত সম কোণ করিয়া তাহার মধ্য
বিন্দু হইতে যে ছজ সরল রেখা টানা হইয়াছে, তাহাতেই
দুই বৃত্তের কেন্দ্র অবস্থিত হইবে; [৩য়, ১, অনু।
অতএব ছজ সরল রেখা দুই বৃত্তের সংযোগ বিন্দু দিয়া
যাইবে; [৩য়, ১১।
কিন্তু ছজ, সংযোগ বিন্দু দিয়া যাইতেছে না; কেননা,
খ ও ঘ বিন্দু, ছজ রেখাস্থ না হইয়া তাহার বাহিরে
আছে;
সুতরাং এরূপ হওয়া অসম্ভব।
অতএব এক বৃত্ত অন্য এক বৃত্তকে অন্তরে একাধিক বিন্দুতে
স্পর্শ করিতে পারে না।

এক বৃত্ত অন্য এক বৃত্তকে বাহিরেও একাধিক বিন্দুতে
স্পর্শ করিতে পারে না।

যদি সম্ভব হয়, তবে কগট বৃত্ত যেন কখগ বৃত্তকে ক ও গ বিন্দুতে স্পর্শ করিল। কগ সংযুক্ত কর।

পরে, ক ও গ বিন্দু দ্বয় কটগ বৃত্ত পরিধিস্থ হওয়াতে, ইহাদের সংযোজক কগ সরল রেখা, কটগ বৃত্তের অন্তরস্থ হইবে; [৩য়, ২।

আর কগট বৃত্ত, কখগ বৃত্তের বহিস্থ বলিয়া, [কল্পনা।

কগ সরল রেখা কখগ বৃত্তের বাহিরে থাকিবে।

আবার ক ও গ বিন্দু কখগ বৃত্ত পরিধিস্থ হওয়াতে,

কগ সরল রেখা কখগ বৃত্তের অন্তরস্থ হইবে; [৩য়, ২।

অতএব এরূপ হওয়া অসম্ভব;

সুতরাং এক বৃত্ত অন্য এক বৃত্তকে বাহিরে একাধিক বিন্দুতে স্পর্শ করিতে পারে না;

আর প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, এক বৃত্ত অন্য এক বৃত্তকে অন্তরে একাধিক বিন্দুতে স্পর্শ করিতে পারে না।

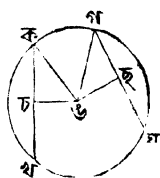
অতএব কোন বৃত্ত ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—১৫। এক বৃত্ত অন্য এক বৃত্তকে অন্তরে স্পর্শ করিলে, যদি আর একটী বৃত্ত এরূপে অঙ্কিত করা যায়, যে তাহা পূর্ব্বোক্ত দুই বৃত্তের একটীকে অন্তরে ও অন্যটীকে বাহিরে স্পর্শ করে, তবে প্রথম দুই বৃত্তের কেন্দ্র হইতে তৃতীয় বৃত্তের কেন্দ্রের দূরত্বের সমষ্টি, অপরিবর্ত্তনীয় রাশি হইবে।

১৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

বৃত্তস্থ সমান সমান সরল রেখা কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্ত্তী আর যে সকল সরল রেখা কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্ত্তী, তাহারা পরস্পর সমান।

কখঘগ বৃত্তস্থ কখ ও গঘ দুই সরল রেখা যেন পরস্পর সমান;
ইহারা কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্ত্তী হইবে।

ঙ বিন্দুকে কখঘগ বৃত্তের কেন্দ্র কল্পনা করিয়া, [৩য়, ১।
কখ ও গঘ রেখা দ্বয়ের উপর, ঙ হইতে ঙচ ও ঙছ লম্ব টান; [১ম, ১২।
এবং ঙক ও ঙগ সংযুক্ত কর।

পরে, কেন্দ্র গত ঙচ রেখা কেন্দ্রের বহির্গত কখ রেখার সহিত সম কোণ করিতেছে বলিয়া, উহা কখকে দ্বিখণ্ড করিবে; [৩য়, ৩।
অতএব কচ, চখএর সমান এবং কখ, কচএর দ্বিগুণ।
এই কারণে গঘ, গছএর দ্বিগুণ;
আর কখ, গঘএর সমান; [কল্পনা।
এই হেতু কচ, গছএর সমান। [স্বতঃ ৭।
আবার কঙ, গঙর সমান বলিয়া, [১ম, সংজ্ঞা ১৫।
কঙর উপর সমচতুর্ভুজ, গঙর উপর সমচতুর্ভুজের সমান।
ইহাদের মধ্যে কঙর উপর সমচতুর্ভুজ, কচ ও চঙর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান; কেননা কচঙ সম কোণ; [১ম, ৪৭।

এই কারণে ঙগএর উপর সমচতুর্ভুজ, গছ ও ছঙর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান ;
অতএব কচ ও চঙর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, গছ ও ছঙর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান ; [স্বতঃ ১।
আর কচ, গছএর সমান হওয়াতে, কচএর উপর সমচতুর্ভুজ গছএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ;
অতএব অবশিষ্ট চঙর উপর সমচতুর্ভুজ, অবশিষ্ট ছঙর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ; [স্বতঃ ৩।
এই হেতু ঙচ সরল রেখা ঙছএর সমান।
আবার যে সকল সরল রেখার উপর কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত লম্ব গুলি সমান হয়, তাহাদিগকে কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্ত্তী বলা যায় ; [৩য়, সংজ্ঞা ৪।
সুতরাং কখ ও গঘ সরল রেখা দ্বয় কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্ত্তী।

অনন্তর যদি কখ ও গঘ কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্ত্তী হয়, অর্থাৎ ঙচ, ঙছএর সমান হয়, তাহা হইলে কখ, গঘএর সমান হইবে।

পূর্ব্ব রূপ চিত্র অঙ্কিত করিলে, ১ম প্রকরণের ন্যায়প্রতিপন্ন হইবে যে, কখ সরল রেখা কচএর দ্বিগুণ এবং গঘ, গছএর দ্বিগুণ ; আর ঙচ ও চকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, ঙছ ও ছগএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান ;
ইহাদের মধ্যে ঙচএর উপর সমচতুর্ভুজ, ঙছএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ;
কেননা ঙচ, ঙছএর সমান ; [কল্পনা।

অতএব অবশিষ্ট চকএর উপর সমচতুর্ভুজ, অবশিষ্ট ছগএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান; [স্বতঃ ৩।

এজন্য কচ সরল রেখা, গছ সরল রেখার সমান;

আর কখ, কচএর এবং গঘ, গছএর দ্বিগুণ প্রতিপন্ন হইয়াছে;

সুতরাং কখ, গঘএর সমান। [স্বতঃ ৬।

অতএব বৃত্তস্থ সমান ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—১৩। এক নির্দ্দিষ্ট রেখার সমান্তর ও কোন বৃত্তস্থ একটী জ্যার সমান, আর একটী জ্যা ঐ বৃত্তে অঙ্কিত করিতে হইবে।

১৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন বৃত্তের অন্তরস্থ যাবতীয় সরল রেখার মধ্যে ব্যাস বৃহত্তম ও অন্যান্য গুলির মধ্যে যেটী কেন্দ্রের নিকটবর্ত্তী সেইটী দূরবর্ত্তী রেখা অপেক্ষা বৃহত্তর; আর বৃহত্তর রেখা ক্ষুদ্রতর অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটবর্ত্তী।

কঘ যেন কখগঘ বৃত্তের ব্যাস ও ঙ ইহার কেন্দ্র; আর খগ, চছ অপেক্ষা যেন কেন্দ্রের নিকটবর্ত্তী সরল রেখা; কঘ রেখা, ব্যাস নহে এরূপ খগ সরল রেখা অপেক্ষা বৃহত্তর এবং খগ, চছ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

কেন্দ্র হইতে খগ ও চছএর উপর,
ঙজ ও ঙট লম্ব টান, [১ম, ১২।
এবং ঙখ, ঙগ ও ঙচ সংযুক্ত কর ;
পরে কঙ, খঙর এবং ঙঘ, ঙগএর
সমান বলিয়া, [১ম, সংজ্ঞা ১৫।
কঘ রেখা, খঙ ও ঙগএর সমান ; [স্বতঃ ২।
আর খঙ ও ঙগ, খগ অপেক্ষা বৃহত্তর ; [১ম, ২০।
এই হেতু কঘ রেখাও খগ অপেক্ষা বৃহত্তর।
আবার খগ রেখা চছ অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটবর্ত্তী
হওয়াতে, [কল্পনা।
ঙজ, ঙট অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। [৩য়, সংজ্ঞা ৫।
এক্ষণে, পূর্ব্ব প্রতিজ্ঞাতে যেরূপে প্রতিপন্ন হইয়াছে,
তদ্রূপে প্রতিপন্ন হইবে যে, খগ, খজএর ও চছ, চটএর
দ্বিগুণ ; এবং ঙজ ও জখএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, ঙট ও
টচএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান।

ইহাদের মধ্যে ঙজএর উপর সমচতুর্ভুজ, ঙটএর উপর
সমচতুর্ভুজ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ;
কেননা, ঙজ রেখা ঙট অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।
এই হেতু জখএর উপর সমচতুর্ভুজ, টচএর উপর সমচতু-
র্ভুজ অপেক্ষা বৃহত্তর ;
অতএব খজ সরল রেখা, চট সরল রেখা অপেক্ষা বৃহত্তর ;
সুতরাং খগ, চছ অপেক্ষা বৃহত্তর।
অনন্তর, খগ যেন চছ অপেক্ষা বৃহত্তর হইল ; খগ
রেখা চছ অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটবর্ত্তী হইবে ;

অর্থাৎ পূর্ব্ব রূপ চিত্র অঙ্কিত করিলে, ঙজ রেখা, ঙট অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

খগ, চছ অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে, খজ রেখা, চট অপেক্ষা বৃহত্তর;

আর খজ ও জঙর উপর দুই সমচতুর্ভুজ, চট ও টঙর উপর দুই সমচতুর্ভুজের সমান;

এবং ইহাদের মধ্যে খজএর উপর সমচতুর্ভুজ, চটএর উপর সমচতুর্ভুজ অপেক্ষা বৃহত্তর;

কেননা, খজ রেখা, চট অপেক্ষা বৃহত্তর;

এই হেতু জঙর উপর সমচতুর্ভুজ, টঙর উপর সমচতুর্ভুজ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর;

অর্থাৎ ঙজ সরল রেখা ঙট সরল রেখা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর;

সুতরাং খগ রেখা, চছ অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটবর্ত্তী;

অতএব বৃত্তের অন্তরস্থ ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য;

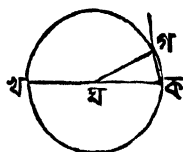
অঃ প্রঃ—১৭। বৃত্তের অন্তরস্থ কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া ক্ষুদ্রতম জ্যা টানিতে হইবে।

১৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন বৃত্তের ব্যাসের এক প্রান্ত হইতে তাহার সহিত সম কোণ করিয়া একটী সরল রেখা টানিলে, তাহা বৃত্তের বাহিরে পড়িবে; আর ঐ রেখার ও

পরিধির মধ্যে বৃত্তকে ছেদ না করে এমন কোন সরল রেখা ব্যাসের প্রান্ত হইতে টানা যাইতে পারে না।

কখগ বৃত্তের ঘ যেন কেন্দ্র এবং কখ একটী ব্যাস; ক প্রান্ত হইতে কখএর সহিত সম কোণ করিয়া একটী সরল রেখা টানিলে, তাহা বৃত্তের বাহিরে পড়িবে।

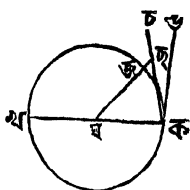
যদি তাহা বাহিরে না পড়ে, তবে যেন ভিতরে কগএর ন্যায় পড়িল; ঘ হইতে পরিধির ও কগএর ছেদ বিন্দু গ পর্য্যন্ত ঘগ রেখা টান।

পরে ঘক, ঘগএর সমান বলিয়া, [১ম, সংজ্ঞা ১৫।
ঘকগ কোণ, ঘগক কোণের সমান। [১ম, ৫।
ইহাদের মধ্যে ঘকগ সম কোণ; [কল্পনা।
এই হেতু ঘগক কোণও সম কোণ;
অতএব ঘকগ ও ঘগক কোণ, একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান; কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব। [১ম, ১৭।
অতএব ক হইতে কখএর সহিত সম কোণ করিয়া সরল রেখা টানিলে, তাহা বৃত্তের ভিতরে পড়িতে পারে না।

এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে যে, ইহা পরিধির উপর পড়িয়া তাহার সহিত মিলিয়া যাইতেও পারে না; সুতরাং ইহা অবশ্যই বৃত্তের বাহিরে কঙর ন্যায় পড়িবে।

আবার কঙ ও পরিধির মধ্যে বৃত্তকে ছেদ না করে

এমন কোন সরল রেখা ক বিন্দু হইতে টানা যাইতে পারে না।

যদি সম্ভব হয়, তবে উহাদের মধ্যে যেন কচ রেখা অবস্থিত হইল ;

ঘ কেন্দ্র হইতে কচএর উপর ঘছ লম্ব টান ;

ঘছ যেন পরিধিকে জ বিন্দুতে ছেদ করিল।

পরে, ঘছক, সম কোণ হওয়াতে, [অঙ্কন।

ঘকছ কোণ সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ; [১ম, ১৭।

এই হেতু ঘক বাহু, ঘছ অপেক্ষা বৃহত্তর। [১ম, ১৯।

ইহাদের মধ্যে ঘক, ঘজএর সমান ; [১ম, সংজ্ঞা ১৫।

অতএব ঘজ রেখা ঘছ অপেক্ষা বৃহত্তর, অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর বৃহত্তর অপেক্ষা বড় ; কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব। সুতরাং কঙ ও পরিধির মধ্যে বৃত্তকে ছেদ না করে এমন কোন সরল রেখা ক বিন্দু হইতে টানা যাইতে পারে না। অতএব কোন বৃত্তের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অনুমান। ইহা দ্বারা স্পষ্টই বোধ হইবে যে, কোন বৃত্তের ব্যাসের সহিত সম কোণ করিয়া তাহার এক প্রান্ত হইতে একটী সরল রেখা টানিলে, তাহা বৃত্তকে স্পর্শ করিবে ; [৩য়, সংজ্ঞা ২।

এবং ইহা বৃত্তকে কেবল এক বিন্দুতে স্পর্শ করিবে ; কেননা বৃত্তের সহিত দুই বিন্দুতে সংলগ্ন হইলে, ইহা বৃত্তের অন্তরে পড়িবে ; [৩য়. ২।

আর ইহাও বোধ হইবে যে, কেবল একটী সরল রেখা কোন বৃত্তকে একই বিন্দুতে স্পর্শ করিতে পারে।

অঃ প্রঃ—১৮। কোন বৃত্তের বর্দ্ধিত ব্যাসে এরূপ এক বিন্দু স্থির কর, যেন তথা হইতে একটী স্পর্শিনী টানিলে তাহা ব্যাসের সমান হয়।

১৭ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে, এরূপ এক সরল রেখা পরিধির বহিস্থ বা পরিধিস্থ এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে টানিতে হইবে।

প্রথমত, নির্দ্দিষ্ট ক বিন্দু যেন নির্দ্দিষ্ট খগঘ বৃত্তের বাহিরে আছে; ক বিন্দু হইতে নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে, এরূপ এক সরল রেখা টানিতে হইবে।

ঙ বিন্দুকেই বৃত্তের কেন্দ্র কল্পনা করিয়া, [৩য়, ১।

কঙ সংযুক্ত কর; কঙ যেন নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত পরিধিকে ঘ বিন্দুতে ছেদ করিল; ঙ কেন্দ্র হইতে ঙকএর প্রান্ত দিয়া কচছ বৃত্ত অঙ্কিত কর; ঘ বিন্দু হইতে ঙকএর সহিত সম কোণ করিয়া ঘচ সরল রেখা টান; [১ম, ১১।
এবং ঙচ সংযুক্ত কর; ঙচ যেন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের পরিধিকে খ বিন্দুতে ছেদ করিল। কখ সংযুক্ত কর; কখ সরল রেখা খগঘ বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

এক্ষণে, ঙ বিন্দু কচছ বৃত্তের কেন্দ্র হওয়াতে, ঙক রেখা, ঙচএর সমান। [১ম, সংজ্ঞা ১৫।

আবার ঙ বিন্দু খগঘ বৃত্তের কেন্দ্র হওয়াতে ঙখ রেখা, ঙঘএর সমান। [১ম, সংজ্ঞা ১৫।

অতএব কঙ ও ঙখ দুই বাহু ক্রমে চঙ ও ঙঘ দুই বাহুর সমান;

এবং ঙ বিন্দুস্থ কোণ, কঙখ ও চঙঘ দুই ত্রিভুজের সাধারণ কোণ;

এই হেতু কঙখ ত্রিভুজ চঙঘ ত্রিভুজের সমান এবং সমান সমান বাহুর সম্মুখীন অন্যান্য কোণ গুলি যথাক্রমে সমান; [১ম, ৪।

অতএব ঙখক কোণ, ঙঘচ কোণের সমান।

ইহাদের মধ্যে ঙঘচ, এক সম কোণ; [অঙ্কন।

সুতরাং ঙখক কোণও এক সম কোণ, [স্বতঃ ১।

এবং ঙখ সরল রেখা কেন্দ্র হইতে টানা হইয়াছে;

আবার ব্যাসের প্রান্ত হইতে তাহার সহিত সম কোণ করিয়া একটী সরল রেখা টানিলে তাহা বৃত্তকে স্পর্শ করে বলিয়া, [৩য়, ১ অনু।

কখ নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে;

এবং ইহা নির্দ্দিষ্ট ক বিন্দু হইতে টানা হইল।

দ্বিতীয়ত, যদি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু, ঘ বিন্দুর ন্যায় নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত পরিধিস্থ হয়, তবে ঘঙ সংযুক্ত কর এবং ঘঙর সহিত সম কোণ করিয়া ঘচ সরল রেখা টান; ঘচ বৃত্তকে স্পর্শ করিবে। [৩য়, ১৬ অনু।

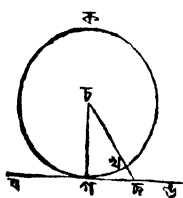
এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—১৯। দুই নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের একটী সাধারণ স্পর্শিনী টানিতে হইবে।

১৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যদি এক সরল রেখা কোন বৃত্তকে স্পর্শ করে, তবে কেন্দ্র হইতে সংযোগ বিন্দু পর্য্যন্ত আর একটী রেখা টানিলে, সেইটী যে রেখা বৃত্তকে স্পর্শ করিয়াছে, তাহার লম্ব হইবে।

ঘঙ সরল রেখা যেন কখগ বৃত্তকে গ বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে; কখগ বৃত্তের চ কেন্দ্র কল্পনা কর এবং চগ সরল রেখা টান; চগ, ঘঙর লম্ব হইবে।

যদি না হয়, তবে চ বিন্দু হইতে ঘঙর উপর চছ লম্ব টান; চছ যেন পরিধিকে খ বিন্দুতে ছেদ করিল।

পরে, চছগ কোণ সম কোণ বলিয়া, [কল্পনা।

চগছ, সূক্ষ্ম কোণ; [১ম, ১৭।

এবং ত্রিভুজের বৃহত্তর কোণের সম্মুখীন বাহু বৃহত্তর হয় বলিয়া, [১ম, ১৯।

চগ, চছ অপেক্ষা বৃহত্তর;

ইহাদের মধ্যে চগ, চখএর সমান; [১ম, সংজ্ঞা ১৫।

অতএব চখ, চছ অপেক্ষা বৃহত্তর, অর্থাৎ, বৃহত্তর ক্ষুদ্রতর

অপেক্ষা বড় ; কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব।

এই হেতু চছ, ঘঙর লম্ব হইতে পারে না।

এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে যে, চগ ব্যতীত অন্য কোন রেখা ঘঙর লম্ব হইতে পারে না ;

সুতরাং চখ, ঘঙর লম্ব।

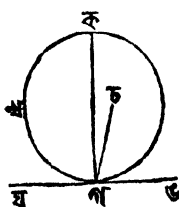
অতএব যদি এক সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—২০। কোন বৃত্তের কেন্দ্র ম ; ব্যাসে বা বৰ্দ্ধিত ব্যাসে অবস্থিত একটী বিন্দু ক ; এবং মখ ব্যাসার্দ্ধ মকএর লম্ব ; যদি কখ, পরিধিকে ত বিন্দুতে ছেদ করে এবং ত বিন্দু হইতে স্পর্শিনী টানিলে তাহা মককে গ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে কগ, গতএর সমান হইবে।

১৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যদি এক সরল রেখা কোন বৃত্তকে স্পর্শ করে এবং যে রেখা স্পর্শ করিবে, যদি তাহার সহিত সম কোণ করিয়া সংযোগ বিন্দু হইতে আর একটী রেখা টানা যায়, তবে সেই রেখাতে বৃত্তের কেন্দ্র থাকিবে।

ঘঙ সরল রেখা যেন কখগ বৃত্তকে গ বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে ;

গ বিন্দু হইতে ঘঙর সহিত সম কোণ করিয়া গক সরল রেখা টান ;

গক রেখাতে নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র থাকিবে।

যদি না থাকে, তবে চ যেন কেন্দ্র হইল; গচ সংযুক্ত কর ।

পরে, ঘঙ, কখগ বৃত্তকে স্পর্শ করাতে,
এবং কেন্দ্র হইতে সংযোগ বিন্দু পর্য্যন্ত চগ সরল রেখা অঙ্কিত হওয়াতে, ইহা ঘঙর লম্ব হইবে; [৩য়, ১৮ ।
অতএব চগঙ কোণ সম কোণ;
আর কগঙ কোণও সম কোণ; [অঙ্কন ।
এই হেতু কগঙ কোণ, চগঙ কোণের সমান, [স্বতঃ ১১ ।
অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর বৃহত্তরের সমান; কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব ।
অতএব চ বিন্দু কখগ বৃত্তের কেন্দ্র হইতে পারে না ।

এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে যে, গক রেখার বহিস্থ কোন বিন্দুই কেন্দ্র হইতে পারে না;
সুতরাং গক রেখাতেই বৃত্তের কেন্দ্র থাকিবে ।
অতএব যদি এক সরল রেখা ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

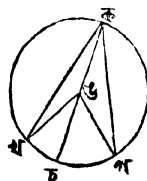
অঃ প্রঃ—২১। কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের বহিস্থ এক বিন্দু হইতে কোন নির্দ্দিষ্ট জ্যার সমান আর একটী জ্যা টানিতে হইবে ।

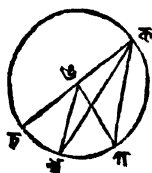
২০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

একই ভূমির উপর, অর্থাৎ একই পরিধিখণ্ডের উপর, বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ হইবে ।

কখগ বৃত্তের কেন্দ্রস্থ খঙগ কোণ ও পরিধিস্থ খকগ কোণ উভয়ে যেন একই ভূমির উপর অর্থাৎ একই খগ পরিধিখণ্ডের উপর অবস্থিত হইয়াছে; খঙগ কোণ খকগ কোণের দ্বিগুণ হইবে।

কঙ সংযুক্ত করিয়া চ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর।

প্রথমত, বৃত্তের কেন্দ্র যেন খকগ কোণের মধ্যে পড়িল।

এক্ষণে, ঙক, ঙখএর সমান বলিয়া,
ঙকখ কোণ, ঙখক কোণের সমান; [১ম, ৫।
অতএব ঙকখ ও ঙখক কোণ দ্বয়, একত্র যোগে ঙকখ কোণের দ্বিগুণ;
আর খঙচ কোণ, ঙকখ ও ঙখক এই দুই কোণের সমান; [১ম, ৩২।
এই হেতু খঙচ কোণ, ঙকখ কোণের দ্বিগুণ।
এই কারণে, চঙগ কোণও ঙকগ কোণের দ্বিগুণ;
সুতরাং সমস্ত খঙগ কোণ, সমস্ত খকগ কোণের দ্বিগুণ।

অনন্তর, বৃত্তের কেন্দ্র খকগ কোণের বাহিরে থাকিলে, প্রথম প্রকরণের ন্যায় সপ্রমাণ হইবে যে, চঙগ কোণ চকগ কোণের দ্বিগুণ, এবং চঙগ কোণের এক অংশ চঙখ কোণ, চকগ কোণের এক অংশ চকখ কোণের দ্বিগুণ;

সুতরাং অবশিষ্ট খঙগ কোণ, অবশিষ্ট খকগ কোণের দ্বিগুণ।

অতএব একই ভূমির উপর, ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

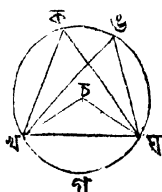
অঃ প্রঃ—২২। কখ ও গঘ দুইটী জ্যা পরস্পরকে ঙ বিন্দুতে বৃত্তের অন্তরে ছেদ করিয়াছে; যদি বৃত্তের কেন্দ্র ম হয়, তবে কমগ কোণ+খমঘ কোণ=২ কঙগ কোণ।

২১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

একই বৃত্তখণ্ডস্থ যাবতীয় কোণ পরস্পর সমান।

কখগঘ বৃত্তের খকঘ ও খঙঘ দুই কোণ যেন একই খকঙঘ বৃত্তখণ্ডস্থ হইয়াছে; খকঘ ও খঙঘ কোণ দ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

কখগঘ বৃত্তের চ কেন্দ্র নির্ণয় কর; [৩য়, ১।

প্রথমত, খকঙঘ বৃত্তখণ্ড যেন অর্দ্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর হইল; চখ ও চঘ সংযুক্ত কর।

পরে, খচঘ কোণ কেন্দ্রস্থ ও খকঘ কোণ পরিধিস্থ হওয়াতে,

এবং খগঘ পরিধিখণ্ড উভয়েরই ভূমি বলিয়া,

খচঘ কোণ, খকঘ কোণের দ্বিগুণ। [৩য়, ২০।

এই কারণে, খচঘ কোণ, খঙঘ কোণেরও দ্বিগুণ;

সুতরাং খকঘ কোণ, খঙঘ কোণের সমান। [স্বতঃ ৭।

অনন্তর, খকঙঘ বৃত্তখণ্ড যেন, অর্দ্ধ বৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর নহে।

কেন্দ্র পর্য্যন্ত কচ রেখা টান এবং ইহাকে গ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি করিয়া, গঙ সংযুক্ত কর।

এক্ষণে, খকঙগ বৃত্তখণ্ড অর্দ্ধ বৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে,

প্রথম প্রকরণ দ্বারা খকগ কোণ, খঙগ কোণের সমান;

এই কারণে গকঙঘ বৃত্তখণ্ড অর্দ্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে,

কঘ কোণ গঙঘ কোণের সমান;

সুতরাং সমস্ত খকঘ কোণ, সমস্ত খঙঘ কোণের সমান হইবে। [স্বতঃ ২।

অতএব একই বৃত্তখণ্ডস্থ ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

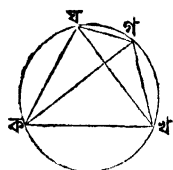
অঃ প্রঃ—২৩। কোন বৃত্তের অন্তর্গত সমবাহু ত্রিভুজের শৃঙ্গ হইতে পরিধিস্থ কোন বিন্দু পর্য্যন্ত একটী রেখা টানিলে, যদি তাহা ভূমিকে ছেদ করে, তবে রেখাটী ভূমির দুই প্রান্ত হইতে পরিধিস্থ বিন্দু পর্য্যন্ত অঙ্কিত দুই রেখার সমষ্টির সমান হইবে; আর ভূমিকে ছেদ না করিলে, তাহাদের অন্তরের সমান হইবে।

২২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

বৃত্তের অন্তর্গত চতুর্ভুজের সম্মুখীন কোণ দ্বয় একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হইবে।

কখগঘ চতুর্ভুজ যেন **কখগঘ** বৃত্তের অন্তর্গত হই-য়াছে; ইহার সম্মুখীন কোন দুই কোণের সমষ্টি দুই সম কোণের সমান হইবে।

কগ ও **খঘ** সংযুক্ত কর।

পরে, প্রত্যেক ত্রিভুজের তিন কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হয় বলিয়া, [১ম, ৩২।

গকখ ত্রিভুজের তিন কোণ, অর্থাৎ

গকখ, কখগ ও **কগখ** একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান।

ইহাদের মধ্যে, **গকখ** কোণ, **গঘখ** কোণের সমান; কেননা তাহারা একই **গঘকখ** বৃত্তখণ্ডস্থ হইয়াছে; [৩য়, ২১।

এবং **কগখ** কোণ, **কঘখ** কোণের সমান; কেননা, ইহারা একই **কঘগখ** বৃত্তখণ্ডস্থ হইয়াছে;

অতএব **গকখ** ও **কগখ** কোণ দ্বয়, একত্র যোগে, সমস্ত **কঘগ** কোণের সমান। [স্বতঃ ২।

এই দুই সমান বস্তুতে **কখগ** কোণ যোগ করিলে,

গকখ,কখগ ও **কগখ** এই তিন কোণ একত্র যোগে, **কখগ** ও **কঘগ** কোণের সমান।

ইহাদের মধ্যে **গকখ, কখগ** ও **কগখ** এই তিন কোণ একত্র যোগে, দুই সম কোণের সমান; [১ম, ৩২।

সুতরাং **কখগ** ও **কঘগ** এই দুই কোণও একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান।

এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে যে, **খকঘ** ও **খগঘ** কোণ দ্বয় একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান।

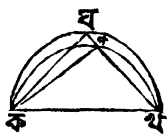
অতএব বৃত্তের অন্তর্গত ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—২৫। যদি কোন চতুর্ভুজের সম্মুখীন কোণ দ্বয় একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হয়, তবে প্রতিপন্ন কর যে, সই চতুর্ভুজের উপর একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিতে পারা যায়। এই রূপ অঙ্কিত বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্দ্ধ স্থির কর।

২৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

একই সরল রেখার উপর এক দিকে দুই সদৃশ বৃত্তখণ্ড সর্ব্বতোভাবে মিলিত না হইয়া থাকিতে পারে না।

যদি সম্ভব হয়, তবে কগখ ও কঘখ দুই সদৃশ বৃত্তখণ্ড সর্ব্বতোভাবে মিলিত না হইয়া, যেন কখ সরল রেখার উপর এক দিকে অবস্থিত হইল।

এক্ষণে, কগখ বৃত্ত কঘখ বৃত্তকে ক ও খ এই দুই বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে বলিয়া, ইহারা অন্য কোন বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিতে পারে না; [৩য়, ১০।

সুতরাং একটী বৃত্তখণ্ড অবশ্যই অন্যটীর অন্তরস্থ হইবে; কগখ যেন কঘখএর অন্তরস্থ হইল; খগঘ সরল রেখা টান এবং কগ ও কঘ সংযুক্ত কর।

পরে, কগখ ও কঘখ দুইটী সদৃশ বৃত্তখণ্ড কল্পিত হওয়াতে এবং সদৃশ বৃত্তখণ্ডস্থ কোণ গুলি পরস্পর সমান হয় বলিয়া, [৩য়, সংজ্ঞা ১১।

কগখ কোণ কঘখ কোণের সমান;

অর্থাৎ কগঘ ত্রিভুজের বহিস্থ কোণ অন্তরস্থ দূরবর্ত্তী কোণের সমান;

কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব। [১ম, ১৬।

সুতরাং দুই সদৃশ বৃত্তখণ্ড সর্ব্বতোভাবে মিলিত না হইয়া একই সরল রেখার উপর এক দিকে থাকিতে পারে না।

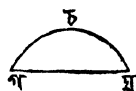
অতএব এক সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—২৫। সমান ভূমি বিশিষ্ট দুইটী সদৃশ বৃত্তখণ্ড একই সরল রেখার দুই দিকে স্থাপিত হইয়াছে; একটী রম্বসকে পরিধি দ্বয় দ্বারা পরিবদ্ধ ক্ষেত্রের অন্তর্গত করিতে হইবে।

২৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সমান সমান সরল রেখার উপর স্থাপিত সদৃশ বৃত্তখণ্ড গুলি পরস্পর সমান।

কঙখ ও গচঘ যেন দুই সদৃশ বৃত্তখণ্ড সমান সমান কখ ও গঘ রেখা দ্বয়ের উপর স্থাপিত হইয়াছে; কঙখ বৃত্তখণ্ড গচঘ বৃত্তখণ্ডের সমান হইবে।

যদি কঙখ বৃত্তখণ্ড গচঘ বৃত্তখণ্ডের উপর এরূপে স্থাপন করা যায় যে, ক বিন্দু গ বিন্দুর উপর এবং কখ সরল রেখা গঘএর উপর পড়ে, তবে খ বিন্দু ঘ বিন্দুর উপর পড়িবে; কেননা, কখ রেখা, গঘএর সমান। [কল্পনা।

অতএব, কখ রেখা গঘএর সহিত মিলিলে কঙখ বৃত্তখণ্ড

অবশ্যই গচঘ বৃত্তখণ্ডের সহিত মিলিয়া যাইবে; [৩য়, ২৩।
সুতরাং কঙখ, গচঘএর সমান হইবে।
অতএব সমান সমান সরল রেখার ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—২৬। যে সকল বৃত্তচ্ছেদকের ব্যাসার্দ্ধ ও কেন্দ্রস্থ কোণ সমান, তাহারা পরস্পর সমান।

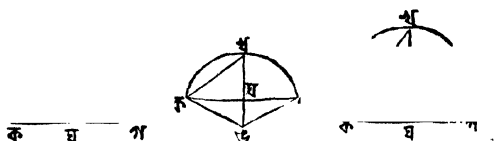
২৫ প্রতিজ্ঞা - সম্পাদ্য।

কোন বৃত্তখণ্ড নির্দ্দিষ্ট আছে; ইহা যে বৃত্তের খণ্ড, তাহা অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখগ যেন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তখণ্ড; ইহা যে বৃত্তের খণ্ড তাহা অঙ্কিত করিতে হইবে।

কগকে ঘ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর; [১ম, ১০।
ঘ বিন্দু হইতে কগএর সহিত সম কোণ করিয়া ঘখ রেখা টান; [১ম, ১১।
এবং কখ সংযুক্ত কর।

প্রথমত, কখঘ ও খকঘ কোণ দ্বয় যেন পরস্পর সমান;
তাহা হইলে ঘখ, ঘকএর সমান হইবে; [১ম, ৬।
ইহাদের মধ্যে ঘক, ঘগএর সমান; [অঙ্কন।
এই হেতু ঘগ, ঘখএর সমান। [স্বতঃ ১।
সুতরাং ঘক, ঘখ ও ঘগ এই তিন রেখা পরস্পর সমান;
অতএব ঘ বিন্দুই বৃত্তের কেন্দ্র হইবে। [৩য়, ৯।

ঘ কেন্দ্র হইতে ঘক, ঘখ ও ঘগ এই তিন রেখার

কোন একটীর প্রান্ত দিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, তাহা অন্য দুইটীর প্রান্ত দিয়া যাইবে; তাহা হইলে, কখগ যে বৃত্তের খণ্ড, সেই বৃত্তটী অঙ্কিত হইবে।

আবার ঘ কেন্দ্র কগ রেখাতে অবস্থিত হইয়াছে বলিয়া কখগ অৰ্দ্ধবৃত্ত।

অনন্তর, কখঘ ও খকঘ যেন পরস্পর অসমান;
তাহা হইলে কখ রেখার ক বিন্দুতে কখঘ কোণের সমান খকঙ কোণ কর; [১ম, ২৩।
প্রয়োজন হইলে, খঘকে ঙ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি করিয়া, কঙর সহিত মিলাইয়া দাও এবং ঙগ সংযুক্ত কর।

পরে, খকঙ কোণ কখঙ কোণের সমান বলিয়া, [অঙ্কন।
ঙক, ঙখএর সমান। [১ম, ৬।
আবার কঘ, গঘএর সমান হওয়াতে,
এবং কঘঙ ও গঘঙ ত্রিভুজ দ্বয়ের ঘঙ সাধারণ বাহু বলিয়া,
কঘ ও ঘঙ দুই বাহু, ক্রমে গঘ ও ঘঙ দুই বাহুর সমান;
আর কঘঙ কোণ, গঘঙ কোণের সমান; কেননা, প্রত্যেকেই সম কোণ; [অঙ্কন।
এই হেতু ঙক ভূমি, ঙগ ভূমির সমান। [১ম, ৪।
ইহাদের মধ্যে ঙক, ঙখএর সমান সপ্রমাণ হইয়াছে;

এই হেতু ঙগ, ঙখএর সমান। [স্বতঃ ১।

সুতরাং ঙক, ঙখ ও ঙগ এই তিন সরল রেখা পরস্পর সমান;

অতএব ঙ বিন্দুই বৃত্তের কেন্দ্র হইবে। [৩য়, ৯।

ঙকে কেন্দ্র করিয়া ঙক, ঙখ ও ঙগ এই তিন রেখার কোন একটীর প্রান্ত দিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, তাহা অন্য দুইটীরও প্রান্ত দিয়া যাইবে; তাহা হইলে কখগ যে বৃত্তের খণ্ড, সেই বৃত্তটী অঙ্কিত হইবে।

আর স্পষ্টই বোধ হইতেছে যে, কখঘ কোণ, খকঘ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, ঙ কেন্দ্র কখগ বৃত্তখণ্ডের বাহিরে থাকিবে; অতএব নির্দ্দিষ্ট বৃত্তখণ্ড অর্দ্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে;

কিন্তু কখঘ কোণ খকঘ কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে, ঙ কেন্দ্র কখগ বৃত্তখণ্ডের ভিতরে থাকিবে;

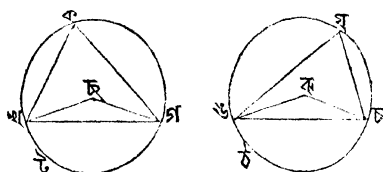
এই হেতু নির্দ্দিষ্ট বৃত্তখণ্ড অর্দ্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

অতএব নির্দ্দিষ্ট বৃত্তখণ্ড যে বৃত্তের খণ্ড, তাহা অঙ্কিত হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—২৭। কোন বৃত্তখণ্ডের ভূমির সমান আর একটী জ্যা ঐ বৃত্তখণ্ডে বা উহা যে বৃত্তের খণ্ড, তাহাতে অঙ্কিত করিতে হইবে।

২৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সমান সমান বৃত্তের কেন্দ্রস্থ বা পরিধিস্থ সমান সমান কোণ, সমান সমান পরিধিখণ্ডের উপর থাকে।

কখগ ও ঘঙচ যেন সমান সমান বৃত্ত; খছগ ও ঙজচ কেন্দ্রস্থ সমান সমান কোণ আর খকগ ও ঙঘচ পরিধিস্থ সমান সমান কোণ; খটগ পরিধিখণ্ড ঙঠচ পরিধিখণ্ডের সমান হইবে।

খগ ও ঙচ সংযুক্ত কর।

পরে, কখগ ও ঘঙচ বৃত্ত দ্বয় সমান বলিয়া, [কল্পনা। ইহাদের কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত সরল রেখা গুলি পরস্পর সমান। [৩য়, সংজ্ঞা ১।

এই হেতু খছ ও ছগ দুই বাহু, ক্রমে ঙজ ও জচ বাহুর সমান;

এবং ছ কোণ, জ কোণের সমান; [কল্পনা।

অতএব খগ ভূমি, ঙচ ভূমির সমান। [১ম, ৪।

আবার ক কোণ ঘ কোণের সমান বলিয়া, [কল্পনা। খকগ বৃত্তখণ্ড, ঙঘচ বৃত্তখণ্ডের সদৃশ; [৩য়, সংজ্ঞা ১১। আর ইহারা সমান সমান খগ ও ঙচ রেখার উপর স্থাপিত হইয়াছে;

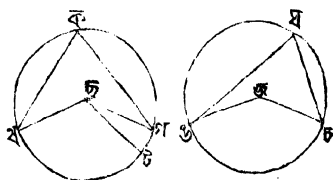
এবং সমান সমান সরল রেখার উপর স্থাপিত সদৃশ বৃত্তখণ্ড গুলি পরস্পর সমান হইয়া থাকে, [৩য়, ২৪।

এই হেতু খকগ বৃত্তখণ্ড, ঙঘচ বৃত্তখণ্ডের সমান;
আর সমস্ত কখগ বৃত্ত, সমস্ত ঘঙচ বৃত্তের সমান; [কং।
অতএব অবশিষ্ট খটগ বৃত্তখণ্ড, অবশিষ্ট ঙঠচ বৃত্তখণ্ডের সমান; [স্বতঃ ৩।
সুতরাং খটগ পরিধিখণ্ড, ঙঠচ পরিধিখণ্ডের সমান।
অতএব সমান সমান ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—২৮। কোন বৃত্তের অন্তর্গত কখগঘ চতুর্ভুজের যদি খ কোণ ঘ কোণের সমান হয়, তবে কগ কর্ণ বৃত্তের ব্যাস হইবে।

১৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সমান সমান বৃত্তের কেন্দ্রস্থ বা পরিধিস্থ কোণ সমান সমান পরিধিখণ্ডের উপর থাকিলে, পরস্পর সমান হইবে।

কখগ ও ঘঙচ যেন সমান সমান বৃত্ত; খছগ ও ঙজচ ইহাদের কেন্দ্রস্থ কোণ এবং খকগ ও ঙঘচ পরিধিস্থ কোণ যেন সমান সমান খগ ও ঙচ পরিধিখণ্ডের উপর অবস্থিত হইয়াছে; খছগ কোণ ঙজচ কোণের এবং খকগ কোণ ঙঘচ কোণের সমান হইবে।

যদি খছগ কোণ ঙজচ কোণের সমান হয়, তবে

সহজেই বোধ হইবে যে, খকগ কোণও ঙঘচ কোণের সমান। [৩য়, ২০; স্বতঃ ৭।

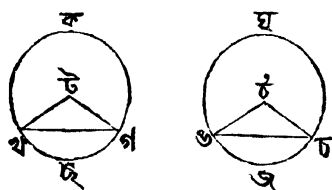
যদি সমান না হয়, তবে একটী অন্যের অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। খছগ যেন বৃহত্তর হইল; খছ রেখার ছ বিন্দুতে ঙজচ কোণের সমান খছট কোণ কর। [১ম, ২৩।

পরে খছট কোণ, ঙজচ কোণের সমান হওয়াতে,
এবং সমান সমান বৃত্তে সমান সমান কেন্দ্রস্থ কোণ, সমান সমান পরিধিখণ্ডের উপর থাকে বলিয়া, [৩য়, ২৬।
খট পরিধিখণ্ড, ঙচ পরিধি খণ্ডের সমান;
আর ঙচ পরিধিখণ্ড, খগ পরিধিখণ্ডের সমান; [কং।
অতএব খট পরিধিখণ্ড, খগ পরিধিখণ্ডের সমান;
[স্বতঃ ১।
অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর বৃহত্তরের সমান; কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব;
সুতরাং খছগ কোণ, ঙজচ কোণের অসমান নহে,
অর্থাৎ ইহারা সমান।
আবার ক কোণ, খছগ কোণের অর্দ্ধ এবং ঘ কোণ ঙজচ কোণের অর্দ্ধ; [৩য়, ২০।
সুতরাং ক কোণ, ঘ কোণের সমান। [স্বতঃ ৭।
অতএব সমান সমান বৃত্তের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—২৯। যে দুই জ্যার মধ্যস্থিত দুইটী চাপ পরস্পর সমান, তাহারা সমান্তর এবং সমান্তর দুই জ্যার মধ্যস্থিত দুই চাপ পরস্পর সমান।

২৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সমান সমান বৃত্তের অভ্যন্তরীণ সমান সমান সরল রেখা সমান সমান পরিধিখণ্ড ছেদ করে, তাহাতে বৃহত্তর পরিধিখণ্ড বৃহত্তরের ও ক্ষুদ্রতর ক্ষুদ্রতরের সমান হয়।

কখগ ও ঘঙচ যেন সমান সমান বৃত্ত এবং খগ ও ঙচ ঐ দুই বৃত্তস্থ দুই সমান সরল রেখা, যেন খকগ ও ঙঘচ দুই বৃহত্তর পরিধিখণ্ডকে আর খছগ ও ঙজচ দুই ক্ষুদ্রতর পরিধিখণ্ডকে ছেদ করিয়াছে; খকগ বৃহত্তর পরিধিখণ্ড, ঙঘচ বৃহত্তর পরিধিখণ্ডের এবং খছগ ক্ষুদ্রতর পরিধি-খণ্ড, ঙজচ ক্ষুদ্রতর পরিধি খণ্ডের সমান হইবে।

বৃত্ত দুইটীর ট ও ঠ কেন্দ্র নির্ণয় করিয়া, [৩য়, ১।
খট, টগ, ঙঠ ও ঠচ সংযুক্ত কর।

পরে, বৃত্ত দুইটী সমান হওয়াতে, [কল্পনা।
ইহাদের কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্য্যন্ত অঙ্কিত সরল রেখা গুলি পরস্পর সমান; [৩য়, সংজ্ঞা ১।
অতএব খট ও টগ দুই বাহু ক্রমে ঙঠ ও ঠচ দুই বাহুর সমান;

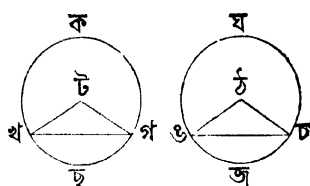
এবং খগ ভূমি ঙচ ভূমির সমান ; [কল্পনা ।
অতএব খটগ কোণ ঙঠচ কোণের সমান ; [১ম, ৮ ।
আর সমান সমান বৃত্তের সমান সমান কেন্দ্রস্থ কোণ, সমান সমান পরিধিখণ্ডের উপর থাকে বলিয়া, [৩য়, ২৬ ।
খছগ পরিধিখণ্ড, ঙজচ পরিধিখণ্ডের সমান।

আবার সমস্ত কখগ পরিধি, সমস্ত ঘঙচ পরিধির সমান হওয়াতে, [কল্পনা ।
অবশিষ্ট খকগ পরিধিখণ্ড অবশিষ্ট ঙঘচ পরিধিখণ্ডের সমান। [স্বতঃ ৩ ।
অতএব সমান সমান বৃত্তের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৩০। কোন বৃত্তস্থ কখ ও ঘগ দুই সমান জ্যাকে বর্দ্ধিত করিলে যদি তাহারা বহিস্থ ঙ বিন্দুতে সংলগ্ন হয়, তবে ঙখগ ও ঙকঘ এই দুইটী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইবে।

২৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সমান সমান বৃত্তের সমান সমান পরিধিখণ্ডের সম্মুখীন সরল রেখাগুলি পরস্পর সমান হইবে।

কখগ ও ঘঙচ যেন সমান সমান বৃত্ত এবং খছগ ও ঙজচ সমান সমান পরিধিখণ্ড ; খগ ও ঙচ সংযুক্ত কর ; খগ সরল রেখা ঙচ সরল রেখার সমান হইবে।

এই দুই বৃত্তের ট ও ঠ কেন্দ্র নির্ণয় করিয়া [৩য়, ১।
খট, টগ, ঙঠ ও ঠচ সংযুক্ত কর।

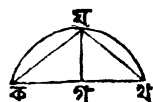
পরে, খছগ পরিধিখণ্ড, ঙজচ পরিধিখণ্ডের সমান বলিয়া, [কল্পনা।
খটগ কোণ, ঙঠচ কোণের সমান। [৩য়, ২৭।
আবার কখগ বৃত্ত, ঘঙচ বৃত্তের সমান বলিয়া, [কল্পনা।
ইহাদের কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্য্যন্ত অঙ্কিত সরল রেখা গুলি সমান; [৩য়, সংজ্ঞা ১।
অর্থাৎ খট ও টগ বাহু দ্বয় ক্রমে ঙঠ ও ঠচ বাহু দ্বয়ের সমান;
এবং ইহাদের অন্তর্গত কোণ দ্বয়ও সমান;
সুতরাং খগ ভূমি ঙচ ভূমির সমান। [১ম, ৪।
অতএব সমান সমান বৃত্তের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৩১। কখগ ও কখঘ দুই সমান বৃত্ত পরস্পরকে ক ও খ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে; খ কেন্দ্র বিশিষ্ট আর একটী বৃত্ত যদি উহাদিগকে গ ও ঘ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে ক, ঘ ও গ বিন্দু ত্রয় একই সরল রেখাতে থাকিবে।

৩০ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দ্দিষ্ট পরিধিখণ্ডকে দ্বিখণ্ড, অর্থাৎ দুই সমান অংশে বিভক্ত, করিতে হইবে।

কঘখ যেন নির্দ্দিষ্ট পরিধিখণ্ড; ইহাকে দ্বিখণ্ড করিতে হইবে।

কখ সংযুক্ত করিয়া, **গ** বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর; [১ম, ১০।
গ বিন্দু হইতে **কখ**এর সহিত সম কোণ করিয়া **গঘ** সরল রেখা টান; [১ম, ১১।
কঘখ পরিধিখণ্ড **ঘ** বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইবে।

কঘ ও **ঘখ** সংযুক্ত কর।
পরে, **কগ** রেখা **গখ**এর সমান বলিয়া, [অঙ্কন।
এবং **কগঘ** ও **খগঘ** ত্রিভুজ দ্বয়ের **গঘ** সাধারণ বাহু হওয়াতে,
কগ ও **গঘ** দুই বাহু ক্রমে **খগ** ও **গঘ** দুই বাহুর সমান;
এবং **কগঘ** কোণ, **খগঘ** কোণের সমান; কেননা, প্রত্যেকেই সম কোণ; [অঙ্কন।
এই হেতু **কঘ** ভূমি, **খঘ** ভূমির সমান; [১ম, ৪।
আবার সমান সমান সরল রেখা সমান সমান পরিধিখণ্ড ছেদ করে, তাহাতে বৃহত্তর পরিধিখণ্ড, বৃহত্তরের ও ক্ষুদ্রতর ক্ষুদ্রতরের সমান হয়; [৩য়, ২৮।
এবং **কঘ** ও **ঘখ** এই দুই পরিধিখণ্ডের প্রত্যেকে অর্দ্ধবৃত্ত

অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর; কেননা, ঘগকে বর্দ্ধিত করিলে ইহা বৃত্তের একটী ব্যাস হইবে; [৩য়, ১অনু।

সুতরাং কঘ পরিধিখণ্ড, ঘখ পরিধিখণ্ডের সমান।

অতএব নির্দ্দিষ্ট পরিধিখণ্ড ঘ বিন্দুতে দুই সমান অংশে বিভক্ত হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—৩২। একই ভূমির এক দিকে সমান সমান শীর্ষ কোণ বিশিষ্ট কতিপয় ত্রিভুজ অঙ্কিত করিলে, শৃঙ্গস্থ কোণ গুলির দ্বিখণ্ড কারক যাবতীয় রেখা, একই নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে।

৩১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

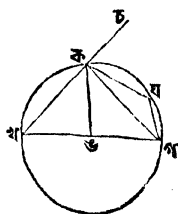
বৃত্তের অন্তর্গত কোণ গুলির মধ্যে অর্দ্ধবৃত্তস্থ কোণ সম কোণ। অর্দ্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর খণ্ডস্থ কোণ, সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং অর্দ্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর খণ্ডস্থ কোণ, সম কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

কখগঘ বৃত্তের খগ যেন একটী ব্যাস এবং ঙ বিন্দু কেন্দ্র; গক সরল রেখা টানিয়া বৃত্তকে কখগ ও কঘগ খণ্ডে বিভক্ত কর এবং খক, কঘ ও ঘগ সংযুক্ত করিয়া দাও; খকগ অর্দ্ধবৃত্তস্থ কোণ সম কোণ; অর্দ্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর কখগ খণ্ডস্থ কোণ সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং অর্দ্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কঘগ খণ্ডস্থ কোণ সম কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

কঙ সংযুক্ত কর এবং খককে চ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর ।

পরে, ঙক রেখা ঙখএর সমান বলিয়া, [১ম, সংজ্ঞা ১৫ ।
ঙকখ কোণ ঙখক কোণের সমান হইবে ; [১ম, ৫ ।
এবং ঙক, ঙগএর সমান বলিয়া,
ঙকগ কোণ ঙগক কোণের সমান ;
অতএব সমস্ত খকগ কোণ কখগ ও কগখ এই দুই কোণের সমষ্টির সমান ; [স্বতঃ ২ ।
আর কখগ ত্রিভুজের বহিস্থ চকগ কোণ কখগ ও কগখ এই দুই কোণের সমষ্টির সমান ; [১ম, ৩২ ।
এই হেতু খকগ কোণ চকগ কোণের সমান, [স্বতঃ ১ ।
অতএব ইহাদের প্রত্যেকেই সম কোণ ; [১ম, সংজ্ঞা ১০ ।
সুতরাং খকগ অর্দ্ধবৃত্তস্থ কোণ সম কোণ ।

আবার কখগ ত্রিভুজের কখগ ও খকগ এই দুই কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বলিয়া, [১ম, ১৭ ।
এবং ইহাদের মধ্যে খকগ কোণ যে এক সম কোণ, তাহা সপ্রমাণ হওয়াতে, কখগ কোণ সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ।
সুতরাং অর্দ্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর কখগ খণ্ডস্থ কোণ সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ।

অনন্তর, কখগঘ চতুর্ভুজ একটী বৃত্তের অন্তর্গত হওয়াতে, ইহার কোন দুইটী সম্মুখীন কোণ একত্র যোগে দুই সম

কোণের সমান; [৩য়, ২২।

অতএব কখগ ও কঘগ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান;

ইহাদের মধ্যে কখগ কোণ সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর প্রমাণ হইয়াছে;

এই হেতু কঘগ কোণ সম কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর;

সুতরাং অর্দ্ধ বৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর খণ্ডস্থ কোণ, সম কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

অতএব বৃত্তের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অনুমান। এই প্রতিজ্ঞার উপপত্তি হইতে সহজেই বোধ হইবে যে, কোন ত্রিভুজের একটী কোণ অন্য দুই কোণের সমান হইলে, সেইটী সম কোণ হইবে; কেননা, তাহার সন্নিহিত কোণও ঐ দুই কোণের সমান; [১ম, ৩২।

এবং সন্নিহিত কোণ দ্বয় সমান হইলে, প্রত্যেকে সম কোণ হইয়া থাকে। [১ম, সংজ্ঞা ১০।

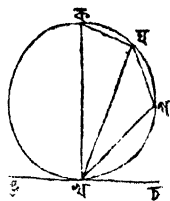
অঃ প্রঃ—৩১। কোন বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধকে ব্যাস স্বরূপ লইয়া আর একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, প্রথম বৃত্তের যে সকল জ্যা দুই বৃত্তের সংযোগ বিন্দু দিয়া যাইবে, তাহারা দ্বিতীয় বৃত্তের পরিধি দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে।

৩২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যদি এক সরল রেখা কোন বৃত্তকে স্পর্শ করে এবং সংযোগ বিন্দু হইতে আর একটী সরল রেখা টানলে, যদি তাহা বৃত্তকে ছেদ করে, তবে সেই রেখা, যে রেখা বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে, তাহার সহিত যে যে কোণ

উৎপন্ন করিবে, তাহারা একান্তর বৃত্তখণ্ডস্থ কোণগুলির সমান হইবে।

ঙচ সরল রেখা যেন কখগঘ বৃত্তকে খ বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে এবং খ বিন্দু হইতে খঘ সরল রেখা এরূপে টানা হইয়াছে যে তাহা বৃত্তকে ছেদ করিতেছে; ঙচ স্পর্শক রেখার সহিত খঘ রেখা যে যে কোণ উৎপন্ন করিবে, তাহারা একান্তর বৃত্তখণ্ডস্থ কোণগুলির সমান হইবে; অর্থাৎ ঘখচ কোণ, খকঘ বৃত্তখণ্ডস্থ কোণের এবং ঘখঙ কোণ, খগঘ বৃত্তখণ্ডস্থ কোণের সমান হইবে।

খ বিন্দু হইতে ঙচএর সহিত সম কোণ করিয়া খক রেখা টান, [১ম, ১১। এবং খঘ পরিধিখণ্ডে গ বিন্দু কল্পনা করিয়া, কঘ, ঘগ ও গখ সংযুক্ত কর।

পরে, ঙচ সরল রেখা কখগঘ বৃত্তকে খ বিন্দুতে স্পর্শ করাতে, [কল্পনা।
এবং খ বিন্দু হইতে, স্পর্শক রেখার সহিত সম কোণ করিয়া, খক রেখা টানা হইয়াছে বলিয়া, [অঙ্কন।
বৃত্তের কেন্দ্র খক রেখাতে থাকিবে। [৩য়, ১৯।
সুতরাং অর্দ্ধবৃত্তস্থ কঘখ কোণ, সম কোণ; [৩য়, ৩১।
এই হেতু খকঘ ও কখঘ অন্য দুইটী কোণ একত্র যোগে, এক সম কোণের সমান; [১ম, ৩২।
আর কখচ কোণও সম কোণ; [অঙ্কন।

অতএব কখচ কোণ, খকঘ ও কখঘ কোণ দ্বয়ের সমষ্টির সমান।

এই দুই সমান বস্তু হইতে সাধারণ কখঘ কোণ বিয়োগ করিলে, অবশিষ্ট ঘখচ কোণ, অবশিষ্ট খকঘ কোণের সমান। [স্বতঃ ৩।

এখানে খকঘ কোণই একান্তর বৃত্তখণ্ডস্থ কোণ।

আবার, কখগঘ চতুর্ভুজ একটী বৃত্তের অন্তর্গত হওয়াতে, খকঘ ও খগঘ সম্মুখীন কোণ দ্বয় একত্র যোগে, দুই সম কোণের সমান; [৩য়, ২২।

আর ঘখচ ও ঘখঙ এই দুই কোণও একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান; [১ম, ১৩।

অতএব ঘখচ ও ঘখঙ কোণ দ্বয় একত্র যোগে, খকঘ ও খগঘ কোণ দ্বয়ের সমান;

ইহাদের মধ্যে ঘখচ কোণ খকঘ কোণের সমান প্রমাণ হইয়াছে;

সুতরাং অবশিষ্ট ঘখঙ কোণ, অবশিষ্ট খগঘ কোণের সমান। [স্বতঃ ৩।

এখানে খগঘ কোণই একান্তর বৃত্তখণ্ডস্থ কোণ।

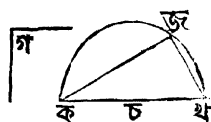
অতএব যদি এক সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৩৪। কখ ও কগ কোন বৃত্তের দুই সমান চাপ; প্রমাণ কর যে, ক বিন্দু দিয়া বৃত্তের স্পর্শিনী টানিলে, তাহা খগ জ্যার সমান্তর হইবে।

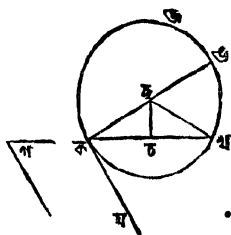
৩৩ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণের সমান কোণ বিশিষ্ট এক বৃত্তখণ্ড অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখ যেন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা ও **গ** নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণ; **কখ** সরল রেখার উপর **গ** কোণের সমান কোণ বিশিষ্ট এক বৃত্তখণ্ড অঙ্কিত করিতে হইবে।

প্রথমত, **গ** কোণ সম কোণ হইলে, **কখ**কে **চ** বিন্দুতে দ্বিখণ্ড করিয়া, [১ম, ১০।

চ কেন্দ্র হইতে **চখ**এর প্রান্ত দিয়া **কজখ** অর্দ্ধ বৃত্ত অঙ্কিত কর;

তাহা হইলে অর্দ্ধ বৃত্তস্থ **কজখ** কোণ সম কোণের সমান হইবে। [৩য়, ৩১।

কিন্তু যদি **গ** কোণ সম কোণ না হয়, তবে **কখ** সরল রেখার **ক** বিন্দুতে, **গ** কোণের সমান **খকঘ** কোণ কর; [১ম, ২৩।

ক বিন্দু হইতে **কঘ**এর সহিত সম কোণ করিয়া, **কঙ** সরল রেখা টান; [১ম, ১১।

কখকে **চ** বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর; [১ম, ১০।

চ বিন্দু হইতে **কখ**এর সহিত সম কোণ করিয়া **চছ**

সরল রেখা টান; [১ম, ১১।

এবং ছখ সংযুক্ত কর।

পরে, কচ, চখএর সমান বলিয়া, [অঙ্কন।

এবং কচছ ও খচছ দুই ত্রিভুজের, চছ সাধারণ বাহু হওয়াতে, কচ ও চছ দুই বাহু ক্রমে, খচ ও চছ দুই বাহুর সমান;

আর কচছ কোণ খচছ কোণের সমান; [১ম, সং ১০।

এই হেতু ছক ভূমি, ছখ ভূমির সমান; [১ম, ৪।

সুতরাং ছ কেন্দ্র হইতে ছকএর প্রান্ত দিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, তাহা খ বিন্দু দিয়া যাইবে।

কজখ যেন এই বৃত্ত হইল; কজখ বৃত্তখণ্ডের অন্তর্গত কোণ, গ কোণের সমান হইবে।

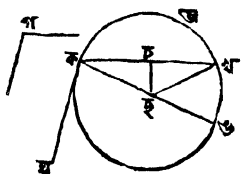
কঙ ব্যাসের সহিত সম কোণ করিয়া, ক প্রান্ত হইতে কঘ সরল রেখা টানা হইয়াছে বলিয়া, [অঙ্কন।

কঘ, এই বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে; [৩য়, ১৬ অনু।

আর সংযোগ বিন্দু ক হইতে কখ রেখা টানা হইয়াছে বলিয়া, ঘকখ কোণ, একান্তর কজখ বৃত্তখণ্ডের অন্তর্গত কোণের সমান; [৩য়, ৩২।

ইহাদের মধ্যে ঘকখ কোণ, গ কোণের সমান। [অঙ্কন।

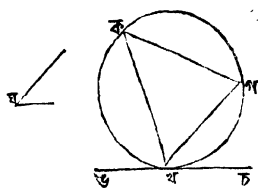
সুতরাং কজখ বৃত্তখণ্ডের অন্তর্গত কোণ, গএর সমান।

[স্বতঃ ১।

অতএব কখ নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর, নির্দ্দিষ্ট গ কোণের সমান কোণ বিশিষ্ট কজখ বৃত্তখণ্ড অঙ্কিত হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—৩৫। কোন ত্রিভুজের ভূমি, শীর্ষ কোণ এবং শীর্ষ কোণ হইতে অঙ্কিত লম্ব ভূমিকে যে বিন্দুতে ছেদ করিবে, সেই বিন্দু নির্দ্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজটী অঙ্কিত কর।

৩৪ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত হইতে এক নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণের সমান কোণ বিশিষ্ট এক খণ্ড ছেদ করিতে হইবে।

কখগ যেন নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত এবং ঘ নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণ; কখগ বৃত্ত হইতে, নির্দ্দিষ্ট ঘ কোণের সমান কোণ বিশিষ্ট এক খণ্ড ছেদ করিতে হইবে।

কখগ বৃত্তকে খ বিন্দুতে স্পর্শ করে এরূপ ঙখচ সরল রেখা টান; [৩য়, ১৭। এবং খচ সরল রেখার খ বিন্দুতে ঘ কোণের সমান চখগ কোণ কর; [১ম, ২৩।

খকগ বৃত্তখণ্ডস্থ কোণ, ঘ কোণের সমান হইবে।

ঙচ সরল রেখা বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে এবং সংযোগ বিন্দু হইতে খগ সরল রেখা টানা হইয়াছে বলিয়া, [অং। চখগ কোণ, একান্তর খকগ বৃত্তখণ্ডের অন্তর্গত কোণের

সমান ; [৩য়, ৩২।

আর চখগ কোণ, ঘ কোণের সমান। [অঙ্কন।

সুতরাং খকগ বৃত্তখণ্ডের অন্তর্গত কোণ, ঘ কোণের সমান। [স্বতঃ ১।

অতএব কখগ বৃত্ত হইতে, ঘ কোণের সমান কোণ বিশিষ্ট খকগ বৃত্তখণ্ড ছেদিত হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—৩৬। কোন বৃত্তের বহিস্থ এক বিন্দু হইতে এক সরল রেখা টানিয়া বৃত্তের এরূপ এক অংশ ছেদ করিতে হইবে যেন, তাহার অন্তর্গত কোণ এক নির্দ্দিষ্ট কোণের সমান হয়।

৩৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

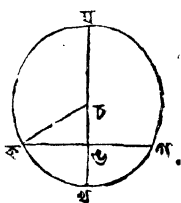
যদি কোন বৃত্তের অন্তরস্থ দুই সরল রেখা পরস্পরকে ছেদ করে, তবে একটীর দুই খণ্ডের অন্তর্গত আয়ত, অন্যটীর দই খণ্ডের অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে।

কগ ও খঘ দুই সরল রেখা যেন কখগঘ বৃত্তের অন্তরে থাকিয়া ঙ বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিয়াছে; কঙ ও ঙগএর অন্তর্গত আয়ত, খঙ ও ঙঘএর অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে।

. যদি কগ ও খঘ উভয়ই কেন্দ্র দিয়া যায়, অর্থাৎ ঙ বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র হয়, তবে ঙক, ঙখ, ঙগ ও ঙঘ পরস্পর সমান হওয়াতে, স্পষ্টই বোধ হইবে যে,

কঙ ও ঙগএর অন্তর্গত আয়ত, খঙ ও ঙঘএর অন্তর্গত আয়তের সমান।

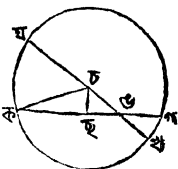
কিন্তু যদি দুই রেখার মধ্যে একটী, অর্থাৎ খঘ, কেন্দ্র দিয়া যায় এবং অন্যটী, অর্থাৎ কগ, কেন্দ্র দিয়া না যায় আর যদি খঘ, কগকে ঙ বিন্দুতে লম্ব ভাবে ছেদ করে, তবে খঘকে চ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড করিলে, চ বিন্দু কখগঘ বৃত্তের কেন্দ্র হইবে; কচ সংযুক্ত কর।

পরে, কেন্দ্রগত খঘ সরল রেখা কেন্দ্রের বহির্গত কগ রেখাকে লম্ব ভাবে ছেদ করিয়াছে বলিয়া, [কল্পনা।
কঙ, ঙগএর সমান। [৩য়, ৩।
আবার খঘ সরল রেখা চ বিন্দুতে দুই সমান এবং ঙ বিন্দুতে দুই অসমান ভাগে বিভক্ত হইয়াছে বলিয়া,
খঙ, ঙঘএর আয়ত ও ঙচএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, চখএর উপর সম চতুর্ভুজের সমান, [২য়, ৫।
অর্থাৎ কচএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান;
আর কচএর উপর সমচতুর্ভুজ, কঙ ও ঙচএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের সমান। [১ম, ৪৭।
এই হেতু খঙ, ঙঘএর আয়ত ও ঙচএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, কঙ ও ঙচএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান। [স্বতঃ ১।
এই দুই সমান বস্তু হইতে ঙচএর উপর সমচতুর্ভুজ বিয়োগ করিলে,

অবশিষ্ট খঙ, ঙঘএর আয়ত, কঙর উপর সমচতুর্ভুজের, অর্থাৎ কঙ, ঙগএর আয়তের সমান হইবে।

অনন্তর, যদি কেন্দ্রগত খঘ রেখা কেন্দ্রের বহির্গত কগ রেখাকে ছেদ করিয়া সম কোণ উৎপন্ন না করে, তবে খঘকে চ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড করিলে, চ বিন্দু কখগঘ বৃত্তের কেন্দ্র হইবে;

কচ সংযুক্ত কর এবং কগএর উপর চ হইতে চছ লম্ব টান। [১ম, ১২।

এক্ষণে, কছ, ছগএর সমান; [৩য়, ৩।

অতএব কঙ, ঙগএর আয়ত ও ঙছএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, কছএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান। [২য়, ৫।

প্রত্যেকে, ছচএর উপর সমচতুর্ভুজ যোগ করিলে,

কঙ, ঙগএর আয়ত এবং ঙছ ও ছচএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে, কছ ও ছচএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান;

ইহাদের মধ্যে, ঙছ ও ছচএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, ঙচএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান;

এবং কছ ও ছচএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কচএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান। [১ম, ৪৭।

অতএব কঙ, ঙগএর আয়ত ও ঙচএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, কচএর উপর অর্থাৎ খচএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান।

আবার, খচএর উপর সমচতুর্ভুজ, খঙ ও ঙঘএর আয়ত

এবং ঙচএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ; [২য়, ৫।
ঙচএর উপর সাধারণ সমচতুর্ভুজ, প্রত্যেক হইতে বিয়োগ করিলে,

অবশিষ্ট কঙ, ঙগএর আয়ত, অবশিষ্ট খঙ, ঙঘএর আয়তের সমান। [স্বতঃ ৩।

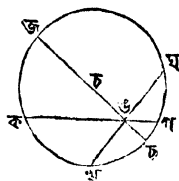
পরিশেষে, যদি কগ ও খঘ উভয় সরল রেখাই কেন্দ্রগত না হয়, তবে চ বিন্দুকে কেন্দ্র কল্পনা কর, [৩য়, ১।
এবং কগ ও খঘ সরল রেখা দ্বয়ের ছেদ বিন্দু দিয়া ছঙচজ ব্যাস টান। তাহা হইলে, পূর্ব্ব প্রকরণের ন্যায় সপ্রমাণ হইবে যে, ছঙ ও ঙজএর আয়ত, কঙ ও ঙগএর আয়তের সমান ;

আর ছঙ, ঙজএর আয়ত, খঙ ও ঙঘএর আয়তের সমান ;
সুতরাং কঙ ও ঙগএর আয়ত, খঙ ও ঙঘএর আয়তের সমান। [স্বতঃ ১।

অতএব যদি কোন বৃত্তের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৩৭। ঐককেন্দ্রিক দুইটী বৃত্তের মধ্যে বৃহত্তরটীর যদি কখ ও গঙ কোন দুই জ্যা টানা যায় ও ইহারা যদি ক্ষুদ্রতর বৃত্তকে ঙ ও চ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে কঙ ও ঙখএর আয়ত, গচ ও চঘএ আয়তের সমান হইবে।

৩৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

বৃত্তের বহিস্থ কোন বিন্দু হইতে যদি দুইটী সরল রেখা টানা যায় ও তম্মধ্যে একটী বৃত্তকে ছেদ

ও অন্যটী তাহাকে স্পর্শ করে, তবে ছেদক রেখার সমস্তের ও বৃত্তের বহিস্থিত অংশের অন্তর্গত আয়ত, যে রেখাটী বৃত্তকে স্পর্শ করিয়াছে, তাহার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

কখগ বৃত্তের বহিস্থ ঘ বিন্দু হইতে যেন ঘগক ও ঘখ, দুই সরল রেখা টানা হইয়াছে ও ইহাদের মধ্যে ঘগক রেখা বৃত্তকে ছেদ ও ঘখ রেখা বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে; কঘ, ঘগএর অন্তর্গত আয়ত, ঘখএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

প্রথমত, ঘগক রেখা যেন ঙ কেন্দ্র দিয়া যাইতেছে, ঙখ সংযুক্ত কর;
তাহা হইলে ঙখঘ কোণ সম কোণ হইবে। [৩য়, ১৮।
আবার, কগ রেখা ঙ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইয়া ঘ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত হইয়াছে বলিয়া, কঘ ও ঘগএর আয়ত এবং ঙগএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ঙঘএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান; [২য়, ৬।
আর ঙগ রেখা ঙখএর সমান হওয়াতে,
কঘ, ঘগএর আয়ত ও ঙখএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ঙঘএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান;

আবার, ঙঘএর উপর সমচতুর্ভুজ, ঙখ ও খঘএর

উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান। [১ম, ৪৭।
অতএব কঘ, ঘগএর আয়ত ও ঙখএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ঙখ ও খঘএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের সমান :
ঙখএর উপর সাধারণ সমচতুর্ভুজ বিয়োগ করিলে,
অবশিষ্ট কঘ, ঘগএর আয়ত, ঘখএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান। [স্বতঃ ৩।

অনন্তর, যদি ঘগক কেন্দ্র দিয়া না যায়, তবে ঙ বিন্দুকে কেন্দ্র কল্পনা কর, [৩য়, ১।
ঙ হইতে কগএর উপর ঙচ লম্ব টান ; [১ম, ১২।
এবং ঙখ, ঙগ ও ঙঘ সংযুক্ত কর।

পরে, কেন্দ্রগত ঙচ রেখা, কেন্দ্রের বহির্গত কগ রেখাকে লম্ব ভাবে ছেদ করিতেছে বলিয়া, ঙচ রেখা, কগকে দ্বিখণ্ড করিবে ;
আর কগ সরল রেখা চ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইয়া ঘ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত হওয়াতে, কঘ ও ঘগএর আয়ত এবং চগএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, চঘএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান। [২য়, ৬।

প্রত্যেকে চঙর উপর সমচতুর্ভুজ যোগ করিলে,
কঘ, ঘগএর আয়ত এবং চগ ও চঙর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে,
ঘচ ও চঙর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান। [স্বতঃ ২।

ইহাদের মধ্যে গচ ও চঙর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে, গঙর উপর সমচতুর্ভুজের সমান; কেননা, গচঙ, একটী সম কোণ; [১ম, ৪৭।

এবং ঘচ ও চঙর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে, ঘঙর উপর সমচতুর্ভুজের সমান।

অতএব কঘ, ঘগএর আয়ত ও গঙর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ঘঙর উপর সমচতুর্ভুজের সমান;

আর গঙ, খঙর সমান হওয়াতে,

কঘ, ঘগএর আয়ত ও খঙর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ঘঙর উপর সমচতুর্ভুজের সমান।

আবার ঘঙর উপর সমচতুর্ভুজ, ঘখ ও খঙর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমষ্টির সমান। [১ম, ৪৭।

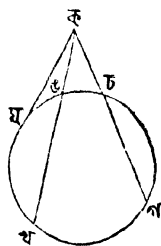
অতএব কঘ, ঘগএর আয়ত ও খঙর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ঘখ ও খঙর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমষ্টির সমান;

খঙর উপর সাধারণ সমচতুর্ভুজ বিয়োগ করিলে,

অবশিষ্ট কঘ, ঘগএর আয়ত, অবশিষ্ট ঘখএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান হইবে। [স্বতঃ ৩।

অতএব কোন বৃত্তের বহিস্থ ইত্যাদি।

এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অনুমান। কোন বৃত্তের বহিস্থ এক বিন্দু হইতে কখ ও কগ দুইটী সরল রেখা টানিলে, যদি উভয়েই বৃত্তকে ছেদ করে, তবে ইহাদের প্রত্যেকের

সমস্তের ও বৃত্তের বহিস্থ অংশের অন্তর্গত আয়ত দুইটী, পরস্পর সমান হইবে;

অর্থাৎ, খক ও কঙর আয়ত, গক ও কচএর আয়তের সমান হইবে;

কেননা, প্রত্যেক আয়ত বৃত্ত স্পর্শক কঘ রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান।

অঃ প্রঃ—৩৮। দুই বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ করিলে, যদি তাহাদের সাধারণ জ্যাকে বর্দ্ধিত করা যায়, তবে তাহা সাধারণ স্পার্শিনীকে দ্বিখণ্ড করিবে।

৩৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

বৃত্তের বহিস্থ কোন বিন্দু হইতে যদি দুইটী সরল রেখা টানা যায় ও তন্মধ্যে একটী বৃত্তকে ছেদ করে ও অন্যটী তাহার সহিত সংলগ্ন হয়, আর যদি ছেদক রেখার সমস্তের ও বহিস্থ অংশের অন্তর্গত আয়ত, সংলগ্ন রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হয়, তবে সংলগ্ন রেখা, বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

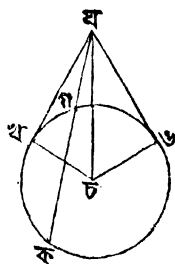
কখগ বৃত্তের বহিস্থ ঘ বিন্দু হইতে যেন ঘগক ও ঘখ দুই সরল রেখা টানা হইয়াছে; ইহাদের মধ্যে ঘগক বৃত্তকে ছেদ করিয়াছে ও ঘখ বৃত্তের সহিত সংলগ্ন হইয়াছে; আর কঘ, ঘগএর আয়ত যেন ঘখএর উপর

সমচতুর্ভুজের সমান; তাহা হইলে ঘখ রেখা, বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

কখগ বৃত্ত স্পর্শক ঘঙ সরল রেখা টান; [৩য়, ১৭।

চ কেন্দ্র নির্ণয় কর, [৩য়, ১।

এবং চখ, চঘ ও চঙ সংযুক্ত কর;

তাহা হইলে চঙঘ, সম কোণ হইবে; [৩য়, ১৮।

আর ঘঙ রেখা কখগ বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে ও ঘগক ইহাকে ছেদ করিতেছে বলিয়া,

কঘ ও ঘগএর অন্তর্গত আয়ত, ঘঙর উপর সমচতুর্ভুজের সমান। [৩য়, ৩৬।

আবার, কঘ ও ঘগএর আয়ত, ঘখএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান। [কল্পনা।

অতএব ঘঙর উপর সমচতুর্ভুজ, ঘখএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান; [স্বতঃ ১।

সুতরাং ঘঙ সরল রেখা, ঘখএর সমান;

এবং ঙচ, খচএর সমান; [১ম, সংজ্ঞা ১৫।

এই হেতু ঘঙ ও ঙচ দুই বাহু ক্রমে, ঘখ ও খচ দুই বাহুর সমান;

আর ঘঙচ ও ঘখচ দুই ত্রিভুজের ঘচ সাধারণ ভূমি;

অতএব ঘঙচ কোণ, ঘখচ কোণের সমান। [১ম, ৮।

ইহাদের মধ্যে ঘঙচ কোণ সম কোণ;

এই হেতু ঘখচ কোণও সম কোণ;

এবং খচকে বর্দ্ধিত করিলে, তাহা একটী ব্যাস হইবে; আর ব্যাসের প্রান্ত হইতে তাহার সহিত সম কোণ করিয়া যে সরল রেখা টানা যায়, তাহা বৃত্তকে স্পর্শ করে; [৩য়, ১৬, অনু।

সুতরাং ঘখ রেখা কখগ বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

অতএব কোন বৃত্তের বহিস্থ ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৩৯। এমন এক বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহা কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে স্পর্শ করে ও যাহার পরিধি দুই নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়।

৪০। যদি কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শৃঙ্গকে কেন্দ্র করিয়া একটী বৃত্ত অঙ্কিত করা যায় ও তাহা ভূমি বা বর্দ্ধিত ভূমিকে ছেদ করে, তবে ভূমির প্রান্ত দ্বয় হইতে পরিধি পর্য্যন্ত দুই অংশ পরস্পর সমান হইবে।

৪১। যদি দুই বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ করে, তবে সম্পাত বিন্দু দ্বয় দিয়া দুইটী সমান্তর সরল রেখা দুই বৃত্তপরিধি পর্য্যন্ত টানিলে, তাহারা পরস্পর সমান হইবে।

৪২। দুই বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ করিয়াছে; সম্পাত বিন্দু দিয়া দুই পরিধি পর্য্যন্ত এরূপে এক সরল রেখা টান, যেন তাহা ঐ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হয়।

৪৩। কোন বৃত্তের ত ক দ জ্যা, ব্যাসকে ক বিন্দুতে ছেদ করিয়া তাহার সহিত অর্দ্ধ সম কোণ করিতেছে; প্রতিপন্ন কর যে, কত ও কদএর উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ, ব্যাসার্দ্ধের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ হইবে।

৪৪। ছয় ও আট ইঞ্চ পরিমিত দুই সমান্তর জ্যা, পরস্পর এক ইঞ্চ অন্তরে অবস্থিত আছে; ইহারা যে বৃত্তের জ্যা, তাহার ব্যাসের পরিমাণ কত?

৪৫। দুই বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ করিলে, ছেদ বিন্দু দিয়া পরিধি দ্বয় পর্য্যন্ত যত গুলি সরল রেখা টানা যাইতে পারে, তন্মধ্যে যেটী দুই কেন্দ্রের সংযোজক রেখার সমান্তর, সেইটী বৃহত্তম হইবে।

৪৬। এমন তিনটী বৃত্ত অঙ্কিত কর, যাহারা পরস্পরকে স্পর্শ করে; আবার আর একটী বৃত্ত এরূপে অঙ্কিত কর, যেন তাহা ঐ তিন বৃত্তকে স্পর্শ করে।

৪৭। একটী বৃত্তের চতুর্দ্দিকে তাহার সমান ও প্রত্যেকে তাহাকে স্পর্শ করে, এরূপ কতগুলি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে পারা যায়?

৪৮। এমন এক বৃত্ত অঙ্কিত কর, যাহা কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায় এবং কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে এক নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে। কিন্তু ইহা জানা আছে যে উক্ত দুই বিন্দুই নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের কোন একটী স্পর্শিনীতে অবস্থিত নহে।

৪৯। এমন এক বৃত্ত অঙ্কিত কর, যাহা এক নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে এবং কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকেও স্পর্শ করে।

৫০। যদি দুই বৃত্তের মধ্যে একটীর ব্যাসার্দ্ধ, অন্যের ব্যাসার্দ্ধের অর্দ্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর হয় ও ক্ষুদ্রতর বৃত্তটী বৃহত্তরকে অন্তরে স্পর্শ করে, তবে বৃহত্তর বৃত্তের দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষুদ্রতর বৃত্তের যত গুলি স্পর্শিনী টানা যাইতে পারে, তন্মধ্যে যেটী দুই বৃত্তের সাধারণ স্পর্শিনীর সমান্তর, সেইটী বৃহত্তম হইবে।

৫১। প্রতিপন্ন কর যে, বহিস্থ এক বিন্দু হইতে কোন বৃত্তের দুইটী স্পর্শিনী টানিলে, তাহারা পরস্পর সমান হইবে; আবার ইহা দ্বারা উপপন্ন কর যে, বৃত্তের উপর অঙ্কিত যে কোন চতুর্ভুজের সম্মুখীন দুইটী দুইটী বাহুর সমষ্টি দ্বয়, পরস্পর সমান এবং সম্মুখীন দুই বাহুর উপর দণ্ডায়মান দুইটী কেন্দ্রস্থ কোণ একত্র যোগে, দুই সম কোণের সমান।

৫২। কোন স্পর্শিনী, ব্যাসের দুই প্রান্তে অঙ্কিত অন্য দুই স্পর্শিনী দ্বারা সীমাবদ্ধ হইলে, তাহার সম্মুখীন কেন্দ্রস্থ কোণ সম কোণ হইবে।

৫৩। এমন একটী বৃত্ত অঙ্কিত কর, যাহার কেন্দ্র, কোন নির্দ্দিষ্ট সম কোণী ত্রিভুজের একটী ভুজে অবস্থিত হইবে এবং যাহার পরিধি সম কোণ দিয়া যাইবে ও কর্ণকে স্পর্শ করিবে।

৫৪। কোন বৃত্তের কেন্দ্র ম; ব্যাসে বা বর্দ্ধিত ব্যাসে স্থিত ক একটী বিন্দু; মখ ব্যাসার্দ্ধ নির্দ্দিষ্ট ব্যাসের লম্ব; যদি কখ সরল রেখা, বৃত্তকে ত বিন্দুতে ছেদ করে ও ত বিন্দুস্থ স্পর্শিনী কমকে গ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রতিপন্ন কর যে, কগ = গত।

৫৫। দুই বৃত্ত পরস্পরকে বাহিরে স্পর্শ করিলে, যদি তাহাদের একটী সাধারণ স্পর্শিনী টানা যায়, তবে তাহাকে ব্যাস করিয়া একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, তাহা নির্দ্দিষ্ট দুই বৃত্তের সংযোগ বিন্দু দিয়া যাইবে ও ঐ দুই বৃত্তের কেন্দ্র সংযোজক রেখা, অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শিনী হইবে।

৫৬। নির্দ্দিষ্ট ব্যাস বিশিষ্ট বৃত্ত এরূপে অঙ্কিত কর, যেন তাহা এক নির্দ্দিষ্ট রেখাকে স্পর্শ করে ও তাহার কেন্দ্র, এক নির্দ্দিষ্ট রেখাতে থাকে।

৫৭। এমন এক বৃত্ত অঙ্কিত কর, যেন তাহা এক নির্দ্দিষ্ট রেখাকে কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে এবং এক নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকেও স্পর্শ করে।

৫৮। এমন এক রেখা অঙ্কিত কর, যাহা এক নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে ও কোন নির্দ্দিষ্ট রেখার সহিত এক নির্দ্দিষ্ট কোণ উৎপন্ন করে।

৫৯। নির্দ্দিষ্ট ব্যাসার্দ্ধ বিশিষ্ট এমন দুই বৃত্ত অঙ্কিত কর, যাহারা পরস্পরকে ও একই নির্দ্দিষ্ট রেখাকে এক দিকে স্পর্শ করে।

৬০। কখ ও কগ কোন বৃত্তের দুই জ্যা; ঘ ও ঙ, কখ ও কগ চাপের মধ্য বিন্দু; যদি ঘঙ রেখা, কখ ও কগকে চ ও ছ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে কচ রেখা কছএর সমান হইবে।

৬১। কখগঘ একটী সমান্তরিক; খঘ কর্ণের উপর গঙ লম্ব টানিয়া প্রমাণ কর যে, খ ও ঘ বিন্দু হইতে কখ ও কঘএর

সহিত সম কোণ করিয়া দুই সরল রেখা টানিলে তাহারা বর্দ্ধিত ঙগ রেখার এক বিন্দুতে সংলগ্ন হইবে।

৬২। কোন ত্রিভুজের কোণ গুলি হইতে সম্মুখীন বাহুর উপর লম্ব টানিলে যে বিন্দুতে তাহারা পরস্পরকে ছেদ করে, যদি তিন বাহুর উপর অঙ্কিত বৃত্ত গুলি সেই বিন্দু দিয়া যায় তবে এই বৃত্ত তিনটী পরস্পর সমান হইবে।

৬৩। কঘখ ও কগখ দুই বৃত্ত পরস্পরকে ক ও খ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং কঘখ বৃত্তের কেন্দ্র, কগখ বৃত্তের পরিধিস্থ হইয়াছে; যদি কঘখ বৃত্তের কগঘ জ্যা, অন্য বৃত্তকে গ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে গখ=গঘ।

৬৪। কোন বৃত্ত পরিধিস্থ তিনটী বিন্দু নির্দ্দিষ্ট আছে; কেন্দ্র নির্ণয় না করিয়া পরিধিস্থ অপর কোন বিন্দু নির্ণীত হইতে পারে কি না?

৬৫। যদি কোন চতুর্ভুজের চারি কোণ দ্বিখণ্ড করা যায়, তবে পরস্পর সন্নিকটস্থ দুইটী দুইটী কোণের দ্বিখণ্ড কারক রেখাদ্বয়ের সম্পাতে যে কএকটী বিন্দু উৎপন্ন হইবে, তাহারা একটী বৃত্ত পরিধিতে থাকিবে।

৬৬। ক, খ, গ, ঘ, ঙ ও চ কোন বৃত্ত পরিধিস্থ বিন্দু; যদি কখ ও কগ ক্রমে ঘঙ ও ঘচএর সমান্তর হয়, তবে খচ, ঙগএর সমান্তর হইবে।

৬৭। সমান সমান দুই বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ করিলে, যদি একটী ছেদ বিন্দু দিয়া দুই বৃত্তের পরিধি পর্য্যন্ত কোন এক সরল রেখা টানা যায় এবং উহাদের সাধারণ জ্যাকে ব্যাস করিয়া আর একটী বৃত্ত আঁকা যায়, তবে ঐ সরল রেখা, তৃতীয় বৃত্ত দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে।

৬৮। ক ও খ দুই নির্দ্দিষ্ট বিন্দু; যদি কগ ও খগ সরল রেখা এরূপে টানা যায় যে, তাহারা কোন নির্দ্দিষ্ট কোণ উৎপন্ন করে, তবে কগখ কোণের দ্বিখণ্ড কারক রেখা, এক অপরিবর্ত্তনীয় বিন্দু দিয়া যাইবে।

৬৯। যদি কোন ব্যাসের দুই প্রান্ত হইতে কোন জ্যার উপর দুই লম্ব টানা যায়, তবে ইহাদেরও বৃত্ত পরিধির মধ্যস্থিত

জ্যার অংশ দ্বয় পরস্পর সমান হইবে এবং ক্ষুদ্রতর লম্বটী, জ্যা ও পরিধির মধ্যস্থিত বৃহত্তর লম্বখণ্ডের বা তাহার বর্দ্ধিত অংশের সমান হইবে।

৭০। যে বৃত্ত,পরস্পর অবনত দুই নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে স্পর্শ করে, তাহার ব্যাসার্দ্ধ নির্দ্দিষ্ট আছে; বৃত্তের কেন্দ্র স্থির কর।

৭১। কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের বর্দ্ধিত ব্যাসে এমন এক বিন্দু স্থির কর, যেন তাহা হইতে দুই স্পর্শিনী টানিলে, সংযোগ বিন্দু দ্বয় বৃত্ত পরিধিকে এরূপে বিভক্ত করে যে, এক অংশ অন্যের দ্বিগুণ হয়।

৭২। কোন চাপের মধ্য বিন্দু দিয়া জ্যার সমান্তর একটী সরল রেখা টানিলে, তাহা ঐ বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শিনী হইবে; আর যে ব্যাসার্দ্ধ কোন চাপের সম্মুখীন জ্যাকে দ্বিখণ্ড করে, তাহা ঐ চাপকেও দ্বিখণ্ড করিবে।

৭৩। সন্নিহিত সমান দুই চাপের প্রত্যেক প্রান্ত হইতে সম্মুখীন পরিধিখণ্ডস্থ দুই নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া সরল রেখা টানিলে ও তাহাদিগকে বর্দ্ধিত করিয়া মিলাইয়া দিলে, তাহাদের অন্তর্গত কোণ গুলি সমান হইবে।

৭৪। কোন সমকোণী ত্রিভুজের দুই বাহুকে ব্যাস করিয়া দুই বৃত্ত অঙ্কিত কর। কর্ণের মধ্য বিন্দুকে কেন্দ্র ও দুই বাহুর সমষ্টিকে ব্যাস লইয়া আর একটী বৃত্ত আঁকিলে, তাহা প্রথম অঙ্কিত দুই বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

৭৫। কোন ত্রিভুজের বাহু গুলিকে ব্যাস করিয়া তিনটী বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, তাহারা বাহু অথবা বর্দ্ধিত বাহুতে পরস্পরকে ছেদ করিবে।

৭৬। কোন বৃত্তের ব্যাসের এক প্রান্ত হইতে যত গুলি জ্যা টানা যায়, তাহাদের মধ্য বিন্দু গুলি এক নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত পরিধিতে অবস্থিত হইবে।

৭৭। এক সম বাহু ত্রিভুজ কোন বৃত্তের অন্তর্গত করিলে, তাহার কৌণিক বিন্দু গুলি দ্বারা যে তিনটী চাপ উৎপন্ন হয়, তন্মধ্যে সন্নিহিত দুইটীর মধ্য বিন্দু দ্বয় সংযোজক রেখা, ত্রিভুজের দুই বাহু দ্বারা সমান তিন ভাগে বিভক্ত হইবে।

৭৮। কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে বর্দ্ধিত না করিয়া কোন প্রান্ত হইতে তাহার সহিত সম কোণ করে, এরূপ অন্য এক সরল রেখা টানিতে হইবে।

৭৯। কখগ এক সম বাহু ত্রিভুজ; ঘ, ঙ ও চ তিন বাহুর মধ্য বিন্দু; প্রতিপন্ন কর যে, ঘচ সরল রেখা, গঘঙ বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

৮০। দুই বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করিলে, যদি সংযোগ বিন্দু দিয়া পরিধি দ্বয় পর্য্যন্ত কোন দুই সরল রেখা টানা যায়, তবে তাহাদের দ্বারা দুই বৃত্তের যে দুই চাপ ছেদিত হইবে, তাহাদের সম্মুখীন দুইটী জ্যা পরস্পর সমান্তর হইবে।

৮১। কোন ত্রিভুজের একটী কোণ, তাহার সম্মুখীন বাহু ও অন্য দুই বাহুর সমষ্টি নির্দ্দিষ্ট আছে, ত্রিভুজটী অঙ্কিত কর।

৮২। কোন সম কোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ও কর্ণ নির্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজটী অঙ্কিত কর।

৮৩। কোন ত্রিভুজের ভূমি, শীর্ষ কোণ এবং উন্নতি নির্দ্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজটী অঙ্কিত কর।

৮৪। এক ভূমির উপর এক দিকে সমান শীর্ষ কোণ বিশিষ্ট যত গুলি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে পারা যায় তন্মধ্যে যেটী সম দ্বিবাহু সেইটী বৃহত্তম; আর একই ভূমির উপর ও একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যস্থিত যাবতীয় ত্রিভুজের মধ্যে যেটী সম দ্বিবাহু, সেইটীর শীর্ষ কোণ, অন্য ত্রিভুজের শীর্ষ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

৮৫। তিন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এ রূপ তিনটী সরল রেখা টান, যেন তাহাদের দ্বারা এক সম বাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত হয়। ঐ তিন বিন্দু এক রেখায় অবস্থিত নয়।

৮৬। কখ কোন বৃত্তের ব্যাস; গঘ জ্যা কখএর লম্ব; যদি গঘ রেখাস্থ কোন একটী ত বিন্দু দিয়া কতথ জ্যা টানা যায়, তবে কত ও কথএর অন্তর্গত আয়ত অপরিবর্ত্তনীয় রাশি হইবে।

৮৭। কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, একটী কোণ এবং আর একটী কোণ হইতে সম্মুখীন বাহু পর্য্যন্ত অঙ্কিত লম্ব জানা আছে; ত্রিভুজটী অঙ্কিত কর।

৮৮। এমন এক বৃত্ত অঙ্কিত কর, যাহা এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায় ও এক নির্দ্দিষ্ট রেখাকে এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে।

৮৯। এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এমন এক বৃত্ত অঙ্কিত কর, যাহা দুই নির্দ্দিষ্ট রেখাকে স্পর্শ করে।

৯০। এমন এক বৃত্ত অঙ্কিত কর, যাহা এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায় ও দুই নির্দ্দিষ্ট রেখাকে স্পর্শ করে।

৯১। কোন সম দ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিস্থ কোণ ও তাহার সম্মুখীন বাহুর উপর লম্ব জানা আছে; ত্রিভুজটী অঙ্কিত কর।

৯২। কোন বৃত্তের কেন্দ্র হইতে একটী জ্যার কোন বিন্দু পর্য্যন্ত এক সরল রেখা টানিলে, সেই রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ ও জ্যার দুই খণ্ডের অন্তর্গত আয়ত একত্র যোগে, ব্যাসার্দ্ধের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

৯৩। যদি কোন বৃত্তের ব্যাস এক নির্দ্দিষ্ট জ্যাকে ক বিন্দুতে লম্ব ভাবে ছেদ করে ও খগ অন্য কোন জ্যা প্রথম জ্যাকে ঘ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে কঘএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ এবং খঘ, গঘএর আয়ত একত্র যোগে অপরিবর্ত্তনীয় রাশি হইবে।

৯৪। দুই জ্যা পরস্পর লম্ব ভাবে ছেদ করিলে, তাহাদের প্রান্ত বিন্দু গুলির সংযোজক দুই সরল রেখার উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে ব্যাসের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে; আর দুই জ্যার খণ্ডগুলির উপর অঙ্কিত চারি সমচতুর্ভুজের সমষ্টিও ঐ সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

৯৫। কখগ ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ ক কোণ, একটী সূক্ষ্ম কোণ, খগকে ব্যাস করিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে যদি ক বিন্দু হইতে তাহার এক স্পর্শিনী টানা যায়, তবে সেই স্পর্শিনীর উপর অঙ্কিত দ্বিগুণিত সমচতুর্ভুজ ও খগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে কখ ও কগএর উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

৯৬। কগঘখ একটী অর্দ্ধ বৃত্ত; কখ ইহার ব্যাস; কঘ ও খগ দুই জ্যা পরস্পরকে ত বিন্দুতে ছেদ করিতেছে; প্রতিপন্ন কর যে কখ^{২}=কঘ. কত + খগ. খত।

৯৭। একটী অর্দ্ধবৃত্তকে এক সমকোণী ত্রিভুজের অন্তর্গত করিলে, যদি ত্রিভুজের কর্ণ ও কোটি তাহাকে স্পর্শ করে এবং তাহার ব্যাসের প্রান্ত হইতে কর্ণের সহিত সংযোগ বিন্দু দিয়া একটী সরল রেখা টানা যায় ও তাহা বর্দ্ধিত কোটিকে ছেদ করে, তবে কোটির বর্দ্ধিত অংশ, কোটির সমান হইবে।

৯৮। কোন ত্রিভুজের তিন কোন হইতে সম্মুখীন বাহুর উপর লম্ব টানিলে, তাহারা পরস্পর যে বিন্দুতে ছেদ করে, সেই বিন্দু ও যে কোন দুইটী কৌণিক বিন্দু, এক বৃত্ত পরিধিস্থ হইলে সেই বৃত্ত ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত বৃত্তের সমান হইবে।

৯৯। ম বিন্দু কোন বৃত্তের কেন্দ্র; কখ ও গঘ তাহার দুইটী জ্যা পরস্পরকে ঙ বিন্দুতে লম্ব ভাবে ছেদ করিয়াছে; প্রতিপন্ন কর যে, কখ ও গঘএর উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ এবং মঙর উপর অঙ্কিত চতুর্গুণিত সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে ব্যাসের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ হইবে।

১০০। কখগঘ একটী সমান্তরিক; ক বিন্দু দিয়া একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, যদি তাহা কখ ও কঘ ভুজকে এবং কগ কর্ণকে যথাক্রমে চ, ছ ও জ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে কখ.কচ+কঘ.কছ =কগ. কজ।

৩য় অধ্যায়।

ব্যাখ্যা ও পরিশিষ্ট।

১ম ও ২য় অধ্যায়ে যে সকল ক্ষেত্রের লক্ষণ ও ধর্ম্ম স্থিরীকৃত হইয়াছে, ইউক্লিড সেই গুলির সাহায্যে তৃতীয় অধ্যায়ে বৃত্তের সাধারণ ধর্ম্ম সকল নির্ণয় করিয়াছেন।

সং ৩। এই সংজ্ঞা দ্বারা বুঝিতে হইবে যে, একটী বৃত্ত আর একটীকে অন্তরে স্পর্শ করিলে, সংযোগ বিন্দু ব্যতীত এক বৃত্ত পরিধির যাবতীয় বিন্দু, অন্যের অন্তরে থাকিবে; এই রূপ দুই বৃত্ত পরস্পরকে বাহিরে স্পর্শ করিলে, সংযোগ বিন্দু ব্যতীত এক বৃত্ত পরিধির যাবতীয় বিন্দু অন্যের বাহিরে থাকিবে।

সং ৭। ইউক্লিডের জ্যামিতিতে কোন স্থানেই এই সংজ্ঞার উপযোগিতা দৃষ্ট হয় না।

সং ১০। জ্যামিতিতে প্রবৃদ্ধ কোণের উল্লেখ না থাকাতে অবশ্যই স্বীকার করিতে হইবে যে, ইউক্লিড লিখিত বৃত্তচ্ছেদক গুলি অর্দ্ধ বৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। যে বৃত্তচ্ছেদকের দুইটী ব্যাসার্দ্ধ পরস্পরের সহিত সম কোণ করে, সেই বৃত্তচ্ছেদকের নাম বৃত্তপাদ।

তৃতীয় অধ্যায়ে, অনেক গুলি প্রতিজ্ঞা ব্যতিরেক মুখে সিদ্ধ হইয়াছে; ফলত, অন্য কোন অধ্যায়ে এত ব্যতিরেকী প্রমাণের উদাহরণ দৃষ্ট হয় না। ১ম অধ্যায়ের ৪৮ টী প্রতিজ্ঞার মধ্যে ৯টীর প্রমাণ ব্যতিরেক মুখে সম্পন্ন হইয়াছে; কিন্তু তৃতীয় অধ্যায়ের ৩৭ টী প্রতিজ্ঞার মধ্যে ১৫ টী ব্যতিরেকী প্রমাণের উদাহরণ স্থল। ব্যতিরেক মুখে প্রমাণ অপেক্ষা, অন্বয় মুখে প্রমাণ বিদ্যার্থীদিগের অধিক হৃদয়গ্রাহী হইয়া থাকে; কিন্তু বিবেচনা করিতে হইবে যে, প্রতিজ্ঞাতে যাহা সাধ্য বলিয়া নির্দ্দিষ্ট

হইয়াছে, তদ্ব্যতীত অন্য প্রকার কল্পনা করিলে, তাহা অসম্ভব হইয়া পড়ে, ইহা প্রদর্শন করাও প্রতিজ্ঞা প্রমাণের একটী উৎকৃষ্ট উপায়। এস্থলে শিক্ষার্থীদিগের জ্ঞাপনার্থ বলা যাইতে পারে যে, ইউক্লিড পরস্পর বিপরীত সম্বন্ধ বিশিষ্ট দুইটী প্রতিজ্ঞার মধ্যে অন্যতরটীর প্রমাণ তিন প্রকারে সিদ্ধ করিয়াছেন।

(১) ব্যতিরেক মুখে; যথা—১ম, ৬; ৩য়, ১ ইত্যাদি।

(২) যাহা প্রমাণ করিতে হইবে, তাহার অন্যথা ভাবের অযৌক্তিকতা প্রদর্শন দ্বারা; যথা—১ম, ১৯, ২৫ ইত্যাদি।

(৩) ব্যতিরেকী প্রমাণের পথ অবলম্বন না করিয়া অন্যরূপ অঙ্কন দ্বারা; যথা—১ম, ৪৮; ৩য়, ৩৭।

৩য়, ২। এই প্রতিজ্ঞাতে উপপন্ন হইয়াছে যে, পরিধিতে দুই বিন্দু কল্পনা করিলে, তাহাদের সংযোজক সরল রেখা বৃত্তের ভিতরে পড়িবে; ইহা দ্বারা স্পষ্টই বোধ হইতেছে যে, কোন পরিধিখণ্ড, সরল রেখা হইতে পারে না; কেননা, তাহা হইলে সেই পরিধিখণ্ড ও যে সরল রেখা তাহার দুই সীমা সংযুক্ত করে এই দুইটী মিলিত হইত।

৩য়, ৩। এই প্রতিজ্ঞার দুইটী প্রকরণের সম্বন্ধ পরস্পর বিপরীত এবং সমস্ত প্রতিজ্ঞা ও প্রথম প্রতিজ্ঞার অনুমানের সম্বন্ধও পরস্পর বিপরীত।

৩য়, ৪। উভয় জ্যা কেন্দ্রগত হইলে, পরস্পরকে দ্বিখণ্ড করিবে; সে স্থলে দুইটী জ্যাই বৃত্তের ব্যাস হইবে।

৩য়, ৭ ও ৮। এই দুই প্রতিজ্ঞার অনুমান স্বরূপ ইহা লেখা যাইতে পারে যে, কোন দুই জ্যা, ব্যাস বা বর্দ্ধিত ব্যাসের সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করিলে, সেই দুই জ্যা পরস্পর সমান হইবে।

৩য়, ৯। এই প্রতিজ্ঞাটী, সপ্তমের অনুমান স্বরূপ লিখিলেও হইত। ইউক্লিড, নবমের যে দুই প্রকার প্রমাণ করিয়াছেন তন্মধ্যে একটী মূলে লিখিত হইয়াছে; অন্যটী এই;— কখ ও খগ সংযুক্ত করিয়া তাহাদিগকে ক্রমে ট ও ঠ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর। এক্ষণে ঘট ও ঘঠ সংযুক্ত করিলে, তৃতীয় অধ্যায়ের ১ম প্রতিজ্ঞার অনুমানদ্বারা সহজেই বোধ হইবে যে,

বৃত্তের কেন্দ্র, ঘট এবং ঘঠ উভয় রেখাতে থাকিবে; অতএব ঘ বিন্দুই বৃত্তের কেন্দ্র।

৩য়, ১০। ইউক্লিড এই প্রতিজ্ঞারও দুই প্রকার প্রমাণ করিয়াছেন; একটী যথা স্থলে সন্নিবেশিত হইয়াছে; অন্যটী এই;—কছ ও ছচএর মধ্য বিন্দু দুইটী টএর সহিত সংযুক্ত করিলে, পূর্ব্ব প্রতিজ্ঞার ন্যায় প্রমাণ হইবে যে, ট দুই বৃত্তেরই কেন্দ্র; কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব; (৩য়,৫)।

৩য়, ১১ ও ১২। এই দুই প্রতিজ্ঞাতে ইহা স্বীকৃত হইয়াছে যে, দুই বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করিলে, এক মাত্র বিন্দুতে সংলগ্ন হইবে, কিন্তু ইউক্লিড ইহা ত্রয়োদশ প্রতিজ্ঞাতে প্রমাণ করিয়াছেন। বৃত্ত দ্বয় একাধিক বিন্দুতে সংলগ্ন হইলেও এই দুইটী প্রতিজ্ঞা সিদ্ধ হইতে পারে।

৩য়, ১৩। এই প্রতিজ্ঞার প্রথম প্রকরণ প্রমাণ করিবার নিমিত্ত দুইটী চিত্র অঙ্কিত হইয়াছে; তাহাদের মধ্যে প্রথমটী ইউক্লিডের মূল গ্রন্থে নাই; সিম্‌সন ইহা অঙ্কিত করিয়াছেন। ইউক্লিড এই প্রকারে প্রতিজ্ঞাটী প্রমাণ করিয়াছেন; যথা,—

যদি অসম্ভব হয়, তবে ঙখচ বৃত্ত যেন কখগ বৃত্তকে অন্তরে খ ও ঘ বিন্দুতে স্পর্শ করিল; ত যেন কখগ বৃত্তের কেন্দ্র; তথ সংযুক্ত করিলে তাহা খ ও ঘ বিন্দু দিয়া যাইবে (৩য়, ১১)। এক্ষণে ত বিন্দু, কখগ বৃত্তের কেন্দ্র বলিয়া তখ, তঘএর সমান; ইহাদের মধ্যে তখ, থঘ অপেক্ষা বৃহত্তর; অতএব থখ, থঘ অপেক্ষা আরও বৃহত্তর। আবার থ বিন্দু ঙখচ বৃত্তের কেন্দ্র বলিয়া, থখ রেখা থঘএর সমান; কিন্তু থখ, থঘ অপেক্ষা বৃহত্তর প্রতিপন্ন হইয়াছে; অতএব এরূপ হওয়া অসম্ভব।

৩য়, ১৭। এই প্রতিজ্ঞার অঙ্কন দ্বারা সহজেই বোধ হইবে যে, কোন নির্দ্দিষ্ট বহিস্থ বিন্দু হইতে বৃত্তের সমান সমান দুইটী স্পর্শিনী টানিতে পারা যায়। বহিস্থ কোন বিন্দু হইতে স্পর্শিনী টানিবার একটী সুন্দর উপায় আছে; নির্দ্দিষ্ট বিন্দু ও নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র এই দুইটী যোজক রেখাকে ব্যাস করিয়া একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, তাহার পরিধি, যে দুই বিন্দুতে নির্দ্দিষ্ট

বৃত্তের পরিধিকে ছেদ করিবে, তাহাদের প্রত্যেকের সহিত নির্দ্দিষ্ট বিন্দুকে সংযুক্ত করিয়া দাও; তাহা হইলেই দুইটী স্পর্শিনী অঙ্কিত হইবে।

এই দুইটী কেন স্পর্শিনী হইল তাহা তৃতীয় অধ্যায়ের ৩১শ প্রতিজ্ঞা পাঠ করিলেই অনায়াসে বোধ হইবে।

৩য়, ১৮। ১৬র প্রতিজ্ঞার সহিত এই প্রতিজ্ঞার বিপরীত সম্বন্ধ; কেননা ব্যাসের সহিত সম কোণ করিয়া তাহার কোন প্রান্ত হইতে একটী সরল রেখা টানিলে, সেই রেখাটী বৃত্তের স্পর্শিনী হইবে।

৩য়, ২০। ইউক্লিড, পরিধিস্থ কোণ এক সম কোণ, অপেক্ষা ক্ষুদ্র জ্ঞান করিয়া এই প্রতিজ্ঞা প্রমাণ করিয়াছেন; যদি পরিধিস্থ কোণ, সম কোণ হয়, তবে কেন্দ্রে, কোণ উৎপন্ন হইবে না; আর পরিধিস্থ কোণ, সম কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, তাহা যে চাপের উপর দণ্ডায়মান হইয়াছে, সেই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণটী প্রবৃদ্ধ কোণ হইবে; তাহা হইলেও প্রতিজ্ঞাটী সিদ্ধ হইতে পারে। এই রূপে প্রতিজ্ঞাটী সকল স্থলে সিদ্ধ হইলে পরবর্ত্তী অনেক গুলি প্রতিজ্ঞার উপপত্তি সহজ হইয়া পড়ে; তাহা হইলে, ২১ প্রতিজ্ঞার দুইটী প্রকরণের প্রয়োজন থাকে না; ২২শ প্রতিজ্ঞাটী অনায়াসে সিদ্ধ হয়, কেননা কেন্দ্রস্থ কোণ গুলির সমষ্টি চারি সম কোণের সমান; তাহা হইলেই চতুর্ভুজের দুই সম্মুখীন কোণ, চারি সম কোণের অর্দ্ধেক, অর্থাৎ দুই সম কোণের সমান হইবে; এবং ৩১শ প্রতিজ্ঞা, ২০শ প্রতিজ্ঞার একটী অনুমান মাত্র হইয়া পড়ে।

ইউক্লিড ২০র প্রতিজ্ঞার ১ম প্রকরণ প্রমাণের জন্য পঞ্চম অধ্যায়ের প্রথম এবং ২য় প্রকরণ প্রমাণের জন্য পঞ্চম অধ্যায়ের পঞ্চম প্রতিজ্ঞা স্বীকার করিয়া লইয়াছেন।

৩য়, ২১। এই প্রতিজ্ঞার প্রথম প্রকরণটী ইউক্লিডের, ২য় প্রকরণটী সিমসনের লিখিত।

ইউক্লিডের ৪র্থ অধ্যায়ের পঞ্চম প্রতিজ্ঞাটী, তৃতীয় অধ্যায়ের ১ম প্রতিজ্ঞার একটী অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞা স্বরূপ গৃহীত হইয়াছে;

কোন ত্রিভুজের উপর কিরূপে এক বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হয় পাঠক বৃন্দ তাহা এই প্রতিজ্ঞা দ্বারা জানিতে পারিবেন; তাহা হইলেই নিম্ন লিখিত প্রতিজ্ঞাটী কিরূপে সিদ্ধ হইয়াছে, ইহা তাঁহাদের হৃদয়ঙ্গম হইবে;—

এক নির্দ্দিষ্ট ভূমির উপর সমান সমান শীর্ষ কোণ বিশিষ্ট কতকগুলি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিলে, শৃঙ্গ গুলি এক বৃত্ত পরিধিতে থাকিবে।

৩য়, ২২। ইহার বিপরীত প্রতিজ্ঞা এই; যদি কোন চতুর্ভুজের সম্মুখীন কোণ দ্বয় একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হয়, তবে চতুর্ভুজের উপর একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিতে পারা যায়; ইহা এই রূপে সিদ্ধ হইবে; যথা—কখগঘ যেন এইরূপ একটী চতুর্ভুজ; কখগ ত্রিভুজের উপর এক বৃত্ত অঙ্কিত কর এবং কগ চাপে ঙ বিন্দু কল্পনা করিয়া কঙ ও গঙ সংযুক্ত কর। এক্ষণে খ ও ঙ কোণ দ্বয় একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান; আর খ ও ঘ কোণ দ্বয়ও একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান; অতএব ঘ কোণ ঙ কোণের সমান; তাহা হইলেই ঘ ও ঙ বিন্দু উভয়েই খগ চাপে অবস্থিত হইবে।

৩য়, ৩২। ইউক্লিড ইহার বিপরীত প্রতিজ্ঞা প্রমাণ করেন নাই; কিন্তু সেই প্রতিজ্ঞাটী অনায়াসেই ব্যতিরেক মুখে সিদ্ধ হইতে পারে।

৩য়, ৩৫। যদি কখ ও গঘ দুই রেখা ঙ বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে এবং কঙ ও ঙখএর অন্তর্গত আয়ত, গঙ ও ঙঘএর অন্তর্গত আয়তের সমান হয়, তবে ক, খ, গ ও ঘ এক বৃত্ত পরিধিস্থ হইবে। এই প্রতিজ্ঞাটী সহজেই প্রমাণ করা যাইতে পারে যে, ক, খ ও গ বিন্দু দিয়া একটী বৃত্ত অঙ্কিত কর; তাহা হইলে তৃতীয় অধ্যায়ের ৩৫শ প্রতিজ্ঞা দ্বারা উপপন্ন হইবে যে, ঘ বিন্দুও এই বৃত্ত পরিধিতে থাকিবে।

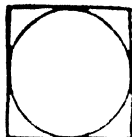
৪থ অধ্যায়।

সংজ্ঞা।

১। একটী সরল রৈখিক ক্ষেত্র অন্য সরল রৈখিক ক্ষেত্রের অন্তর্গত হইয়াছে বলিলে, বুঝিতে হইবে যে, যাহার মধ্যে ঐ অন্তর্গত ক্ষেত্র অঙ্কিত হইয়াছে তাহার এক একটী ভুজ যথাক্রমে অন্তর্গত ক্ষেত্রের এক একটী কোণের সহিত সংলগ্ন আছে।

২। ঐ রূপ, একটী ক্ষেত্র অন্য ক্ষেত্রের উপর অঙ্কিত হইয়াছে বলিলে, বুঝিতে হইবে যে, যাহার উপর বহিস্থ ক্ষেত্র অঙ্কিত হইয়াছে তাহার এক একটী কোণের সহিত যথাক্রমে উপরি অঙ্কিত ক্ষেত্রের এক একটী ভুজ সংলগ্ন আছে।

৩। একটী সরল রৈখিক ক্ষেত্র কোন বৃত্তের অন্তর্গত হইয়াছে বলিলে, বুঝিতে হইবে যে, অন্তর্গত ক্ষেত্রের সমুদয় কোণ বৃত্তের পরিধিতে সংলগ্ন আছে।

৪। একটী সরল রৈখিক ক্ষেত্র কোন বৃত্তের উপর অঙ্কিত হইয়াছে বলিলে, বুঝিতে হইবে যে, উপরি অঙ্কিত ক্ষেত্রের প্রত্যেক ভুজ বৃত্তের পরিধি স্পর্শ করিয়া আছে।

৫। ঐ রূপ, একটী বৃত্ত কোন সরল রৈখিক ক্ষেত্রের অন্তর্গত হইয়াছে বলিলে বুঝিতে হইবে যে, বৃত্তের পরিধি ক্ষেত্রের প্রত্যেক ভুজ স্পর্শ করিয়া আছে।

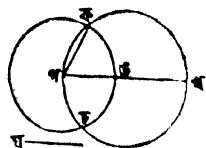
৬। একটী বৃত্ত কোন সরল রৈখিক ক্ষেত্রের উপর অঙ্কিত হইয়াছে বলিলে, বুঝিতে হইবে যে, বৃত্তের পরিধি ঐ ক্ষেত্রের সমুদয় কোণে সংলগ্ন আছে। (তৃতীয় সংজ্ঞার চিত্র দেখ।)

৭। একটী সরল রেখা কোন বৃত্তের মধ্যে স্থাপিত হইয়াছে বলিলে, বুঝিতে হইবে যে, ঐ রেখার দুই প্রান্ত বৃত্তের পরিধিতে সংলগ্ন আছে।

১ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

একটী নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের মধ্যে তাহার ব্যাস অপেক্ষা বৃহৎ নয়, এমন এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার সমান অন্য একটী সরল রেখা স্থাপিত করিতে হইবে।

কখগ নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত এবং তাহার ব্যাস অপেক্ষা বৃহৎ নয় এমন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা ঘ। কখগ বৃত্তের মধ্যে ঘএর সমান একটী সরল রেখা স্থাপিত করিতে হইবে।

কখগ বৃত্তের খগ ব্যাস টান। খগ যদি ঘএর সমান হয়, তবে তাহাতেই কার্য্য সিদ্ধ হইল, কেননা কখগ বৃত্তে, ঘএর সমান খগ রেখা স্থাপিত হইল। কিন্তু খগ যদি ঘএর সমান না হয়, তবে অবশ্য তাহা হইতে বৃহৎ হইবে; [কল্পনা।*

গখ হইতে ঘএর সমান করিয়া গঙ ছেদ কর, [১ম, ৩।

এবং গ বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া গঙ ব্যাসার্দ্ধ লইয়া কঙচ বৃত্ত অঙ্কিত কর ও গক সংযুক্ত কর।

গ বিন্দু কঙচ বৃত্তের কেন্দ্র বলিয়া,

গক, গঙ পরস্পর সমান; [১ম, ১৫ সং।

আর গঙ রেখা ঘএর সমান, [অঙ্কন।†

সুতরাং ঘ রেখা গকএর সমান। [১ স্বতঃ।

অতএব কখগ নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের মধ্যে তাহার ব্যাস অপেক্ষা বৃহৎ নয়, এমন একটী নির্দ্দিষ্ট ঘ সরল রেখার সমান গক রেখা স্থাপিত হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞা—১। একটী নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের মধ্যে তাহার ব্যাস অপেক্ষা বৃহৎ নয়, এমন এক রেখার সমান অন্য একটী সরল রেখা এরূপে স্থাপিত করিতে হইবে যে, উহা বর্দ্ধিত হইলে বৃত্তের বহিস্থ কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়।

২। একটী নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের মধ্যে তাহার ব্যাস অপেক্ষা বৃহৎ নয়, এমন এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার সমান ও সমান্তর অন্য একটী সরল রেখা স্থাপিত করিতে হইবে।

---

* Hypothesis. † Construction.

২ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

একটী নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের কোণের সমানকোণবিশিষ্ট এক ত্রিভুজ, কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে।

কখগ নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত ও ঘঙচ নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজ; ঘঙচ ত্রিভুজের কোণের সমানকোণবিশিষ্ট ত্রিভুজ, কখগ বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে।

ক বিন্দু দিয়া বৃত্ত-স্পর্শক ছকজ রেখা টান, [৩য়, ১৭।

ছকজ রেখার ক বিন্দু-তে ঘঙচ কোণের সমান জকগ কোণ কর, [১ম, ২৩।

এবং কছ সরল রেখার ক বিন্দুতে ঘচঙ কোণের সমান ছকখ কোণ অঙ্কিত কর, ও খগ সংযুক্ত করিয়া দাও। কখগ সম্পাদ্য ত্রিভুজ।

ছকজ সরল রেখা কখগ বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে এবং কগ রেখা স্পর্শ বিন্দু ক হইতে টানা হইয়াছে, [অঙ্কন।

একারণ জকগ কোণ,

বৃত্তের অপর খণ্ডস্থ কখগ কোণের সমান। [৩য়, ৩২।

আর জকগ কোণ ঘঙচ কোণের সমান; [অঙ্কন।

সুতরাং কখগ কোণ ঘঙচ কোণের সমান। [১ স্বতঃ।

এই রূপে, কগখ কোণ ঘচঙ কোণের সমান।

এই হেতু অবশিষ্ট খকগ কোণ,

ঙঘচ কোণের সমান। [১ম, ৩২; স্বতঃ ১১ ও ৩।

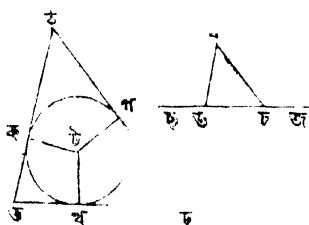
অতএব কখগ ত্রিভুজ, ঘঙচ ত্রিভুজের কোণের সমানকোণ বিশিষ্ট হইয়া কখগ বৃত্তের অন্তর্গত হইয়াছে। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—৩। দুইটী ঐককেন্দ্রিক বৃত্তের একটীর অন্তর্গত করিয়া এক ত্রিভুজ অঙ্কিত হইয়াছে; ঐ ত্রিভুজের কোণের সমানকোণবিশিষ্ট একটী ত্রিভুজ, এরূপ করিয়া অপর বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে যে, দুই ত্রিভুজের ভুজগুলি যথাক্রমে সমান্তর হয়।

৩ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

একটী নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের কোণের সমানকোণবিশিষ্ট এক ত্রিভুজ, কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের উপর অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখগ নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত এবং ঘঙচ নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজ। কখগ বৃত্তের উপর, ঘঙচ ত্রিভুজের কোণের সমানকোণ-বিশিষ্ট এক ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

ঙচ সরল রেখা দুই পার্শ্বে ছ এবং জ বিন্দু পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর। টকে কখগ বৃত্তের কেন্দ্র কর; [৩য়, ১। এবং তথা হইতে টখ রেখা টান। টখ রেখার ট বিন্দুতে খটক কোণ ঘঙছ

কোণের সমান করিয়া এবং খটগ কোণ ঘচজ কোণের সমান করিয়া অঙ্কিত কর ; [১ম, ২৩।

এবং ক, খ, গ, বিন্দু দিয়া কখগ বৃত্তের ঠড, ডঢ, ঢঠ, স্পর্শক রেখা টান। [৩য়, ১৭।

ঠডঢ সম্পাদ্য ত্রিভুজ।

ঠড, ডঢ, ঢঠ সরল রেখা কখগ বৃত্তকে ক, খ, গ, বিন্দুতে স্পর্শ করিতেছে ; [অঙ্কন।

এবং ট কেন্দ্র হইতে ক, খ, গ, স্পর্শবিন্দু পর্য্যন্ত টক, টখ, টগ, রেখা টানা গিয়াছে,

এই হেতু ক, খ, গ, বিন্দুতে যে যে কোণ উৎপন্ন হইয়াছে, তাহারা প্রত্যেকে সম কোণ। [৩য়, ১৮।

অপর কডখট চতুর্ভুজ দুই ত্রিভুজে বিভক্ত হইতে পারে বলিয়া, তদন্তঃপাতী চারি কোণ একত্র করিলে চারি সম কোণের সমান ;

এবং তাহার মধ্যে টকড, টখড প্রত্যেকে এক এক সম কোণ, স্নুতরাং অবশিষ্ট কটখ ও কডখ এই দুই কোণ একত্র করিলে দুই সম কোণের সমান হইবে ; [৩ স্বতঃ।

অপর ঘঙচ ও ঘঙছ একত্র করিলে দুই সমকোণের সমান, [১ম, ১৩।

অতএব কটখ ও কডখ একত্র করিলে ঘঙচ ও ঘঙছ কোণের সমান ;

তন্মধ্যে কটখ কোণ ঘঙছ কোণের সমান ; [অঙ্কন।

স্নুতরাং অবশিষ্ট কডখ কোণ ঘঙচ কোণের সমান। [৩ স্বতঃ।

এই রূপে উপপন্ন করা যাইতে পারে যে, ঠঢড কোণ ঘচঙ কোণের সমান ;

সুতরাং অবশিষ্ট ডঠঢ কোণ ঙঘচ কোণের সমান।

[১ম, ৩২; স্বতঃ ১১ ও ৩।

অতএব ঠডঢ ত্রিভুজ, ঘঙচ ত্রিভুজের কোণের সমান-কোণবিশিষ্ট হইয়া কখগ বৃত্তের উপর অঙ্কিত হইয়াছে। এখনে ইহাই সম্পাদ্য।

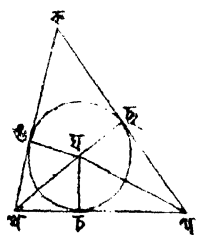
অঃ প্রঃ—৪। প্রমাণ কর যে, ক এবং খ বিন্দু দিয়া যে দুইটী স্পর্শক রেখা টানা হইয়াছে, তাহাদের পরস্পর সম্পাত হইবে।

৫। একটী নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের কোণের সমানকোণবিশিষ্ট একটী ত্রিভুজ, এরূপে অঙ্কিত করিতে হইবে যে, উহার এক ভুজ ও অপর দুটী বর্দ্ধিত ভুজ এক নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত স্পর্শ করে।

৪ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

একটী বৃত্ত কোন নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের অন্তর্গত করিতে হইবে।

কখগ নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজ ; একটী বৃত্ত এই ত্রিভুজের অন্তর্গত করিতে হইবে।

কখগ এবং খগক এই দুই কোণকে খঘ ও গঘ রেখার দ্বারা দ্বিখণ্ড কর, [১ম, ৯।
ও ঘ বিন্দুতে ঐ দুই রেখা মিলাইয়া দাও। ঘ বিন্দু হইতে কখ, খগ, গক রেখার উপর ঘঙ, ঘচ, ঘছ লম্ব টান।

[১ম, ১২।

কখগ কোণ খঘ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড হওয়াতে,
ঙখঘ কোণ চখঘ কোণের সমান; [অঙ্কন।
এবং খঙঘ সম কোণ খচঘ সম কোণের সমান; [১১ স্বতঃ।
অতএব ঙখঘ, চখঘ এই দুই ত্রিভুজের একের দুটী কোণ ক্রমান্বয়ে অন্যের দুটী কোণের সমান;
এবং প্রত্যেক ত্রিভুজের এক একটী সমান কোণের সম্মুখস্থ খঘ ভুজ, উভয়েরই সামান্য বাহু;
এই হেতু তাহাদের অন্যান্য ভুজ সমান; [১ম, ২৬।
অতএব ঘঙ রেখা ঘচ রেখার সমান।
এই রূপে ঘছ রেখা ঘচ রেখার সমান,
সুতরাং ঘঙ রেখা ঘছএর সমান। [১ স্বতঃ।
অতএব ঘঙ, ঘচ, ঘছ এই তিন সরল রেখা পরস্পর সমান। এই হেতু ঘ বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া, ঐ তিনের মধ্যে কোন একটী রেখার প্রান্ত দিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে সেই বৃত্ত অপর দুইটী রেখারও প্রান্ত দিয়া যাইবে।
অপর ঐ বৃত্ত, কখ, খগ এবং কগ রেখাকে স্পর্শ করিবে; কেননা ঙ, চ, ছ বিন্দুতে যে যে কোণ উৎপন্ন হইয়াছে, সে সকল সম কোণ; এবং ব্যাসের প্রান্ত হইতে লম্ব টানিলে তাহা বৃত্তকে স্পর্শ করে। [৩য়, ১৬-অনু।
এই হেতু কখ, খগ, গক সরল রেখা প্রত্যেকে বৃত্ত স্পর্শ করিতেছে। অতএব ঙচছ বৃত্ত কখগ ত্রিভুজের অন্তর্গত হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

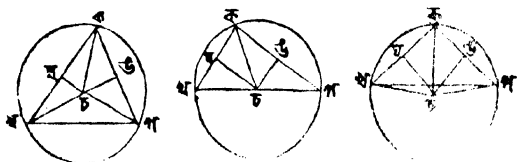
অঃ প্রঃ—৬। এমন একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যে, উহা কোন নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের এক ভুজ ও অপর দুইটী বর্দ্ধিত ভুজ স্পর্শ করে।

৭। এমন একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যে, উহা একটী নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত ও এই নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের দুইটী নির্দ্দিষ্ট স্পর্শক রেখা স্পর্শ করে।

৮। চতুর্থ প্রতিজ্ঞার চিত্রে যদি ক ঘ সংযুক্ত হয় ও বৃত্তের সহিত কঘ রেখার জ বিন্দুতে সম্পাত হয়, তবে জ বিন্দু ক ঙ ছ ত্রিভুজের অন্তর্গত বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

৫ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের উপর একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখগ নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজ। একটী বৃত্ত কখগ ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখ এবং কগকে ঘ ও ঙ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর; [১ম, ১০।
এবং ঐ দুই বিন্দু হইতে কখ এবং কগ সরল রেখার উপর ঘচ এবং ঙচ লম্ব টান। [১ম, ১১।
ঘচ এবং ঙচ এই দুই রেখাকে বৃদ্ধি করিলে তাহারা পরস্পর সংলগ্ন হইবে; যদি না হয়, তবে তাহারা সমান্তর রেখা;
তাহা হইলে কখ ও কগ সরল রেখা, চঘ ও চঙ রেখার সহিত সম কোণ উৎপন্ন করিয়াছে বলিয়া, সমান্তর

হইবে; কিন্তু এরূপ হওয়া যুক্তিবিরুদ্ধ। অতএব ঘচ, ঙচ যেন চ বিন্দুতে সংলগ্ন হইল। চ, ক সংযুক্ত কর; আর চ বিন্দু যদি খগ রেখাস্থ না হয়, তবে খচ, গচ সংযুক্ত কর।

কঘ রেখা খঘ রেখার সমান, [অঙ্কন।

এবং ঘচ রেখা কঘচ ও খঘচ দুই ত্রিভুজের সামান্য বাহু ও ক খ রেখার উপর লম্ব;

এই হেতু চক ভূমি চখ ভূমির সমান; [১ম, ৪।

এই রূপে চগ রেখা ও চক রেখার সমান প্রমাণ হইতে পারে;

সুতরাং চখ রেখা চগএর সমান, [১ স্বতঃ।

এবং চক, চখ, চগ এই তিন রেখা পরস্পর সমান।

অতএব চ বিন্দুকে কেন্দ্র এবং এই তিনের কোন একটী রেখা ব্যাসার্দ্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, উহা অপর দুই রেখার প্রান্ত দিয়া যাইবে এবং কখগ ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত হইবে। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অনুমান। বৃত্তের কেন্দ্র ত্রিভুজের মধ্যে পড়িলে ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ অর্দ্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর খণ্ডস্থ হওয়াতে, সম কোণ হইতে ন্যূন হইবে। কেন্দ্র কোন বাহুতে সংলগ্ন হইলে, সেই বাহুর সম্মুখবর্ত্তী কোণ, অর্দ্ধ বৃত্তস্থ হওয়াতে, সম কোণ হইবে। কেন্দ্র ত্রিভুজের বহিস্থ হইলে, যে বাহুর বাহিরে কেন্দ্র থাকিবে, তাহার সম্মুখবর্ত্তী কোণ, অর্দ্ধবৃত্ত হইতে লঘুতর খণ্ডস্থ হওয়াতে, সমকোণ হইতে বৃহত্তর হইবে। [৩য়, ৩১।

অতএব বিপর্য্যস্তভাবে বলা যাইতে পারে যে, নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজ সূক্ষ্মকোণবিশিষ্ট হইলে কেন্দ্র ত্রিভুজের মধ্যে, সমকোণবিশিষ্ট হইলে সমকোণের সম্মুখস্থ বাহুতে, ও স্থূলকোণবিশিষ্ট হইলে স্থূল কোণের সম্মুখস্থ বাহু অতিক্রম করিয়া অপর পার্শ্বে পতিত হইবে।

অঃ প্রঃ—৯। ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত ও অন্তর্গত বৃত্তদ্বয় ঐককেন্দ্রিক হইলে ত্রিভুজটী সমবাহু হইবে।

১০। যদি কখগ ত্রিভুজের খগ ভূমির সমান্তর ঘঙ রেখা টানা যায়, তবে কখগ এবং কঘঙ এই দুই ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত বৃত্তদ্বয়ের একটী সামান্য স্পর্শক রেখা টানা যাইতে পারে।

৬ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

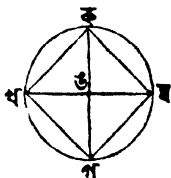
একটী সমচতুর্ভুজ কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে।

কখগঘ নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত; একটী সমচতুর্ভুজ, কখগঘ বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে।

কখগঘ বৃত্তের কগ এবং খঘ ব্যাস পরস্পর লম্ব ভাবে টান;

[৩য়, ১। ১ম, ১১।

এবং কখ, খগ, গঘ, ঘক সংযুক্ত কর।

কখগঘ ক্ষেত্র সম্পাদ্য সমচতুর্ভুজ।

ঙ বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র হওয়াতে খঙ, ঘঙ পরস্পর সমান, আর ঙক সামান্য ভুজ ও খঘ রেখার উপর লম্ব, এই হেতু কখ ভূমি কঘ ভূমির সমান। [১ম, ৪।

ঐ কারণে খগ, গঘ প্রত্যেকেই খক অথবা কঘএর সমান।
অতএব কখগঘ চতুর্ভুজ সমবাহু।

অপর ঐ ক্ষেত্র সমকোণবিশিষ্ট;
কারণ খঘ সরল রেখা কখগঘ বৃত্তের ব্যাস হওয়াতে,
খকঘ অর্দ্ধবৃত্ত, [অঙ্কন।
তন্নিমিত্ত খকঘ কোণ সমকোণ; [৩য়, ৩১।
ঐ কারণে কখগ, খগঘ, গঘক কোণ প্রত্যেকেই সমকোণ;
অতএব কখগঘ চতুর্ভুজ ক্ষেত্র সমকোণবিশিষ্ট;

অপর, ইহা যে সমবাহু তাহা উপপন্ন হইয়াছে,
সুতরাং ইহা বর্গক্ষেত্র এবং কখগঘ বৃত্তের অন্তর্গত হইয়াছে।
এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

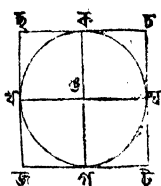
অঃ প্রঃ—১১। এক নির্দ্দিষ্ট সরলরৈখিক ক্ষেত্রের সমান একটী আয়ত ক্ষেত্র এক বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে।

১২। বৃত্তের অন্তর্গত সমচতুর্ভুজ ব্যাসার্দ্ধের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ এবং ব্যাসের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের অর্দ্ধেক।

৭ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের উপর একটী সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখগঘ নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত। ইহার উপর এক সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখগঘ বৃত্তের কগ ও খঘ ব্যাস পরস্পর লম্বভাবে টান ;   [৩য়, ১ ; ১ম, ১১।
এবং ক, খ, গ, ঘ বিন্দু দিয়া বৃত্তস্পর্শি চছ, ছজ, জট, টচ রেখা টান। [৩য়, ১৭।
চছজট ক্ষেত্র সম্পাদ্য সমচতুর্ভুজ।

চছ রেখা বৃত্ত স্পর্শ করিতেছে, এবং ঙ কেন্দ্র হইতে স্পর্শ বিন্দু ক পর্য্যন্ত ঙক রেখা টানা হইয়াছে,   [অঙ্কন।
এই হেতু ক বিন্দুস্থ কোণদ্বয় প্রত্যেকে সম কোণ। [৩য়, ১৮।
ঐ কারণে খ, গ, ঘ বিন্দুস্থ প্রত্যেক কোণ সম কোণ।
অপর কঙখ কোণ একটী সম কোণ হওয়াতে,   [অঙ্কন।
এবং ঙখছ কোণও সম কোণ বলিয়া,
ছজ রেখা কগএর সমান্তর হইল।   [১ম, ২৮।
ঐ কারণে কগ রেখা চটএর সমান্তর।
এই রূপে ইহাও উপপন্ন করা যাইতে পারে যে, চছ, টজ রেখা প্রত্যেকেই ঘখ রেখার সমান্তর।
অতএব ছট, ছগ, গচ, চখ, খট ইহারা সমান্তর ক্ষেত্র ;
এই হেতু ছচ সরল রেখা জট রেখার সমান,
এবং ছজ রেখা চটএর সমান ;   [১ম, ৩৪।
অপর কগ রেখা খঘএর সমান হওয়ায়,
ও কগ রেখা ছজ, চট রেখার প্রত্যেকের সমান বলিয়া,
এবং খঘ রেখা ছচ, জট রেখার প্রত্যেকের সমান হওয়াতে,
ছজ অথবা চট রেখাদ্বয়ের প্রত্যেকেই ছচ অথবা জট রেখার সমান ;

অতএব ছজটচ চতুর্ভুজ ক্ষেত্র সমবাহু।

অপর, ইহা সমকোণবিশিষ্ট ;

কেননা, ছখঙক সমান্তর ক্ষেত্র, ও কঙখ কোণ সমকোণ বলিয়া, কছখ কোণও সমকোণ। [১ম, ৩৪

এই রূপে উপপন্ন করা যাইতে পারে যে, জ, ট, চ বিন্দুস্থ কোণগুলি সমকোণ ;

অতএব ছজটচ চতুর্ভুজ সমকোণবিশিষ্ট,

এবং পূর্ব্বে উপপন্ন হইয়াছে যে, ইহা সমবাহু,

এই হেতু ইহা সমচতুর্ভুজ এবং কখগঘ বৃত্তের উপর অঙ্কিত হইয়াছে। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—১৩। বৃত্তের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ সেই বৃত্তের অন্তর্গত সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ ও তাহার ব্যাসার্দ্ধের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের চতুর্গুণ।

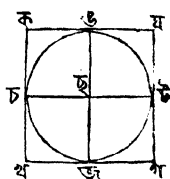
১৪। প্রমাণ কর যে, সমচতুর্ভুজ ব্যতীত অপর কোন সমকোণবিশিষ্ট সমান্তর ক্ষেত্র বৃত্তের উপর অঙ্কিত করা যাইতে পারে না।

৮ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

একটী বৃত্ত কোন নির্দ্দিষ্ট সমচতুর্ভুজ ক্ষেত্রের অন্তর্গত করিতে হইবে।

কখগঘ নির্দ্দিষ্ট সমচতুর্ভুজ। একটী বৃত্ত কখগঘ সমচতুর্ভুজের অন্তর্গত করিতে হইবে।

কখ এবং কঘ বাহুকে ক্রমে চ এবং ঙ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর ; [১ম, ১০।

এবং ঙ বিন্দু দিয়া ঙজ সরল রেখা কখ অথবা ঘগ রেখার সমান্তর করিয়া টান ; এবং চ বিন্দু দিয়া চট রেখা কঘ অথবা খগ রেখার সমান্তর করিয়া টান ; [১ম, ৩১।

তাহা হইলে কট, টখ, কজ, জঘ, কছ, ছগ, খছ, ছঘ প্রত্যেকেই সমান্তর ক্ষেত্র হইল ;

অতএব তাহাদের সম্মুখস্থ বাহু পরস্পর সমান। [১ম, ৩৪।

আর কঘ, কখ পরস্পর সমান হওয়াতে, [১ম, সং ৩০।

এবং কঙ, কঘ রেখার অর্দ্ধ ; ও কচ, কখএর অর্দ্ধ বলিয়া, [অঙ্কন।

কঙ রেখা কচএর সমান। [স্বতঃ ৭।

অতএব এই দুই ভুজের সম্মুখস্থ ভুজদ্বয় সমান, অর্থাৎ চছ, ছঙর সমান ; [১ম, ৩৪।

এই রূপে ইহাও উপপন্ন করা যাইতে পারে যে, ছজ, ছট প্রত্যেকে ছঙ অথবা ছচএর সমান ;

অতএব ছঙ, ছচ, ছজ, ছট এই চারি রেখা পরস্পর সমান ; তাহা হইলে ছকে কেন্দ্র করিয়া এই চারি রেখার কোন একটীর প্রান্ত দিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে সেই বৃত্ত অপর তিনটী রেখারও প্রান্ত দিয়া যাইবে এবং কখ, খগ, গঘ, ও ঘক রেখাকে স্পর্শ করিবে, কেননা, ঙ, চ, জ, ট বিন্দুস্থ কোণ প্রত্যেকে সম কোণ ; এবং ব্যাসের প্রান্ত হইতে

উহার সহিত সম কোণ করিয়া রেখা টানিলে সেই রেখা বৃত্তকে স্পর্শ করে। [৩য়, ১৬। অনু।

এই হেতু কখ, খগ, গঘ, ঘক এই চারি সরল রেখা প্রত্যেকে বৃত্ত স্পর্শ করিতেছে; অতএব এই বৃত্তটী কখগঘ সমচতুর্ভুজের অন্তর্গত করা হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্র—১৫। একটী বৃত্ত কোন নির্দ্দিষ্ট রম্বসের অন্তর্গত করিতে হইবে।

৯ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দ্দিষ্ট সমচতুর্ভুজের উপর একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখগঘ নির্দ্দিষ্ট সমচতুর্ভুজ। একটী বৃত্ত কখগঘ সমচতুর্ভুজের উপর অঙ্কিত করিতে হইবে।

কগ, খঘ সংযুক্ত কর; তাহাদের সম্পাত বিন্দু যেন ঙ হইল;

কখ রেখা কঘএর সমান বলিয়া,

এবং কগ রেখা কখগ ও কঘগ ত্রিভুজের সামান্য বা হওয়ায়,

খক, কগ এই দুই বাহু ক্রমে ঘক, কগ বাহুর সমান, এ খগ ভূমি ঘগ ভূমির সমান,

অতএব খকগ কোণ ঘকগ কোণের সমান, [১ম, ৮

তাহা হইলে খকঘ কোণ কগ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড হইল

এই রূপে উপপন্ন করা যাইতে পারে যে, কখগ, খগঘ এবং গঘক কোণ ক্রমে খঘ, গক এবং ঘখ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড হইয়াছে।

আবার ঘকখ কোণ কখগ কোণের সমান,

এবং ঙকখ কোণ ঘকখ কোণের অর্দ্ধ,

এবং ঙখক কোণ কখগ কোণের অর্দ্ধ,

এই হেতু ঙকখ কোণ ঙখক কোণের সমান; [স্বতঃ ৭।

অতএব ঙক বাহু ঙখ বাহুর সমান। [১ম, ৬।

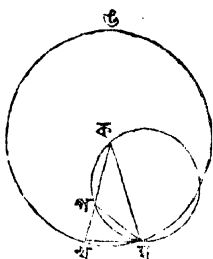
এই রূপে উপপন্ন করা যাইতে পারে যে, ঙগ, ঙঘ সরল রেখা প্রত্যেকে ঙক অথবা ঙখ রেখার সমান;

সুতরাং ঙক, ঙখ, ঙগ, ঙঘ এই চারি সরল রেখা পরস্পর সমান। অতএব ঙকে কেন্দ্র করিয়া এই চারি রেখার কোন একটীর প্রান্ত দিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে সেই বৃত্ত অপর তিন রেখার প্রান্ত দিয়া যাইবে এবং কখগঘ সমচতুর্ভুজের উপর অঙ্কিত হইবে। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্র—১৬। কোন নির্দ্দিষ্ট আয়ত ক্ষেত্রের উপর একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

১০ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

এমন একটী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার ভূমিস্থ দুই কোণ প্রত্যেকে শৃঙ্গস্থ কোণের দ্বিগুণ হয়।

কখ সরল রেখা টান এবং ঐ সরল রেখা গ বিন্দুতে এরূপে ভাগ কর, যাহাতে কখ এবং খগএর অন্তর্গত আয়ত কগ রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হয়; [২য়, ১১।

পরে ক কেন্দ্র হইতে কখ রেখার প্রান্ত দিয়া খঘঙ বৃত্ত অঙ্কিত কর, এবং তাহাতে ব্যাসের অনধিক কগ রেখার সমান খঘ রেখা স্থাপিত কর। [৪থ, ১।

ঘক সংযুক্ত কর। কখঘ সম্পাদ্য ত্রিভুজ; অর্থাৎ এই ত্রিভুজের কখঘ, কঘখ কোণ প্রত্যেকে তৃতীয় কোণ খকঘএর দ্বিগুণ হইবে।

গঘ সংযুক্ত কর; এবং কগঘ ত্রিভুজের উপর কগঘ বৃত্ত অঙ্কিত কর। [৪থ, ৫।

কখ এবং খগএর অন্তর্গত আয়ত কগ রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান বলিয়া, [অঙ্কন।

এবং কগ রেখা খঘএর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন।

কখ ও খগএর আয়ত খঘএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান। আর কগঘ বৃত্তের বহিস্থ খ বিন্দু হইতে পরিধি পর্য্যন্ত খক, খঘ দুইটী সরল রেখা টানা গিয়াছে; তন্মধ্যে একটী বৃত্তকে ছেদ করিয়াছে ও অন্যটী বৃত্তেতে সংলগ্ন হইয়াছে, এবং সমুদয় ছেদক রেখা কখ ও বৃত্ত বহিস্থ অংশ খগ এই দুইএর অন্তর্গত আয়ত, সংলগ্ন খঘ

রেখার উপর সমচতুর্ভুজের সমান হওয়াতে, খঘ সরল রেখা কগঘ বৃত্ত স্পর্শ করিতেছে। [৩য়, ৩৭।

আর খঘ রেখা বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে এবং স্পর্শ-বিন্দু ঘ হইতে ঘগ রেখা টানা হইয়াছে বলিয়া,
খঘগ কোণ বৃত্তের অপর খণ্ডস্থ ঘকগ কোণের সমান।
[৩য়, ৩২।
এই দুই সমান কোণে গঘক কোণ যোগ কর ;
তাহা হইলে সমুদয় খঘক কোণ গঘক এবং ঘকগ এই দুই কোণের সমান হইবে। [স্বতঃ ২।
কিন্তু বহিস্থ খগঘ কোণ গঘক এবং ঘকগ এই দুই কোণের সমান। [১ম, ৩২।
সুতরাং খঘক কোণ খগঘ কোণের সমান। [স্বতঃ ১।
আর কঘ, কখ দুই বাহু সমান হওয়াতে,
খঘক কোণ ঘখক কোণের সমান। [১ম, ৫।
অতএব খঘক, ঘখক এই দুই কোণের প্রত্যেকেই খগঘ কোণের সমান। [স্বতঃ ১।
আবার ঘখগ কোণ খগঘ কোণের সমান বলিয়া,
খঘ বাহু গঘ বাহুর সমান ; [১ম, ৬।
কিন্তু খঘ রেখা গকএর সমান করিয়া অঙ্কিত হইয়াছে,
এই হেতু গক রেখা গঘএর সমান, [স্বতঃ ১।
তন্নিমিত্ত গকঘ কোণ গঘক কোণের সমান। [১ম, ৫।
অতএব গকঘ, গঘক দুই কোণ একত্রে গকঘ কোণের দ্বিগুণ,
এবং খগঘ কোণ, খঘক ও ঘখক এই দুইএর প্রত্যেকের সমান উপপন্ন হইয়াছে ;

এই হেতু খঘক, ঘখক প্রত্যেকে ঘকখ কোণের দ্বিগুণ।

অতএব কখঘ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এরূপে অঙ্কিত হইয়াছে যে, ভূমিস্থ দুই কোণ প্রত্যেকে তৃতীয় কোণের দ্বিগুণ। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্র—১৭। এক সমকোণকে সমান পাঁচ অংশে বিভাগ করিতে হইবে।

১৮। কোন বৃত্তপরিধিকে সমান দশ অংশে বিভাগ করিতে হইবে।

১৯। এক সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট দশভুজ ক্ষেত্র কোন বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে।

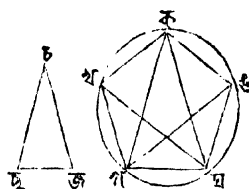
১১ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

একটী সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চভুজ ক্ষেত্র কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে।

কখগঘঙ নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত; একটী সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চভুজ ক্ষেত্র কখগঘঙ বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে।

চছজ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এরূপ করিয়া অঙ্কিত কর, যাহাতে ছ এবং জ বিন্দুস্থ কোণ প্রত্যেকে চ বিন্দুস্থ কোণের দ্বিগুণ হয়। [৪থ, ১০।

চছজ ত্রিভুজের কোণের সমান কোণ বিশিষ্ট করিয়া কগঘ ত্রিভুজ কখগঙঘ বৃত্তের অন্তর্গত কর, যেন ক বিন্দুস্থ কোণ চ কোণের এবং গ ও ঘ বিন্দুস্থ কোণ প্রত্যেকে ছ অথবা জ কোণের সমান হয়; [৪থ, ২।

অতএব কগঘ ও কঘগ কোণ প্রত্যেকে গকঘ কোণের দ্বিগুণ। কগঘ এবং কঘগ এই দুই কোণকে ক্রমে গঙ, ঘখ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড কর; [১ম, ৯।

এবং কখ, খগ, কঙ, ঙঘ সংযুক্ত কর। কখগঘঙ সম্পাদ্য পঞ্চভুজ।

কগঘ, কঘগ প্রত্যেকে গকঘ কোণের দ্বিগুণ, এবং যথাক্রমে গঙ, ঘখ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড হইয়াছে বলিয়া,

কঘখ, খঘগ, গকঘ, ঘগঙ, ঙগক এই পাঁচ কোণ পরস্পর সমান।

আবার সমান সমান কোণ সমান সমান চাপের উপর থাকে, [৩য়, ২৬।

অতএব কখ, খগ, গঘ, ঘঙ, ঙক এই পাঁচ চাপ পরস্পর সমান।

আর সমান সমান চাপের সম্মুখস্থ সরল রেখা সমান, [৩য়, ২৯।

এই হেতু কখ, খগ, গঘ, ঘঙ, ঙক এই পাঁচ রেখা পরস্পর সমান।

অতএব কখগঘঙ পঞ্চভুজ সমবাহু হইল।

আর ইহা সমান কোণ বিশিষ্ট;

কারণ কখ চাপ ঘঙ চাপের সমান,

তাহাদের প্রত্যেকে খগঘ চাপ যোগ কর;

তাহা হইলে সমস্ত কখগঘ চাপ, ঙঘগখ চাপের সমান।

[স্বতঃ ২।

আর কঙঘ কোণ কখগঘ চাপের এবং খকঙ কোণ খগঘঙ চাপের উপরিস্থ হওয়াতে,

কঙঘ কোণ খকঙ কোণের সমান। [৩য়, ২৭।

এই রূপে কখগ, খগঘ, গঘঙ প্রত্যেকে কঙঘ অথবা খকঙ কোণের সমান উপপন্ন হইবে।

অতএব কখগঘঙ পঞ্চভুজ সমান কোণ বিশিষ্ট,

এবং পূর্ব্বে সপ্রমাণ হইয়াছে যে, ইহা সমবাহু।

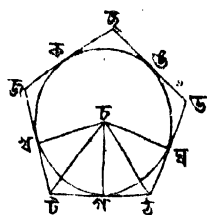
অতএব একটী সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চভুজ নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্গত করা হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্র—১০। নিয়মিত পঞ্চভুজ ক্ষেত্রের প্রত্যেক কর্ণরেখা যে ভুজের সহিত সংলগ্ন না হয়, তাহার সমান্তর হইবে।

১২ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

একটী সমবাহু এবং সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চভুজ ক্ষেত্র কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের উপর অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখগঘঙ নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত। একটী সমবাহু এবং সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চভুজ কখগঘঙ বৃত্তের উপর অঙ্কিত করিতে হইবে।

পূর্ব্ব প্রতিজ্ঞা দ্বারা একটী পঞ্চভুজ বৃত্তের অন্তর্গত করিলে যেন তাহার কোণ গুলি ক, খ, গ, ঘ, ঙ, বিন্দুতে হইল ; তাহা হইলে কখ, খগ, গঘ, ঘঙ, ঙক এই পাঁচ চাপ পরস্পর সমান হইবে। ক, খ, গ, ঘ, ঙ, বিন্দু দিয়া ছজ, জট, টঠ, ঠড, ডছ, বৃত্ত স্পর্শক রেখা টান। [৩য়, ১৭।

ছজটঠড ক্ষেত্র সম্পাদ্য পঞ্চভুজ।

চ কেন্দ্র নির্দ্দেশ করিয়া চখ, চট, চগ, চঠ, চঘ সংযুক্ত কর। টঠ রেখা কখগঘঙ বৃত্ত স্পর্শ করিতেছে এবং কেন্দ্র হইতে স্পর্শ বিন্দু পর্য্যন্ত চগ রেখা টানা হইয়াছে বলিয়া, চগ রেখা টঠএর উপর লম্ব, [৩য়, ১৮।

অতএব গ বিন্দুস্থ প্রত্যেক কোণ সম কোণ ;

এই কারণে খ এবং ঘ বিন্দুস্থ কোণ গুলি প্রত্যেকে সম কোণ। আর চগট কোণ সম কোণ বলিয়া, চট রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ চগ ও টগ রেখার উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান ; [১ম, ৪৭।

এই রূপে চট রেখার উপর সমচতুর্ভুজ চখ ও খট রেখার উপর সমচতুর্ভুজদ্বয়ের সমান ;

অতএব চগ, গট রেখার উপর সমচতুর্ভুজ চখ, খট রেখার উপর সমচতুর্ভুজের সমান ; [স্বতঃ। ১।

তাহার মধ্যে চগএর উপর সমচতুর্ভুজ চখএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান,

সুতরাং অবশিষ্ট গট এবং খটএর উপর সমচতুর্ভুজদ্বয় পরস্পর সমান; [স্বতঃ ৩।

অতএব গট রেখা খট রেখার সমান;

আবার চখ রেখা চগএর সমান,

এবং চট রেখা চখট, চগট এই দুই ত্রিভুজের সামান্য বাহু হওয়াতে,

খচ, চট দুই বাহু ক্রমে গচ ও চট বাহুর সমান;

আর উপপন্ন হইয়াছে যে, খট ভূমি গট ভূমির সমান,

অতএব খচট কোণ গচট কোণের সমান; [১ম, ৮।

এবং খটচ কোণ গটচ কোণের সমান; [১ম, ৪

সুতরাং খচগ কোণ গচট কোণের দ্বিগুণ,

এবং খটগ কোণ গটচ কোণের দ্বিগুণ।

এই রূপে গচঘ কোণ গচঠ কোণের দ্বিগুণ,

এবং গঠঘ কোণ গঠচ কোণের দ্বিগুণ উপপন্ন হইবে।

আবার খগ চাপ গঘ চাপের সমান বলিয়া,

খচগ কোণ গচঘ কোণের সমান; [৩য়, ২৭।

এবং খচগ কোণ টচগ কোণের দ্বিগুণ ও গচঘ কোণ গচঠ কোণের দ্বিগুণ;

অতএব গচট কোণ গচঠ কোণের সমান; [স্বতঃ ৭।

এবং চগট সম কোণ চগঠ সম কোণের সমান;

অতএব চগট, চগঠ এই দুই ত্রিভুজের মধ্যে একটীর দুই কোণ ক্রমে অন্যটীর দুই কোণের সমান,

এবং সমান সমান কোণ সংলগ্ন গচ রেখা দুই ত্রিভুজের সামান্য বাহু,

এই হেতু অন্যান্য বাহুও ক্রমে পরস্পর সমান,
এবং একের তৃতীয় কোণ অন্যের তৃতীয় কোণের সমান,
অতএব গট রেখা গঠ রেখার সমান এবং চটগ কোণ চঠগ কোণের সমান। [১ম, ২৬।
আর টগ রেখা ঠগএর সমান হওয়াতে টঠ রেখা টগএর দ্বিগুণ।
এই রূপে উপপন্ন করা যাইতে পারে যে, জট রেখা খটএর দ্বিগুণ।
আর পূর্ব্বে সপ্রমাণ হইয়াছে যে, খট রেখা গটএর সমান;
এবং জট, খটএর দ্বিগুণ ও টঠ, টগএর দ্বিগুণ হওয়াতে,
জট রেখা টঠ রেখার সমান। [স্বতঃ ৬।
এই রূপে প্রমাণ করা যাইতে পারে যে, ছজ, ছড, ডঠ প্রত্যেকে জট অথবা টঠ রেখার সমান;
অতএব ছজটঠড পঞ্চভুজ সমবাহু।
অপর ইহা সমান কোণ বিশিষ্ট;
কেননা চটগ কোণ চঠগ কোণের সমান বলিয়া,
আর জটঠ কোণ চটগ কোণের দ্বিগুণ এবং টঠড কোণ চঠগ কোণের দ্বিগুণ উপপন্ন হওয়াতে,
জটঠ কোণ টঠড কোণের সমান। [স্বতঃ ৬।
এই রূপে টজছ, জছড, ছডঠ প্রত্যেকে জটঠ অথবা টঠড কোণের সমান উপপন্ন হইবে।

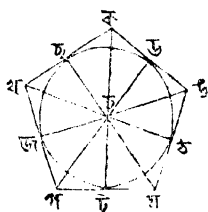
অতএব ছজটঠড পঞ্চভুজ সমান কোণ বিশিষ্ট ও ইহা যে সমবাহু, তাহা উপপন্ন হইয়াছে এবং কখগঘঙ বৃত্তের উপর অঙ্কিত হইয়াছে। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—২১। কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর এক সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চভুজ ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

১৩ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

একটী বৃত্ত কোন সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চভুজের অন্তর্গত করিতে হইবে।

কখগঘঙ কোন সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চভুজ; একটী বৃত্ত কখগঘঙ পঞ্চভুজের অন্তর্গত করিতে হইবে।

খগঘ এবং গঘঙ কোণ ক্রমে গচ এবং ঘচ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড কর; [১ম, ৯। এবং ঐ দুই রেখার সম্পাত বিন্দু চ হইতে চখ, চক, চঙ রেখা টান।

খগ রেখা গঘএর সমান বলিয়া, [কল্পনা।
এবং চগ রেখা চখগ ও চঘগ এই দুই ত্রিভুজের সামান্য ভুজ হওয়াতে,
খগ এবং গচ বাহু ক্রমে ঘগ এবং গচ বাহুর সমান,
এবং খগচ কোণ ঘগচ কোণের সমান; [অঙ্কন।
অতএব খচ ভূমি ঘচ ভূমির সমান;
এবং সমান সমান বাহুর সম্মুখস্থ অন্যান্য কোণও ক্রমে সমান; [১ম, ৪।

সুতরাং গখচ কোণ গঘচ কোণের সমান।

আর গঘঙ কোণ গঘচ কোণের দ্বিগুণ বলিয়া,

এবং গঘঙ কোণ গখক কোণের সমান ও গঘচ কোণ গখচ কোণের সমান হওয়াতে,

গখক কোণ গখচ কোণের দ্বিগুণ,

অতএব কখগ কোণ খচ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড হইয়াছে।

এই রূপে সপ্রমাণ হইবে যে, খকঙ এবং কঙঘ কোণ ক্রমে কচ এবং ঙচ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড হইয়াছে।

চ বিন্দু হইতে কখ, খগ, গঘ, ঘঙ, ঙক রেখার উপর চছ, চজ, চট, চঠ, চড লম্ব টান। [১ম, ১২।

চগজ কোণ চগট কোণের সমান বলিয়া,

এবং চজগ সম কোণ চটগ সম কোণের সমান হওয়াতে,

চজগ, চটগ এই দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের দুইটী কোণ ক্রমে অন্যের দুইটী কোণের সমান;

এবং প্রত্যেকের সমান সমান কোণের সম্মুখস্থ চগ রেখা উভয়েরই সামান্য বাহু;

এই হেতু তাহাদের অন্যান্য বাহুও ক্রমে সমান;

অতএব চজ লম্ব চট লম্বের সমান। [১ম, ২৬।

এই রূপে চঠ, চড, চছ প্রত্যেকে চজ অথবা চট রেখার সমান উপপন্ন হইবে;

অতএব চছ, চজ, চট, চঠ, চড এই পাঁচ রেখা পরস্পর সমান, তাহা হইলে চ বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এই পাঁচটী রেখার কোন একটীর প্রান্ত দিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে সেই বৃত্ত অপর চারিটী রেখারও প্রান্ত দিয়া যাইবে;

এবং ইহা কখ, খগ, গঘ, ঘঙ এবং ঙক রেখা স্পর্শ করিবে, কেননা ছ, জ, ট, ঠ এবং ড বিন্দুস্থ কোণ সকল প্রত্যেকেই সম কোণ, [অঙ্কন।

আর ব্যাসের প্রান্ত হইতে লম্ব টানিলে, তাহা বৃত্ত স্পর্শ করে; [৩য়, ১৬।

এই হেতু কখ, খগ, গঘ, ঘঙ, ঙক প্রত্যেকেই বৃত্ত স্পর্শ করিতেছে।

অতএব একটী বৃত্ত, সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট কখগঘঙ পঞ্চভুজের অন্তর্গত করা হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

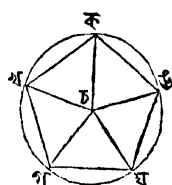
অঃ প্রঃ—২২। একটী নিয়মিত পঞ্চভুজ ক্ষেত্রের পাঁচটী কর্ণ রেখা টানিলে অর্থাৎ একান্তর কৌনিক বিন্দু গুলি যোগ করিয়া দিলে, তাহাদের সম্পাত দ্বারা যে ক্ষেত্র উৎপন্ন হইবে, তাহাও একটী নিয়মিত পঞ্চভুজ ক্ষেত্র।

১৪ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দ্দিষ্ট সমবাহু এবং সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চভুজ ক্ষেত্রের উপর একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখগঘঙ নির্দ্দিষ্ট সমবাহু এবং সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চভুজ; ইহার উপর একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে

খগঘ, গঘঙ এই দুই কোণ ক্রমে গচ এবং ঘচ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড কর; [১ম, ৯।

এবং তাহাদের সম্পাত বিন্দু চ হইতে চখ, চক, চঙ রেখা টান।

পূর্ব্ব প্রতিজ্ঞার ধারানুসারে উপপন্ন হইবে যে, গখক, খকঙ, কঙঘ কোণ খচ, কচ, ঙচ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড হইয়াছে।

খগঘ কোণ গঘঙ কোণের সমান বলিয়া,
এবং চগঘ কোণ খগঘ কোণের অর্দ্ধ,
ও চঘগ কোণ গঘঙ কোণের অর্দ্ধ হওয়াতে,
চগঘ কোণ চঘগ কোণের সমান; [স্বতঃ ৭।
অতএব চগ বাহু চঘ বাহুর সমান। [১ম, ৬।

এই রূপে উপপন্ন করা যাইতে পারে যে, চখ, চক, চঙ প্রত্যেকে চগ অথবা চঘএর সমান;
অতএব চক, চখ, চগ, চঘ, চঙ এই পাঁচ রেখা পরস্পর সমান; তাহা হইলে চকে কেন্দ্র করিয়া এই পাঁচটীর কোন একটীর প্রান্ত দিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, তাহা অপর চারিটী রেখার প্রান্ত দিয়া যাইবে, এবং সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট কখগঘঙ পঞ্চভুজের উপর অঙ্কিত হইবে।
এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

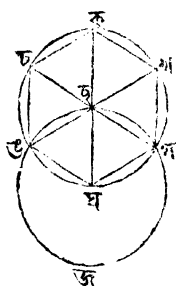
অঃ প্রঃ—২৩। যদি নির্দ্দিষ্ট পঞ্চভুজের ক এবং গ বিন্দু আর খ এবং ঘ বিন্দু সংযুক্ত করা যায় এবং ছ বিন্দুতে এই দুই রেখার সম্পাত হয়, তবে ক, ছ, ঘ বিন্দু দিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, উহা কখ এবং গঘ রেখা স্পর্শ করিবে।

১৫ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

একটী সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট ষড়্ভুজ ক্ষেত্র কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে।

কখগঘঙচ কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত; এক সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট ষড়্ভুজ ইহার অন্তর্গত করিতে হইবে।

কখগঘঙচ বৃত্তের ছ কেন্দ্র নির্দ্দেশ কর এবং কছঘ ব্যাস টান; [৩য়, ১।

ঘ বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ঘছ রেখার প্রান্ত দিয়া ছঙজগ বৃত্ত অঙ্কিত কর। ঙছ, গছ সংযুক্ত কর ও এই দুই রেখাকে খ এবং চ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর; আর কখ, খগ, গঘ, ঘঙ, ঙচ, চক সংযুক্ত করিয়া দাও। কখগঘঙচ সম্পাদ্য ষড়্ভুজ।

ছ বিন্দু কখগঘঙচ বৃত্তের কেন্দ্র হওয়াতে ছঙ রেখা ছঘ রেখার সমান;

আবার ঘ বিন্দু ছঙজ বৃত্তের কেন্দ্র বলিয়া ঘঙ রেখা ঘছ রেখার সমান;

সুতরাং ছঙ রেখা ঘঙ রেখার সমান, [স্বতঃ ১।

এবং ঙছঘ ত্রিভুজ সমবাহু;

অতএব ঙছঘ, ছঘঙ, ঘঙছ কোণ পরস্পর সমান,

[১ম, ৫, অনু।

কিন্তু ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সম কোণের

সমান; [১ম, ৩২।
অতএব ঙছঘ দুই সম কোণের তৃতীয়াংশ।

এই রূপে ঘছগ কোণ দুই সম কোণের তৃতীয়াংশ উপপন্ন হইবে।

আর ছগ রেখা ছ বিন্দুতে ঙখ রেখার সহিত সংলগ্ন হওয়াতে ঙছগ এবং গছখ কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান, [১ম, ১৩।
এই হেতু অবশিষ্ট গছখ কোণ দুই সম কোণের তৃতীয়াংশ।
অতএব ঙছঘ, ঘছগ, গছখ কোণ পরস্পর সমান;
এবং তাহাদের সম্মুখস্থ খছক, কছচ, চছঙ কোণও তাহাদের সমান; [১ম, ১৫।
অতএব ঙছঘ, ঘছগ, গছখ, খছক, কছচ, চছঙ এই ছয় কোণ পরস্পর সমান।
কিন্তু কেন্দ্রস্থ সমান সমান কোণ সমান সমান চাপের উপর থাকে; [৩য়, ২৬।
অতএব ঙঘ, ঘগ, গখ, খক, কচ, চঙ এই ছয় চাপ পরস্পর সমান,
এবং সমান সমান চাপের সম্মুখস্থ সরল রেখাও সমান; [৩য়, ২৯।
অতএব এই ছয়টী সরল রেখা পরস্পর সমান; তাহা হইলে ষড়্‌ভুজ ক্ষেত্রটী সমবাহু।
আর ইহা সমান কোণ বিশিষ্টও বটে;
কেননা, কচ চাপ ঙঘ চাপের সমান হওয়াতে,

উহাদের প্রত্যেকের সহিত কখগঘ চাপ যোগ করিলে, সমুদয় চকখগঘ চাপ সমুদয় কখগঘঙ চাপের সমান হইবে। [স্বতঃ ২।

আর চঙঘ কোণ চকখগঘ চাপের উপরিস্থিত,
এবং ঙচক কোণ কখগঘঙ চাপের উপরিস্থিত বলিয়া,
চঙঘ কোণ কচঙ কোণের সমান। [৩য়, ২৭।

এই রূপে উপপন্ন করা যাইতে পারে যে, ষড়্‌ভুজের অন্যান্য কোণগুলি প্রত্যেকে চঙঘ বা কচঙ কোণের সমান;

সুতরাং এই ষড়্‌ভুজ সমান কোণ বিশিষ্ট; এবং ইহা যে সমবাহু, তাহা পূর্ব্বে প্রতিপন্ন হইয়াছে; আর ইহা কখগঘঙচ বৃত্তের অন্তর্গত হইয়াছে। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অনুমান। বৃত্তের অন্তর্গত সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট ষড়্‌ভুজের একটা বাহু ঐ বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের সমান।

যদি ক, খ, গ, ঘ, ঙ, চ বিন্দু দিয়া বৃত্তের স্পর্শক রেখা টানা যায়, তাহা হইলে পঞ্চভুজ অঙ্কনের ন্যায় বৃত্তের উপর ষড়্‌ভুজও অঙ্কিত হইবে।

আবার পঞ্চভুজ সম্বন্ধে যে প্রণালী অবলম্বন করা গিয়াছে, তদনুসারে বৃত্তকে ষড়্‌ভুজের অন্তর্গত ও উপর অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

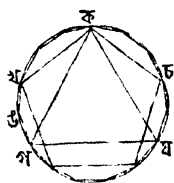
অঃ প্রঃ—২৪। প্রমাণ কর যে, নিয়মিত ষড়্‌ভুজের কোন একটা ভুজের উপর সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিলে ষড়্‌ভুজটী ত্রিভুজের ছয় গুণ হইবে।

১৫। যদি এই প্রতিজ্ঞার চিত্রে কঙ, ঙগ, গক সংযুক্ত করা যায়, তাহা হইলে কঙগ এক সমবাহু ত্রিভুজ হইবে; এবং ক, ঙ, গ বিন্দু দিয়া স্পর্শক রেখা টানিলে বৃত্তের উপর এক সমবাহু ত্রিভুজ হইবে।

১৬ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

একটী সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চদশভুজ ক্ষেত্র কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে।

কখগঘ নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত; একটী সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চদশভুজ কখগঘ বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে।

কগ যেন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্গত এক সমবাহু ত্রিভুজের বাহু, [৪র্থ, ২।
আর কখ নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্গত সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চভুজের বাহু, [৪র্থ, ১১।
অতএব সমুদয় কখগঘচ পরিধি পঞ্চদশ সমান ভাগে বিভক্ত হইলে, কখগ চাপ পরিধির তৃতীয়াংশ হওয়াতে এই চাপে তাহার পাঁচ ভাগ, এবং কখ চাপ সমুদয়ের পঞ্চমাংশ বলিয়া ইহাতে তিন ভাগ থাকিবে;
এই হেতু কখগ এবং কখ চাপের অন্তর খগ চাপে, দুই ভাগ থাকিবে।
খগ চাপ ঙ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর, [৩য়, ৩০।

তাহা হইলে খঙ, ঙগ চাপ প্রত্যেকে সমুদয় পরিধির পঞ্চ দশ অংশ হইবে।

অতএব খঙ, ঙগ রেখা টানিয়া এবং তাহাদের সমান সমান সরল রেখা সমস্ত পরিধি ব্যাপ্ত করিয়া বৃত্ত মধ্যে স্থাপিত করিলে, [৪থ, ১।

এক সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চদশভুজ বৃত্তের অন্তর্গত করা হইবে। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

পঞ্চদশভুজ বৃত্তের অন্তর্গত করাতে পরিধি যে যে বিন্দুতে বিভক্ত হইয়াছে, সেই সকল বিন্দু দিয়া যদি বৃত্তের স্পর্শক রেখা টানা যায়, তাহা হইলে পঞ্চভুজ অঙ্কনের ন্যায় বৃত্তের উপর পঞ্চদশভুজও অঙ্কিত হইবে আবার পঞ্চভুজ সম্বন্ধে যে প্রণালী অবলম্বন করা গিয়াছে তদনুসারে বৃত্তকে পঞ্চদশভুজের অন্তর্গত ও উপর অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

অঃ প্রঃ—২৬। যদি নিয়মিত পঞ্চদশভুজের কোন একটী কোণ হইতে তাহার সম্মুখস্থ বাহুর প্রান্তদ্বয় পর্য্যন্ত দুইটী রেখা টানা যায়, তবে এই দুইটী রেখার অন্তর্গত কোণ চারি সম কোণের ত্রিংশত্তম অংশ হইবে।

২৭। কোন বৃত্তের অন্তর্গত সমবাহু ত্রিভুজের একটী ভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ঐ বৃত্তের অন্তর্গত ষড়্ভুজের একটী ভুজের উপর বর্গক্ষেত্রের তিন গুণ।

২৮। বৃত্তের অন্তর্গত সমবাহু ত্রিভুজের তিনটী কৌণিক বিন্দু দিয়া স্পর্শক রেখা টানিলে তাহাদের সম্পাত দ্বারা যে ত্রিভুজ হইবে, তাহা সমবাহু ও বৃত্তের অন্তর্গত ত্রিভুজের চতুর্গুণ

২৯। কোন চতুর্ভুজের প্রত্যেক ভুজ ও তৎসংলগ্ন দুইটী বর্দ্ধিত ভুজ স্পর্শ করে এরূপ চারিটী বৃত্ত অঙ্কিত হই

য়াছে; প্রমাণ কর যে, ঐ চারিটী বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া অপর একটী বৃত্ত অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

৩০। একটী বৃত্ত এক সমকোণী ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত ও আর একটী বৃত্ত তাহার অন্তর্গত করিলে উহাদের ব্যাসের সমষ্টি সম কোণের দুই পার্শ্বস্থ বাহুর সমষ্টির সমান হইবে।

৩১। যদি সমবাহু ত্রিভুজের শৃঙ্গ হইতে ভূমির উপর লম্ব পাত করা যায় ও ভূমিকে ব্যাস স্বরূপ লইয়া একটী বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়, তবে লম্বটী বৃত্তের অন্তর্গত সমবাহু ত্রিভুজের একটী ভুজের সমান হইবে।

৩২। একটী বর্গক্ষেত্র ও একটী বৃত্ত কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তপাদের অন্তর্গত করিতে হইবে।

৩৩। ত্রিভুজের কোন একটী ভুজ ও অপর দুইটী বর্দ্ধিত ভুজ স্পর্শ করে, এরূপ বৃত্তের কেন্দ্র স্থির কর এবং প্রমাণ কর যে, এই প্রকারে অঙ্কিত দুইটী বৃত্তের কেন্দ্রযোজক রেখা, এবং ত্রিভুজের বৃত্তদ্বয় মধ্যবর্ত্তী কৌণিক বিন্দুর ও ত্রিভুজের অন্তর্গত বৃত্তের কেন্দ্রের যোজক রেখা, এই দুইটী পরস্পর লম্ব।

৩৪। বৃত্তের অন্তর্গত ত্রিভুজের একটী কোণ দ্বিখণ্ড করিলে, দ্বিখণ্ডকারক রেখা যে বিন্দুতে পরিধি ছেদ করে, তাহা সম্মুখস্থ বাহুর দুই প্রান্ত ও বৃত্তের কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্ত্তী।

৩৫। কখগঘ একটী আয়ত ক্ষেত্র; যদি কখগ ত্রিভুজের অন্তর্গত বৃত্ত, ঙ এবং চ বিন্দুতে কখ, খগ বাহু স্পর্শ করে এবং ঙছজ, চছট এই দুই রেখা কঘ এবং গঘ রেখার সমান্তর টানা যায়, তাহা হইলে টজ আয়ত কচজ শঙ্কুর সমান হইবে।

৩৬। একটী কর্ণ রেখার উপর যতগুলি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত হইতে পারে, তাহাদের অন্তর্গত বৃত্তগুলির কেন্দ্র দ্বারা যে রেখা উৎপন্ন হয়, তাহা কর্ণ রেখার উপর অঙ্কিত বৃত্তের পরিধিপাদ হইবে।

৩৭। কখগ ত্রিভুজের ক কোণ যদি কঘ রেখার দ্বারা দ্বিখণ্ড হয় এবং ত্রিভুজের অন্তর্গত বৃত্তের ঙ কেন্দ্র হইতে

ঙচ লম্ব খগ রেখার উপর পাত করা যায়, তবে খঙচ কোণ গঙঘ কোণের সমান।

৩৮। একটী বর্গক্ষেত্র কোন সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের অন্তর্গত করিতে হইবে।

৩৯। এমন একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যে, উহা দুইটী নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায় ও কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত স্পর্শ করে। প্রমাণ কর যে, ঐ বিন্দুদ্বয় হইতে নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের বহির্দ্দিকে যত রেখা টানা যাইতে পারে, তন্মধ্যে বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শ বিন্দু যোজক দুইটী রেখার অন্তর্গত কোণ সর্ব্বাপেক্ষা বৃহত্তম।

৪০। বৃত্তের অন্তর্গত নিয়মিত ষড়্ভুজ ক্ষেত্র সেই বৃত্তের উপর অঙ্কিত ষড়্ভুজের তিন চতুর্থাংশ।

৪১। এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা কর্ণ স্বরূপ জ্ঞান করিয়া তাহার উপর এমন একটী রম্বস অঙ্কিত করিতে হইবে যে, তাহার দুইটী কোণের সমষ্টি অপর দুই কোণের দ্বিগুণ হয়। এক সম কোণকে কিরূপে সমান তিন খণ্ডে বিভক্ত করা যায়, তাহা ইহা দ্বারা প্রতিপন্ন কর।

৪২। শৃঙ্গস্থ কোণ, তাহার দ্বিখণ্ডকারক রেখা, এবং ভূমি ও অপর দুইটী ভুজ সমষ্টির অন্তর নির্দ্দিষ্ট আছে;— ত্রিভুজটী অঙ্কিত কর।

৪৩। স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূল কোণ হইতে ভূমি পর্য্যন্ত এমন একটী রেখা টানিতে হইবে, যাহার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, ভূমির দুই খণ্ডের অন্তর্গত আয়তের সমান হয়।

৪৪। সমবাহু ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত বৃত্তের ব্যাস তাহার অন্তর্গত বৃত্তের ব্যাসের দ্বিগুণ।

৪৫। ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত এবং উহার অন্তর্গত বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র সংযোজক রেখার দুই প্রান্ত হইতে কোন একটী কোণ পর্য্যন্ত রেখা টানিলে, যে কোণ উৎপন্ন হয়, তাহা ত্রিভুজের অপর দুই কোণের অন্তরের অর্দ্ধেক।

৪৬। ত্রিভুজের একটী কোণ ও অন্তর্গত বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ নির্দ্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজটী অঙ্কিত করিতে হইবে।

৪৭। ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ কোণ এবং অন্তর্গত ও উপর অঙ্কিত এই দুই বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ নির্দ্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজটী অঙ্কিত করিতে হইবে।

৪৮। কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের মধ্যে এমন আটটী বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহারা পরস্পর স্পর্শ করে এবং প্রত্যেকে নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত স্পর্শ করে।

৪৯। কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর একটী নিয়মিত অষ্টভুজ ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

৫০। কোন বৃত্তের অন্তর্গত ও উপর অঙ্কিত দুইটী সম-চতুর্ভুজের প্রত্যেকের এক একটী বাহু লইয়া, একটী আয়ত ক্ষেত্র অঙ্কিত করিলে, তাহা বৃত্তের অন্তর্গত নিয়মিত অষ্টভুজের সমান হইবে।

৫১। দুইটী সমান বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিয়াছে, ঐ দুইএর সাধারণ খণ্ডের অন্তর্গত করিয়া এক সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

৫২। কখগঘ চতুর্ভুজ কোন বৃত্তের অন্তর্গত করা গিয়াছে; কঘ, খগ বাহু বর্দ্ধিত হইয়া ঙ বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে; ঘঙ রেখার চ বিন্দু হইতে চজ রেখা ঙখএর সমান্তর করিয়া টান। ঐ রেখার উপর যেন জ বিন্দুতে গঘএর সম্পাত হইল; চখ সংযুক্ত কর; এই রেখা বৃত্ত পরিধিকে যেন ছ বিন্দুতে ছেদ করিল; তাহা হইলে ছজ রেখা বর্দ্ধিত করিলে পুনরায় পরিধিকে একটী অপরিবর্ত্তনীয় বিন্দুতে ছেদ করিবে।

৫৩। একটী সমবাহু ত্রিভুজ এরূপে কোন বর্গক্ষেত্রের অন্তর্গত করিতে হইবে, যেন ত্রিভুজের শৃঙ্গ একবার একটী ভুজের মধ্য বিন্দুতে ও পুনর্ব্বার উহা বর্গক্ষেত্রের একটী কোণে সংলগ্ন হয়।

৫৪। যত গুলি বর্গক্ষেত্র আর একটী নির্দ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের অন্তর্গত করিতে পারা যায়, তন্মধ্যে কোন্‌টী সর্ব্বাপেক্ষা লঘুতম?

৫৫। এমন একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহা

কোন নির্দ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের এক কোণ দিয়া যায় ও দুইটী ভুজ স্পর্শ করে।

৫৬। প্রমাণ কর যে, ৪র্থ অধ্যায়ের ১০ম প্রতিজ্ঞার চিত্রে অঙ্কিত কগ রেখা, বৃহৎ বৃত্তের অন্তর্গত নিয়মিত দশভুজ ক্ষেত্রের একটী ভুজের এবং ক্ষুদ্র বৃত্তের অন্তর্গত নিয়মিত পঞ্চভুজ ক্ষেত্রের একটী ভুজের সমান।

৫৭। যদি ঐ চিত্রের সগ রেখা চ বিন্দুতে বৃহৎ বৃত্ত পরিধি ছেদ করে, তবে কগচ কোণ খচগ কোণের তিনগুণ হইবে।

৫৮। যদি কখগঘঙ একটী নিয়মিত পঞ্চভুজ হয়, তবে কখঙ, খগক, গঘখ, ঘঙগ, ঙকঘ এই পাঁচ কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হইবে।

৫৯। একটী নির্দ্দিষ্ট নিয়মিত পঞ্চভুজের সমান, ও তুল্য উন্নতি বিশিষ্ট এক ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

৬০। যদি কোন নিয়মিত পঞ্চভুজের দুইটী কর্ণরেখা পরস্পর ছিন্ন করে, তবে ঐ দুইএর বৃহত্তর অংশগুলি প্রত্যেকে পঞ্চভুজ ক্ষেত্রের ভুজের সমান হইবে।

৬১। প্রমাণ কর যে, নিয়মিত ষড়্‌ভুজের সম্মুখস্থ ভুজ গুলি সমান্তর এবং যদি বৃত্তের অন্তর্গত ষড়্‌ভুজের কোন দুইটী ভুজ অপর দুইটী ভুজের সমান্তর হয়, তবে অবশিষ্ট দুইটী ভুজ সমান্তর হইবে।

৬২। একটী নিয়মিত ষড়্‌ভুজ কোন সমবাহু ত্রিভুজের অন্তর্গত করিতে হইবে। এই ষড়্‌ভুজ ও ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত স্থির কর।

৬৩। কোন বৃত্তের অন্তর্গত দ্বাদশভুজের ক্ষেত্রফল ঐ বৃত্তের অন্তর্গত সমবাহু ত্রিভুজের এক ভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান।

৬৪। কোন নিয়মিত বহুভুজের কখ, গঘ দুইটী একান্তর ভুজ বর্দ্ধিত করিলে উহারা যেন চ বিন্দুতে সংলগ্ন হইল; যদি ন বিন্দু বহুভুজের কেন্দ্র হয়, তবে প্রমাণ কর যে, কচগন ক্ষেত্র একটী বৃত্তের অন্তর্গত করা যাইতে পারে।

৬৫। একটী বৃত্ত কোন ত্রিভুজের অন্তর্গত করা হইয়াছে; বৃত্ত স্পর্শক তিনটী রেখা দ্বারা এই ত্রিভুজ হইতে আর তিনটী ত্রিভুজ ছেদ করিয়া লইলে তাহাদের ভুজ সমষ্টি প্রথম ত্রিভুজের ভুজ সমষ্টির সমান হইবে।

৬৬। নির্দ্দিষ্ট ভূমির উপর এমন একটী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার ভূমিসংলগ্ন প্রত্যেক কোণ শৃঙ্গস্থ কোণের তৃতীয়াংশ হয়।

৬৭। কোন বৃত্তপাদের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের দুই ভুজ বৃত্তপাদের দুই সীমাবোধক দুইটী ব্যাসার্দ্ধ। প্রতিপন্ন কর যে, বর্গক্ষেত্রের কর্ণের যে অংশ বৃত্তপাদের বাহিরে থাকিবে, তাহা বৃত্তপাদের অন্তর্গত বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের সমান।

৬৮। কোন বৃত্তের অন্তর্গত ষড়্ভুজের এক বাহু বর্দ্ধিত করিয়া অন্তর্গত বর্গক্ষেত্রের ভুজের সমান করিলে, তাহার প্রান্ত হইতে পরিধি পর্য্যন্ত অঙ্কিত বৃত্তস্পর্শক রেখা, বৃত্তের অন্তর্গত অষ্টভুজ ক্ষেত্রের ভুজের সমান হইবে।

৬৯। কঘঙ, খগঙ, দুই অসমান বৃত্ত বহির্দ্দিকে পরস্পর স্পর্শ করিতেছে; কখ, ঘগ তাহাদের দুইটী সাধারণ স্পর্শক রেখা; যদি কঘ, খগ সংযুক্ত করা যায়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, একটী বৃত্ত কখগঘ চতুর্ভুজের অন্তর্গত করা যাইতে পারে।

৭০। কোন বৃত্তের অন্তর্গত সমবাহু ত্রিভুজের এক বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, ব্যাসার্দ্ধের উপর অথবা অন্তর্গত ষড়্ভুজের একটী ভুজের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের তিনগুণ।

৭১। একটী বৃত্ত কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তছেদকের অন্তর্গত করিতে হইবে।

৭২। যে ব্যাস বৃত্তের অন্তর্গত ত্রিভুজের ভূমি দ্বিখণ্ড করে, তাহার এক প্রান্ত হইতে ত্রিভুজের বৃহত্তর বাহুর উপর লম্ব পাত করিলে ঐ বাহুর দুই অংশ, ক্রমে ত্রিভুজের বাহুদ্বয়ের সমষ্টির ও অন্তরের অর্দ্ধেকের সমান হইবে।

৭৩। এক নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান আর একটী ত্রিভুজ, কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে।

৭৪। বৃত্তের অন্তর্গত যে কোন অষ্টভুজ ক্ষেত্রের একান্তর কোণ গুলির সমষ্টি, ছয় সম কোণের সমান।

৭৫। সমান সমান তিনটী বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করিতেছে; উহাদের বহির্ভাগে একটী ও মধ্যভাগে আর একটী বৃত্ত এইরূপে অঙ্কিত কর, যে, উহারা প্রত্যেকে ঐ তিনটী বৃত্ত স্পর্শ করে; প্রমাণ কর যে, বহিস্থ বৃত্তের ব্যাস মধ্যবৃত্তের ব্যাসের ষোল গুণ।

৭৬। একটী বৃত্ত কোন ত্রিভুজের অন্তর্গত করিয়া আর একটী বৃত্ত প্রথম বৃত্তের বহিস্থ ও ত্রিভুজের একটী কোণের মধ্যস্থ ক্ষেত্রের অন্তর্গত করিতে হইবে।

৭৭। কোন সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের দুই ভুজে এরূপ করিয়া দুইটী বৃত্তপাদ অঙ্কিত হইয়াছে যে, তাহারা ত্রিভুজের শৃঙ্গে পরস্পর স্পর্শ করিতেছে। যে বৃত্ত এই দুইটী পরিধিপাদ ও ত্রিভুজের কর্ণ রেখা স্পর্শ করিবে, তাহার ব্যাসার্দ্ধ কর্ণের অষ্টমাংশ।

৭৮। এমন এক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার ভূমি সংলগ্ন প্রত্যেক কোণ শৃঙ্গস্থ কোণের অষ্টমাংশ।

৭৯। কোন বৃত্তের অন্তর্গত দশভুজ ক্ষেত্রের একান্তর কোণ গুলির সমষ্টি আট সম কোণের সমান।

৮০। একটী রম্বস কোন সমান্তর ক্ষেত্রে এরূপ করিয়া অঙ্কিত করিতে হইবে যে, তাহার এক একটী কোণ এই সমান্তর ক্ষেত্রের এক একটী বাহু বা বর্দ্ধিত বাহুতে সংলগ্ন হয়। প্রতি-পন্ন কর যে, এই রূপে অসংখ্য রম্বস অঙ্কিত হইতে পারে।

৮১। ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত বৃত্তের কেন্দ্র হইতে ভুজগুলির উপর পতিত তিনটী লম্ব নির্দ্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজটী অঙ্কিত কর।

৮২। এমন এক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার ভূমি সংলগ্ন প্রত্যেক কোণ শৃঙ্গস্থ কোণের তৃতীয়াংশ।

৮৩। বৃত্ত পরিধির কোন একটী বিন্দু হইতে বৃত্তের অন্তর্গত ত্রিভুজের বাহু গুলির উপর লম্বপাত করিলে তিনটী লম্বের অপর প্রান্ত গুলি একই সরল রেখাতে থাকিবে।

৮৪। কখগ ত্রিভুজ এক বৃত্তের অন্তর্গত করা হইয়াছে; খ বিন্দু দিয়া একটী স্পর্শক রেখা টান ও কগ বাহুকে বর্দ্ধিত কর। ঘ বিন্দুতে যেন কগ ও স্পর্শক রেখার সম্পাত হইল। প্রমাণ কর যে, কখঘ কোণ খগঘ কোণের সমান।

৮৫। ত্রিভুজের এক একটী ভুজ ও অপর দুইটী বর্দ্ধিত ভুজ স্পর্শ করে, এরূপ করিয়া যদি তিনটী বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়, তাহা হইলে তাহাদের কেন্দ্র যোজক রেখা গুলি ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু দিয়া যাইবে।

৮৬। পূর্ব্ব প্রতিজ্ঞার ন্যায় অঙ্কিত তিনটী বৃত্তের কেন্দ্র গুলি ত্রিভুজের অন্তর্গত বৃত্তের কেন্দ্রের সহিত সংযুক্ত করিলে, তিনটী যোজক রেখা ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত বৃত্ত পরিধি দ্বারা দ্বিখণ্ড হইবে।

৮৭। সমকোণী ত্রিভুজের কর্ণ ও অপর দুই বর্দ্ধিত ভুজ স্পর্শ করে, এরূপ একটী বৃত্ত অঙ্কিত হইয়াছে; প্রমাণ কর যে, এই বৃত্তের ব্যাস ত্রিভুজের ভুজ সমষ্টির সমান।

৮৮। সমকোণী ত্রিভুজের কর্ণ রেখা ও অন্তর্গত বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ নির্দ্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

৮৯। সমবাহু ত্রিভুজের ভুজ গুলির উপর তিনটী বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত হইয়াছে। এই তিন ক্ষেত্রের মধ্য বিন্দু গুলি সংযুক্ত করিলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে, তাহার ক্ষেত্রফলের সহিত সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের তুলনা কর।

৯০। একটী বর্গ ক্ষেত্র আর একটী বর্গক্ষেত্রের অন্তর্গত করিলে তাহাদের ক্ষেত্রফলের অন্তর, বহিস্থ বর্গক্ষেত্রের কোন একটী ভুজ যে দুই অংশে বিভক্ত হয়, তাহাদের অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়তের সমান।

৯১। একটী রম্বস কোন নির্দ্দিষ্ট চতুর্ভুজের অন্তর্গত করিতে হইবে।

৯২। কখগঘঙচছজ নিয়মিত অষ্টভুজ ক্ষেত্র এক বর্গ ক্ষেত্রের অন্তর্গত করা হইয়াছে; প্রমাণ কর যে, অষ্টভুজ ক্ষেত্র, কখ এবং ঙচএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান।

৯৩। ৪র্থ অধ্যায়ের দশম প্রতিজ্ঞার চিত্রে ঘ ও চ ইহারা দুই বৃত্তের ছেদ বিন্দু। প্রমাণ কর যে, কচ রেখা গঘএর সমান্তর।

৯৪। উক্ত চিত্রে যদি ছ বিন্দু ক্ষুদ্র বৃত্তের কেন্দ্র হয়, তবে কছঘ কোণ কঘছ ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন প্রত্যেক কোণের দ্বিগুণ হইবে।

৯৫। একটী নিয়মিত দ্বাদশভুজ কোন বৃত্তের অন্তর্গত কর; এবং প্রমাণ কর যে, উহার ক্ষেত্রফল বৃত্তের অন্তর্গত সমবাহু ত্রিভুজের একটী বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান।

৯৬। সপ্তভুজ ক্ষেত্রের বাহুগুলি উভয় দিকে বর্দ্ধিত করিলে যে সাতটী ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে, তাহাদের শীর্ষ কোণের সমষ্টি স্থির কর।

৯৭। একটী নির্দ্দিষ্ট নিয়মিত বহুভুজ কোন বৃত্তের অন্তর্গত করা হইয়াছে; ইহার দ্বিগুণ সংখ্যক ভুজ বিশিষ্ট আর একটী নিয়মিত বহুভুজ কি রূপে ঐ বৃত্তের অন্তর্গত অথবা উহার উপর অঙ্কিত করা যাইতে পারে?

৯৮। স সংখ্যক ভুজ বিশিষ্ট এক নিয়মিত বহুভুজের মধ্যস্থ কোন বিন্দু হইতে যদি ভুজ গুলির উপর লম্ব পাত করা যায়, তবে তাহাদের সমষ্টি, অন্তর্গত বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের স গুণ হইবে।

৯৯। কোন নিয়মিত বহুভুজের উপর অঙ্কিত বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ = ক, এবং অন্তর্গত বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ = খ; বাহু সংখ্যায় দ্বিগুণ কিন্তু বাহু গুলির পরিমাণ সমষ্টিতে সমান, এরূপ আর এক বহু ভুজের উপর অঙ্কিত বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ = চ, তাহার অন্তর্গত বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ = ছ; প্রমাণ কর যে, $ছ = \frac{১}{২}(ক + খ)$ এবং $চ^{২} = কছ$।

১০০। কোন বহুভুজ, দুইটী ঐককেন্দ্রিক বৃত্তের একটীর অন্তর্গত ও অন্যটীর উপর অঙ্কিত হইয়াছে; প্রমাণ কর যে, ক্ষেত্রটী নিয়মিত বহুভুজ।

৪র্থ অধ্যায়।

ব্যাখ্যা ও পরিশিষ্ট।

চতুর্থ অধ্যায়ের প্রতিজ্ঞা গুলি চারিটী সাধারণ প্রতিজ্ঞার বিশেষ বিশেষ উদাহরণ স্বরূপ; সে চারিটী প্রতিজ্ঞা এই,—

(১) এক সরল রৈখিক ক্ষেত্র কোন বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে।

(২) এক সরল রৈখিক ক্ষেত্র কোন বৃত্তের উপর অঙ্কিত করিতে হইবে।

(৩) এক বৃত্ত কোন সরল রৈখিক ক্ষেত্রের অন্তর্গত করিতে হইবে।

(৪) এক বৃত্ত কোন সরল রৈখিক ক্ষেত্রের উপর অঙ্কিত করিতে হইবে।

ইউক্লিড একটী সরল রৈখিক ক্ষেত্র অপর কোন সরল রৈখিক ক্ষেত্রের অন্তর্গত বা উপর অঙ্কিত করিবার দৃষ্টান্ত স্বরূপ কোন প্রতিজ্ঞা লেখেন নাই।

অতিরিক্ত সংজ্ঞা—সমান সমান ভুজ ও কোণ বিশিষ্ট বহু ভুজ ক্ষেত্রকে নিয়মিত বহুভুজ বলে। ভুজ সংখ্যার অনুসারে ক্ষেত্র গুলির নাম হইয়া থাকে; যথা, পঞ্চভুজ, ষড়্‌ভুজ, সপ্তভুজ, অষ্টভুজ, দশভুজ, দ্বাদশভুজ, পঞ্চদশভুজ, ইত্যাদি।

৩য় প্র। ক, খ, গ বিন্দু হইতে যে তিনটী স্পর্শক রেখা টানা হইয়াছে, তাহারা পরস্পর সংলগ্ন হইবে কি না, ইহা জিজ্ঞাসা করা যাইতে পারে। কিন্তু সহজেই এই প্রশ্নের সমাধা হয়;— যথা, কখ সংযুক্ত করিয়া দাও; তাহা হইলে টকড এবং টখড কোণ একত্রে দুই সম কোণের সমান বলিয়া (৩। ১৮), খকড এবং কখড এই দুই কোণ দুই সম কোণ অপেক্ষা ন্যূন; এই হেতু টক এবং টখ বর্দ্ধিত হইলে সংলগ্ন হইবে (স্বতঃ ১২);

এইরূপে প্রতিপন্ন করা যাইতে পারে যে, তিনটী স্পর্শক রেখাই পরস্পর সংলগ্ন হইবে।

৪র্থ প্র। ইউক্লিডের ৪র্থ প্রতিজ্ঞা নিম্ন লিখিত প্রতিজ্ঞার অন্তর্গত;—

এমন একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যে, তাহা তিনটী নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা স্পর্শ করে।

যদি এই তিনটী সরল রেখা এক বিন্দু দিয়া যায় কিম্বা সকলেই পরস্পর সমান্তর হয়, তবে প্রতিজ্ঞাটী সিদ্ধ হইতে পারে না।

চতুর্থ প্রতিজ্ঞার নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজটী যদি সমবাহু হয়, তাহা হইলে অন্তর্গত বৃত্তের কেন্দ্র ত্রিভুজের তিনটী কোণের সমদূরবর্ত্তী হইবে। অতএব সমবাহু ত্রিভুজের উপরি অঙ্কিত ও তাহার অন্তর্গত বৃত্তের কেন্দ্র একই বিন্দু এবং একের ব্যাসার্দ্ধ অপরের ব্যাসার্দ্ধের দ্বিগুণ।

৫ম প্র। এই প্রতিজ্ঞার উপপত্তি স্থলে লিখিত হইয়াছে যে, দুইটী ভুজের দ্বিখণ্ড কারক রেখা ঘচ এবং ঙচ বর্দ্ধিত হইলে চ বিন্দুতে সংলগ্ন হইবে। ইউক্লিড এই অংশটী লেখেন নাই। ইহা বিখ্যাত ইংলণ্ডীয় পণ্ডিত সিম্‌সন স্বকৃত ইউক্লিডের জ্যামিতির অনুবাদে লিখিয়া দিয়াছেন। অন্য প্রকারেও ইহা প্রমাণ করা যাইতে পারে; যথা, ঘঙ সংযুক্ত করিয়া দাও; তাহা হইলে ঙঘচ, ঘঙচ কোণ একত্রে কঘচ, কঙচ কোণ অপেক্ষা ন্যূন হওয়াতে, তাহারা দুই সম কোণ অপেক্ষা ন্যূন; অতএব ঘচ, ঙচ সংলগ্ন হইবে। (স্বতঃ ১১)

১০ম প্র। এই প্রতিজ্ঞাসিদ্ধ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ কোণ যে দুই সম কোণের পঞ্চমাংশ, তাহা সহজেই প্রতীত হইবে; সুতরাং ইহার অর্দ্ধেক এক সম কোণের পঞ্চমাংশ। অতএব এক সম কোণকে জ্যামিতির ধারানুসারে পাঁচ সমান ভাগে বিভক্ত করা যাইতে পারে।

১৬শ প্র। বৃত্তের অন্তর্গত নিয়মিত পঞ্চভুজ ও ষড়্‌ভুজের বাহুর সমান দুইটী রেখা পরিধির কোন এক বিন্দু হইতে

এরূপে টান, যেন ঐ রেখাদ্বয় বৃত্তে স্থাপিত হয়, তাহা হইলে তাহাদের মধ্যস্থ চাপ পরিধির ত্রিংশ ভাগের এক ভাগ, অর্থাৎ পঞ্চদশ ভাগের দ্বিগুণ হইবে।

ইউক্লিডের প্রতিজ্ঞা গুলি দ্বারা সহজেই প্রতিপন্ন হইবে যে, একটী বৃত্ত কোন নিয়মিত ক্ষেত্রের অন্তর্গত করিলে ও আর একটী বৃত্ত উহার উপর অঙ্কিত করিলে এই দুই বৃত্ত ঐক-কেন্দ্রিক হইবে।

চতুর্থ অধ্যায়ে যে সকল প্রতিজ্ঞা সপ্রমাণ হইয়াছে, তদ্দ্বারা অনায়াসে বোধ হইবে যে,—

(১) বৃত্ত পরিধিকে ৩, ৬, ১২, ২৪ ইত্যাদি সমান অংশে ভাগ করা যায়।

(২) বৃত্ত পরিধিকে ৪, ৮, ১৬, ৩২ ইত্যাদি সমান অংশে ভাগ করা যায়।

(৩) বৃত্ত পরিধিকে ৫, ১০, ২০, ৪০ ইত্যাদি সমান অংশে ভাগ করা যায়।

(৪) বৃত্ত পরিধিকে ১৫, ৩০, ৬০, ১২০ ইত্যাদি সমান অংশে ভাগ করা যায়।

অতএব যে যে সংখ্যা লিখিত হইল, তত্তৎসংখ্যক ভুজ বিশিষ্ট নিয়মিত বহুভুজ ক্ষেত্র বৃত্তের অন্তর্গত ও তাহার উপর অঙ্কিত করিতে পারা যায়।

এতদ্ব্যতীত অন্য কোন নিয়মিত বহুভুজ জ্যামিতির প্রচলিত রীত্যনুসারে অঙ্কিত করা সহজ নয়। অদ্যাবধি কেহই এই প্রণালী অবলম্বন করিয়া নিয়মিত সপ্তভুজ অঙ্কিত করিতে পারেন নাই।

প্রথম অধ্যায়ের ৩২শ প্রতিজ্ঞার প্রথম অনুমানের সাহায্যে নিয়মিত ক্ষেত্র মাত্রেরই প্রত্যেক কোণের পরিমাণ স্থির হইতে পারে; আবার কোন নিয়মিত বহুভুজের মধ্য বিন্দুর সহিত কৌণিক বিন্দু গুলি যোগ করিয়া দিলে মধ্য বিন্দুতে যে সকল কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের প্রত্যেকের পরিমাণ স্থির করিতে হইলে, চারি সম কোণকে ভুজসংখ্যা দিয়া ভাগ করিলেই হইবে।

সমতলস্থ কোন বিন্দুতে চারি সম কোণ অঙ্কিত করিলেই স্থান পরিপূরণ হয়, অন্য কোন উপায়ে হয় না, ইহা বিদ্যার্থীদিগের সহজেই বোধগম্য হইবে। এই সিদ্ধান্ত অবলম্বন করিয়া গ্রীস দেশীয় মহাপণ্ডিত পিথাগোরাস স্থির করিয়াছেন যে, সমবাহু ত্রিভুজ, সমচতুর্ভুজ, ও নিয়মিত ষড়্ভুজ ব্যতীত অন্য কোন ক্ষেত্র দ্বারা স্থান পরিপূরণ হইতে পারে না; কেননা, সমবাহু ত্রিভুজের একটী কোণের ছয় গুণ, সমচতুর্ভুজের একটী কোণের চারি গুণ, ও নিয়মিত ষড়্ভুজের একটী কোণের তিন গুণ লইলে চারি সমকোণের সমান হয়।

৫ম অধ্যায়।

সংজ্ঞা।

১। দুইটী রাশির মধ্যে ক্ষুদ্রতর রাশিটী বৃহত্তরের অংশ বলিলে বুঝিতে হইবে যে, ক্ষুদ্রতর রাশি বৃহত্তরের অপবর্ত্তন * বা পরিমাপক; অর্থাৎ বৃহত্তর রাশি কোন নির্দ্দিষ্ট বার ক্ষুদ্রতর রাশি দ্বারা ব্যাপ্ত। (৫ম অধ্যায়ের পরিশিষ্ট দেখ।)

২। দুইটী রাশির মধ্যে বৃহত্তর রাশিটী ক্ষুদ্রতরের অপবর্ত্ত্য বা গুণিত† বলিলে বুঝিতে হইবে যে, বৃহত্তর রাশি ক্ষুদ্রতর দ্বারা পরিমেয়; অর্থাৎ বৃহত্তর রাশি কোন নির্দ্দিষ্ট বার ক্ষুদ্রতর রাশিকে ধারণ করিতেছে।

৩। সজাতীয় দুই রাশির পরিমাণ লইয়া পরস্পর যে সম্বন্ধ, তাহাকে নিষ্পত্তি ‡ বা অনুপাত বলে।

৪। দুই রাশি অনুপাতী বলিলে বুঝিতে হইবে যে, ক্ষুদ্রতর রাশিকে গুণন দ্বারা বর্দ্ধিত করিলে অপর রাশি অপেক্ষা বৃহত্তর হয়। (পরিশিষ্ট দেখ।)

---

* Measure—পরস্পরং ভাজিতযোর্যযোর্যঃ শেষস্তয়োঃ স্যাদপবর্ত্তনং সঃ। ভাস্করাচার্য্যঃ।

† Multiple.

‡ একরাশেঃ সজাতীয়ান্যরাশিনা প্রমাণাত্মকঃ সম্বন্ধোনিষ্পত্তিঃ। যোগধ্যানকৃতা ক্ষেত্রতত্ত্বদীপিকা।

৫। চারি রাশির মধ্যে প্রথম ও তৃতীয়ের কোন সমগুণিত এবং দ্বিতীয় ও চতুর্থের কোন সমগুণিত কল্পনা করিলে যদি এরূপ প্রতীত হয় যে, প্রথমের গুণিত দ্বিতীয়ের গুণিত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে তৃতীয়ের গুণিতও চতুর্থের গুণিত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, আর প্রথমের গুণিত দ্বিতীয়ের গুণিতের সমান হইলে তৃতীয়ের গুণিতও চতুর্থের গুণিতের সমান হয়, এবং প্রথমের গুণিত দ্বিতীয়ের গুণিত অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে তৃতীয়ের গুণিতও চতুর্থের গুণিত অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে প্রথমোক্ত চারি রাশির মধ্যে, প্রথমের দ্বিতীয়ের সহিত যে সম্বন্ধ, তৃতীয়ের চতুর্থের সহিতও সেই সম্বন্ধ বলা যায়। (পরিশিষ্ট দেখ।)

৬। রাশি সকল পরস্পর একই নিষ্পত্তি বিশিষ্ট হইলে, তাহাদিগকে সমানুপাতী বলে। চারি রাশি সমানুপাতী হইলে তাহাদিগের সম্বন্ধ প্রকাশ করিবার এই রূপ রীতি আছে;—যথা প্রথমের, দ্বিতীয়ের সহিত যে নিষ্পত্তি বা অনুপাত, তৃতীয়ের চতুর্থের সহিত সেই নিষ্পত্তি বা অনুপাত; অথবা প্রথমে দ্বিতীয়ে যে অনুপাত বা সম্বন্ধ, তৃতীয়ে চতুর্থে সেই অনুপাত বা সম্বন্ধ; কিম্বা সংক্ষেপ, প্রথমে দ্বিতীয়ে যেরূপ তৃতীয়ে চতুর্থে সেই রূপ।

৭। পঞ্চম সংজ্ঞার ধারানুসারে চারি রাশির সমগুণিত কল্পনা করিলে, যদি দ্বিতীয়ের গুণিত অপেক্ষা প্রথমের গুণিত বৃহত্তর হয়, কিন্তু চতুর্থের গুণিত অপেক্ষা তৃতীয়ের গুণিত বৃহত্তর না হয়, তবে তৃতীয়ের চতুর্থের

সহিত নিষ্পত্তির পরিমাণ অপেক্ষা, প্রথমের দ্বিতীয়ের সহিত নিষ্পত্তির পরিমাণ বৃহত্তর, এবং প্রথমের দ্বিতীয়ের সহিত নিষ্পত্তির পরিমাণ অপেক্ষা তৃতীয়ের চতুর্থের সহিত নিষ্পত্তির পরিমাণ ক্ষুদ্রতর বলা যায়।

৮। যে সকল অনুপাতের সমতা আছে, তাহাদের নাম সমানুপাত বা সমান নিষ্পত্তি।

৯। সমানুপাতে অন্তত তিনটী রাশি থাকে। (পরিশিষ্ট দেখ।)

১০। তিন রাশি সমানুপাতী হইলে প্রথমের তৃতীয়ের সহিত অনুপাতকে প্রথমের দ্বিতীয়ের সহিত অনুপাতের দ্বিগুণ বা দ্বিঘাত বলা যায়।

১১। চারি রাশি ক্রমাগত সমানুপাতী হইলে প্রথমের চতুর্থের সহিত অনুপাতকে, প্রথমের দ্বিতীয়ের সহিত অনুপাতের ত্রিগুণ বা ত্রিঘাত বলা যায়; এবং সমানুপাতের রাশি সংখ্যা এক এক করিয়া বৃদ্ধি করিলে অনুপাতও তদনুসারে চতুর্গুণ বা চতুর্ঘাত প্রভৃতি এক এক ঘাত বৃদ্ধি হইবে। (পরিশিষ্ট দেখ।)

সম্মিলিত অনুপাতের সংজ্ঞা।

(ক) কতিপয় এক জাতীয় রাশির মধ্যে প্রথমের শেষের সহিত অনুপাতকে, প্রথমের দ্বিতীয়ের সহিত, দ্বিতীয়ের তৃতীয়ের সহিত, তৃতীয়ের চতুর্থের সহিত ইত্যাদি শেষ রাশি পর্য্যন্ত যাবতীয় অনুপাতের সম্মিলিত অনুপাত বলে; যথা, যদি ক, খ, গ, ঘ এক জাতীয় চারি রাশি হয়, তাহা

হইলে এরূপ কথিত হইয়া থাকে যে, ক ও ঘএর অনুপাতটী, ক ও খএর, খ ও গএর এবং গ ও ঘএর অনুপাতের সম্মিলিত অনুপাত; অথবা, ক ও খএর অনুপাত, খ ও গএর অনুপাত এবং গ ও ঘএর অনুপাতের সম্মিলনে, ক ও ঘএর অনুপাতের উৎপত্তি হইয়াছে।

আবার কএর খএর সহিত যে অনুপাত, ঙর চএর সহিত সেই অনুপাত ও খএর গএর সহিত যে অনুপাত, ছএর জএর সহিত সেই অনুপাত এবং গএর ঘএর সহিত যে অনুপাত, টএর ঠএর সহিত সেই অনুপাত এই রূপ হইলে, এই সংজ্ঞানুসারে কএর ঘএর অনুপাত, যে যে অনুপাতের সম্মিলনে উৎপন্ন হইয়াছে, তাহারা ঙ ও চএর, ছ ও জএর, এবং ট ও ঠএর অনুপাতের সমান। সংক্ষেপে প্রকাশ করিতে হইলে ইহা কথিত হয় যে, ক ও ঘএর অনুপাত ঙ ও চ, ছ ও জ, এবং ট ও ঠএর অনুপাতের সম্মিলিত অনুপাত।

এই রূপে, যদি এমন কল্পনা করা যায় যে, কএর ঘএর সহিত যে অনুপাত, ডএর ঢএর সহিত সেই অনুপাত, তাহা হইলে সংক্ষেপে বলা যাইতে পারে যে, ডএর ঢএর সহিত অনুপাত ঙ ও চএর, ছ ও জএর, এবং ট ও ঠএর অনুপাতের সম্মিলিত অনুপাত।

১২। সমানুপাতের পূর্ব্ববর্ত্তী গুলিকে অর্থাৎ প্রথম, তৃতীয় ইত্যাদি রাশিকে, পরস্পর সবর্গীয় বা সমভাবী বলা যায়; পরবর্ত্তীদিগকে অর্থাৎ দ্বিতীয়, চতুর্থ ইত্যাদি রাশিকে পরস্পর সবর্গীয় বলিয়া থাকে।

রাশিদিগের সমানুপাতিত্ব পরিবর্ত্তন না করিয়া স্থান অথবা পরিমাণ পরিবর্ত্তন করিবার নিমিত্ত জ্যামিতি-বেত্তারা নিম্ন লিখিত কতিপয় বিশেষ পারিভাষিক শব্দ ব্যবহার করিয়া থাকেন।

১৩। একান্তর সমানুপাত—চারি রাশি সমানুপাতী হইলে যখন এপ্রকার সিদ্ধান্ত হয় যে, প্রথমের তৃতীয়ের সহিত যে অনুপাত, দ্বিতীয়ের চতুর্থের সহিত সেই অনুপাত, তখন এই পরিভাষা ব্যবহৃত হইয়া থাকে। (৫ম, ১৬প্র।)

১৪। বিলোম বা ব্যুৎক্রম সমানুপাত—চারি রাশি সমানুপাতী হইলে, যখন এপ্রকার সিদ্ধান্ত হয় যে, দ্বিতীয়ের প্রথমের সহিত যে অনুপাত, চতুর্থের তৃতীয়ের সহিত সেই অনুপাত, তখন এই পরিভাষা ব্যবহৃত হইয়া থাকে। (৫ম, খপ্র।)

১৫। যোগ সমানুপাত—চারি রাশি সমানুপাতী হইলে, যখন এপ্রকার সিদ্ধান্ত হয় যে, প্রথম ও দ্বিতীয়ের যোগফলের দ্বিতীয়ের সহিত যে অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থের যোগফলের চতুর্থের সহিত সেই অনুপাত, তখন এই পরিভাষা ব্যবহৃত হইয়া থাকে। (৫ম, ১৮প্র।)

১৬। অন্তর সমানুপাত—চারি রাশি সমানুপাতী হইলে যখন এপ্রকার সিদ্ধান্ত হয় যে, দ্বিতীয় অপেক্ষা প্রথমের আধিক্যের দ্বিতীয়ের সহিত যে অনুপাত, চতুর্থ অপেক্ষা তৃতীয়ের আধিক্যের চতুর্থের সহিত সেই

অনুপাত, তখন এই পরিভাষা ব্যবহৃত হইয়া থাকে। (৫ম, ১৭প্র।)

১৭। অন্তর বিলোম* সমানুপাত—চারি রাশি সমানুপাতী হইলে যখন এপ্রকার সিদ্ধান্ত হয় যে, প্রথমের দ্বিতীয় অপেক্ষা প্রথমের আধিক্যের সহিত যে অনুপাত, তৃতীয়ের চতুর্থ অপেক্ষা তৃতীয়ের আধিক্যের সহিত সেই অনুপাত, তখন এই পরিভাষা ব্যবহৃত হইয়া থাকে। (৫ম, ৬প্র।)

১৮। সমদূর সমানুপাত—দুইটীর অধিক কতকগুলি রাশি এক স্থানে থাকিলে ও আর তত গুলি রাশি অপর স্থানে থাকিলে, যখন এক শ্রেণীস্থ দুইটী দুইটী ক্রমে অপর শ্রেণীস্থ দুইটী দুইটীর সহিত সমানুপাতী হয় এবং এপ্রকার সিদ্ধান্ত হয় যে, এক শ্রেণীর প্রথমের উহার শেষ রাশির সহিত যে অনুপাত, অপর শ্রেণীর প্রথমের তাহার শেষ রাশির সহিত সেই অনুপাত, তখন এই পরিভাষা ব্যবহৃত হইয়া থাকে। বিভিন্ন ক্রম অনুসারে দুইটী দুইটী করিয়া রাশি লওয়াতে এই সমানুপাত দুই প্রকার হইয়াছে, যথা;—

১৯। ক্রম সমানুপাত—এক শ্রেণীস্থ প্রথম রাশির উহার দ্বিতীয়ের সহিত যে অনুপাত, অপর শ্রেণীস্থ প্রথমের তাহার দ্বিতীয়ের সহিত সেই অনুপাত হইলে ও

* যত্র প্রথমস্য প্রথমদ্বিতীযযোরন্তরেণ নিষ্পত্তির্দীযতে তত্র অন্তরবিলোমনিষ্পত্তির্জ্ঞেযা। জগন্নাথকৃতং রেখাগণিতং।

প্রথম শ্রেণীস্থ দ্বিতীয়ের উহার তৃতীয়ের সহিত যে অনুপাত, অপর শ্রেণীস্থ দ্বিতীয়ের তাহার তৃতীয়ের সহিত সেই অনুপাত হইলে এবং ক্রমাগত এই রূপ হইলে, যখন পূর্ব্ব সংজ্ঞার ন্যায় সিদ্ধান্ত করা যায়, তখন এই পরিভাষা ব্যবহৃত হইয়া থাকে। (৫ম, ২২প্র।)

২০। **ব্যতিক্রম সমানুপাত**—এক শ্রেণীস্থ প্রথম রাশির উহার দ্বিতীয় রাশির সহিত যে অনুপাত, অপর শ্রেণীস্থ একোন শেষ রাশির তাহার শেষ রাশির সহিত সেই অনুপাত হইলে, ও প্রথম শ্রেণীস্থ দ্বিতীয়ের উহার তৃতীয়ের সহিত যে অনুপাত, অপর শ্রেণীস্থ দ্ব্যূন শেষ রাশির তাহার একোন শেষ রাশির সহিত সেই অনুপাত হইলে, আর প্রথম শ্রেণীস্থ তৃতীয়ের উহার চতুর্থের সহিত যে অনুপাত, অপর শ্রেণীস্থ ত্র্যূন শেষ রাশির তাহার দ্ব্যূন শেষ রাশির সহিত সেই অনুপাত হইলে, এবং এই রূপে ধারাবাহিক ব্যতিক্রমে রাশি গুলি সমানুপাতী হইলে, যখন অষ্টাদশ সংজ্ঞার ন্যায় সিদ্ধান্ত করা যায়, তখন এই পরিভাষা ব্যবহৃত হইয়া থাকে। (৫ম, ২৩প্র।)

স্বতঃ সিদ্ধ।

১। এক রাশি বা সমান সমান রাশির সম অপবর্ত্ত্য গুলি পরস্পর সমান।

২। যে যে রাশির সম অপবর্ত্তা একই রাশি বা সমান সমান রাশি, তাহারা পরস্পর সমান।

৩। বৃহত্তর রাশির অপবর্ত্ত্য, ক্ষুদ্রতর রাশির তৎসম অপবর্ত্ত্য অপেক্ষা বৃহত্তর।

৪। যে রাশির অপবর্ত্ত্য অন্য রাশির তৎসম অপবর্ত্ত্য হইতে বৃহত্তর, সেই রাশিটী অপর রাশি অপেক্ষা বৃহত্তর।

১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যদি কতিপয় রাশি যথাক্রমে তৎসংখ্যক অন্য কতিপয় রাশির সমগুণিত হয়, তবে তন্মধ্যে কোন একটী রাশি স্বীয় অংশের যে পরিমাণে গুণিত, প্রথমোক্ত সমস্ত রাশি গুলি অপর সমুদয় রাশির সেই পরিমাণে গুণিত হইবে।

কখ, গঘ ইত্যাদি কতিপয় রাশি যথাক্রমে ঙ, চ ইত্যাদি তৎসংখ্যক অন্য কতিপয় রাশির সমগুণিত; তাহা হইলে কখ রাশি ঙর যে পরিমাণে গুণিত, একত্র করিলে কখ ও গঘ, একত্রকৃত ঙ ও চএর সেই পরিমাণে গুণিত হইবে।

ক ছ খ গ জ ঘ

ঙ-

কখ রাশি ঙর যে গুণিত, গঘ রাশি চএর সেই গুণিত হওয়াতে, কখতে ঙর সমান যত গুলি রাশি আছে, চএর সমান ততগুলি রাশি গঘতে থাকিবে। কখকে এরূপে ভাগ কর, যেন কছ, ছখ প্রত্যেক অংশ ঙর

সমান হয়; এবং গঘকে এরূপে ভাগ কর, যেন গজ, জঘ প্রত্যেকে চএর সমান হয়।

তাহা হইলে কছ, ছখ রাশি গুলির সংখ্যা গজ, জঘ রাশি গুলির সংখ্যার সমান হইবে।

আবার কছ রাশি ঙর ও গজ রাশি চএর সমান হওয়াতে, একত্রকৃত কছ ও গজ একত্রকৃত ঙ ও চএর সমান হইবে। [২স্বতঃ।

এই রূপে ছখ রাশি ঙর সমান ও জঘ রাশি চএর সমান হওয়াতে, একত্রকৃত ছখ ও জঘ একত্রকৃত ঙ ও চএর সমান হইবে।

এই হেতু কখতে ঙর সমান যতগুলি রাশি আছে, ঙ ও চএর সমান ততগুলি রাশি কখ ও গঘতে থাকিবে। অতএব কখ রাশি ঙর যে গুণিত, একত্র করিলে কখও গঘ, ঙ ও চএর সেই গুণিত হইবে। সুতরাং যদি কতিপয় রাশি ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। ক, খ, গ ইত্যাদি কতিপয় রাশি এবং চ, ছ, জ ইত্যাদি আর কতিপয় রাশি, ক = সচ, খ = সছ, গ = সজ,

∴ ক + খ + গ = সচ + সছ + সজ = স(চ + ছ + জ);

∵ ক ÷ চ = স; আবার (ক + খ + গ) ÷ (চ + ছ + জ) = স;

∴ ক ÷ চ = (ক + খ + গ) ÷ (চ + ছ + জ) অর্থাৎ ক রাশি চএর যে গুণিত, (ক + খ + গ), (চ + ছ + জ)এর সেই গুণিত।

২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

প্রথম রাশি দ্বিতীয়ের যে পরিমাণে গুণিত, যদি তৃতীয় রাশি চতুর্থের সেই পরিমাণে গুণিত হয় আর পঞ্চম রাশি দ্বিতীয়ের যে পরিমাণে গুণিত, ষষ্ঠ রাশি চতুর্থের সেই পরিমাণে গুণিত হয়, তবে প্রথম ও পঞ্চমের সমষ্টি দ্বিতীয়ের যে পরিমাণে গুণিত হইবে, তৃতীয় ও ষষ্ঠের সমষ্টি চতুর্থের সেই পরিমাণে গুণিত হইবে।

প্রথম রাশি কখ দ্বিতীয় রাশি গএর যে পরিমাণে গুণিত, তৃতীয় রাশি ঘঙ চতুর্থ রাশি চএর সেই পরিমাণে গুণিত; আবার পঞ্চম রাশি খছ দ্বিতীয় রাশি গএর যে পরিমাণে গুণিত, ষষ্ঠ রাশি ঙজ চতুর্থ রাশি চএর সেই পরিমাণে গুণিত; তাহা হইলে প্রথম ও পঞ্চমের সমষ্টি কছ, দ্বিতীয় রাশি গএর যে গুণিত, তৃতীয় ও ষষ্ঠের সমষ্টি ঘজ, চতুর্থ রাশি চএর সেই গুণিত হইবে।

ক খ ছ ঘ ঙ জ

কখ রাশি গএর যে গুণিত, ঘঙ রাশি চএর সেই গুণিত হওয়াতে, কখতে গএর সমান যত গুলি রাশি আছে, ঘঙতে চএর সমান তত গুলি রাশি থাকিবে।

এই রূপে খছ:তে গএর সমান যত গুলি রাশি আছে, ঙজতে চএর সমান তত গুলি রাশি থাকিবে।

এই হেতু সমস্ত কছ:তে গএর সমান যত রাশি আছে, সমস্ত ঘজ:তে চএর সমান তত রাশি থাকিবে।

অতএব কছ রাশি গএর যে গুণিত, ঘজ রাশি চএর সেই গুণিত, অর্থাৎ প্রথম ও পঞ্চমের সমষ্টি কছ রাশি গএর যে গুণিত, তৃতীয় ও ষষ্ঠের সমষ্টি ঘজ রাশি চএর সেই গুণিত। অতএব প্রথম রাশি দ্বিতীয়ের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অনু। ইহা হইতে অনায়াসে প্রতীত হইবে যে, কতিপয় রাশি কখ, খছ, ছজ প্রত্যেকে গএর যে গুণিত, যদি ঘঙ, ঙট, টঠ যথাক্রমে চএর সেই পরিমাণে গুণিত হয়, তবে সমস্ত কজ রাশি গএর যে পরিমাণে গুণিত সমস্ত ঘঠ রাশি চএর সেই পরিমাণে গুণিত হইবে।

ক খ ছ জ ঘ ঙ ট ঠ

গ-

বীজঃ উপঃ। ক, খ, গ, ঘ, ঙ, চ ছয়টী রাশি; ক = সখ গ = সঘ, ঙ = হখ, চ = হঘ;

∴ ক + ঙ = সখ + হখ = (স + হ)খ; গ + চ = সঘ + হঘ = (স + হ)ঘ ∴ (ক + ঙ) ÷ খ = স + হ এবং (গ + চ) ÷ ঘ = স + হ।

অনু। যদি ক = শট, খ = সট, গ = হট ইত্যাদি এবং চ = শঠ, ছ = সঠ, জ = হঠ ইত্যাদি হয়, তবে ক + খ + গ = (শ + স + হ)ট এবং চ + ছ + জ = (শ + স + হ)ঠ অর্থাৎ ক + খ + গ + ইত্যাদি টএর যে গুণিত, চ + ছ + জ + ইত্যাদি ঠএর সেই গুণিত।

৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

প্রথম রাশি দ্বিতীয়ের যে পরিমাণে গুণিত, যদি তৃতীয় রাশি চতুর্থের সেই পরিমাণে গুণিত হয় এবং প্রথম ও তৃতীয় রাশির সমগুণিত কল্পনা করা যায়, তবে এই দুইটী গুণিতের একটী দ্বিতীয়ের ও অন্যটী চতুর্থের সমগুণিত হইবে।

প্রথম রাশি ক দ্বিতীয় রাশি খএর যে গুণিত, তৃতীয় রাশি গ চতুর্থ রাশি ঘএর সেই গুণিত; ক ও গএর সমগুণিত ঙচ ও ছজ কল্পনা কর; তাহা হইলে ঙচ, খএর যে গুণিত, ছজ রাশি ঘএর সেই গুণিত হইবে।

ঙ ট চ ছ ঠ জ

ক— গ—

খ— ঘ—

ঙচ, কএর যে গুণিত, ছজ, গএর সেই গুণিত হওয়াতে, ঙচতে কএর সমান যত গুলি রাশি আছে, ছজতে গএর সমান তত গুলি রাশি থাকিবে।

ঙচকে এরূপে ভাগ কর যে, প্রত্যেক অংশ ঙট, টচ, কএর সমান হয় এবং ছজকে এরূপে ভাগ কর যে, প্রত্যেক অংশ ছঠ, ঠজ, গএর সমান হয়;

তাহা হইলে ঙট, টচ, এই সকল রাশি গুলির সংখ্যা ছঠ, ঠজ, এই রাশি গুলির সংখ্যার সমান হইবে।

আবার ক, খএর যে গুণিত, গ রাশি ঘএর সেই গুণিত

হওয়াতে, [কল্পনা।

এবং ঙট, কএর সমান, ও ছঠ, গএর সমান বলিয়া,

ঙট, খএর যে গুণিত, ছঠ রাশি ঘএর সেই গুণিত;

এই রূপে টচ, খএর যে গুণিত, ঠজ রাশি ঘএর সেই গুণিত; এবং ঙচ ও ছজতে ক ও গএর সমান আরও অধিক রাশি থাকিলে এই রূপ হইত।

অতএব প্রথম রাশি ঙট দ্বিতীয় রাশি খএর যে গুণিত, তৃতীয় রাশি ছঠ চতুর্থ রাশি ঘএর সেই গুণিত হওয়াতে,

এবং পঞ্চম রাশি টচ দ্বিতীয় রাশি খএর যে গুণিত, ষষ্ঠ রাশি ঠজ চতুর্থ রাশি ঘএর সেই গুণিত বলিয়া,

প্রথম ও পঞ্চমের সমষ্টি ঙচ, দ্বিতীয় রাশি খএর যে গুণিত তৃতীয় ও ষষ্ঠের সমষ্টি ছজ, চতুর্থ রাশি ঘএর সেই গুণিত; [৫ম, ২।

অতএব প্রথম রাশি ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। ক = সখ, গ = সঘ ∴ হক = হসখ এবং হগ = হসঘ অর্থাৎ খ ও ঘ প্রত্যেকে হক ও হগ রাশিতে হস বার আছে।

৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

প্রথম রাশির দ্বিতীয়ের সহিত যে অনুপাত, যদি তৃতীয়ের চতুর্থের সহিত সেই অনুপাত হয় আর যদি প্রথম ও তৃতীয়ের কোন সমগুণিত এবং দ্বিতীয়ের ও চতুর্থের কোন সমগুনিত কল্পনা করা যায়, তবে

প্রথমের গুণিতে দ্বিতীয়ের গুণিতে যে অনুপাত, তৃতীয়ের গুণিতে চতুর্থের গুণিতে সেই অনুপাত হইবে।

প্রথম রাশি কতে দ্বিতীয় রাশি খতে যে অনুপাত তৃতীয় রাশি গতে চতুর্থ রাশি ঘতে সেই অনুপাত : ক ও গএর কোন সমগুণিত ঙ ও চ, এবং খ ও ঘএর কোন সমগুণিত ছ ও জ কল্পনা কর; তাহা হইলে ঙতে ছতে যে অনুপাত, চতে জতে সেই অনুপাত হইবে।

ট———	ড———
ঙ——	ছ——
ক—	খ—
গ—	ঘ—
চ——	জ——
ঠ———	ঢ———

ঙ ও চএর কোন সমগুণিত ট ও ঠ, এবং ছ ও জএর কোন সমগুণিত ড ও ঢ কল্পনা কর।

অনন্তর, ঙ যে পরিমাণে কএর গুণিত, চ সেই পরিমাণে গএর গুণিত হওয়াতে,

আর ঙ ও চএর সমগুণিত ট ও ঠ কল্পিত হইয়াছে বলিয়া, ট, কএর যে গুণিত ঠ, গএর সেই গুণিত হইবে। [৫ম, ৩।

এই কারণে ড, খএর যে গুণিত ঢ, ঘএর সেই গুণিত হইবে।

আবার কতে খতে যে অনুপাত, গতে ঘতে সেই অনুপাত হওয়ায়, [কল্পনা।

আর ট ও ঠ এই দুই রাশি ক ও গএর কোন সমগুণিত
এবং ড ও ঢ এই দুই রাশি খ ও ঘএর কোন সমগুণিত
কল্পিত হইয়াছে বলিয়া,
ট রাশি ড অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে ঠও ঢ অপেক্ষা
বৃহত্তর, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর
হইবে; [৫ম, সং ৫।
কিন্তু ট ও ঠ এই দুই রাশি ঙ ও চএর সমগুণিত, এবং
ড ও ঢ এই দুই রাশি ছ ও জএর সমগুণিত; [অঙ্কন।
সুতরাং ঙ রাশির ছএর সহিত যে অনুপাত, চ রাশির
জএর সহিত সেই অনুপাত; [৫ম, সং ৫।
অতএব প্রথম রাশির দ্বিতীয়ের সহিত ইত্যাদি।
এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অনু। চারি রাশি সমানুপাতী হইলে প্রথম ও
তৃতীয়ের সমগুণিত দ্বিতীয় ও চতুর্থের সহিত সমানুপাতী
আর প্রথম ও তৃতীয় রাশি দ্বিতীয় ও চতুর্থের সমগুণিতের
সহিত সমানুপাতী হইবে।

এই প্রতিজ্ঞাতে যেরূপ সমগুণিত কল্পিত হইয়াছে,
সেই পদ্ধতি অবলম্বন করিলে প্রতিপন্ন হইবে যে, ট রাশি
কএর যে গুণিত, ঠ রাশি গএর সেই গুণিত।
এবং কতে খতে যে রূপ, গতে ঘতে সেই রূপ হওয়াতে,
আর ক ও গএর কোন সমগুণিত ট ও ঠ, এবং খ ও ঘএর
কোন সমগুণিত ছ ও জ কল্পিত হইয়াছে বলিয়া,
ট রাশি ছ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে ঠও জ অপেক্ষা বৃহত্তর,
সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর

হইবে; [৫ম, সং ৫

কিন্তু ট ও ঠ এই দুই রাশি ঙ ও চএর সমগুণিত, [অঙ্কন

এবং ছ ও জ এই দুই রাশি খ ও ঘএর সমগুণিত;

অতএব ঙর খএর সহিত যে অনুপাত, চএর ঘএর সহিত সেই অনুপাত। [৫ম, সং ৫

অন্য সমানুপাতটীও এই রূপে প্রতিপন্ন হইতে পারে।

বীজঃ উপঃ। ক : খ : : গ : ঘ অথবা $\frac{ক}{খ}=\frac{গ}{ঘ}$ ∴ $\frac{ক}{খ}\times\frac{স}{হ}$

$=\frac{গ}{ঘ}\times\frac{স}{হ}$ ∴ সক : হখ : : সগ : হঘ।

অনু। যদি হ = ১ হয়, তবে $\frac{ক}{খ}\times স=\frac{গ}{ঘ}\times স$;

∴ সক : খ : : সগ : ঘ; যদি স = ১ হয়, তবে $\frac{ক}{খ}\times\frac{১}{হ}=\frac{গ}{ঘ}\times\frac{১}{হ}$;

∴ ক : হখ : : গ : হঘ।

৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

এক রাশি অন্য কোন রাশির যে পরিমাণে গুণিত, তাহার এক ভাগ যদি অপরের এক ভাগের সেই পরিমাণে গুণিত হয়, তবে সমুদয় রাশি সমুদয়ের যে পরিমাণে গুণিত, একের অবশিষ্ট অন্যের অবশিষ্টের সেই পরিমাণে গুণিত হইবে।

কখ রাশি গঘএর যে গুণিত, কখএর এক ভাগ কঙ, গঘএর এক ভাগ গচএর সেই পরিমাণে গুণিত; তাহা হইলে সমস্ত কখ সমস্ত গঘএর যে গুণিত, অবশিষ্ট ঙখ অবশিষ্ট চঘএর সেই গুণিত হইবে।

ছ ক ঙ খ

গ চ ঘ

কঙ রাশি গচএর যে গুণিত, কছ রাশিকে চঘএর সেই গুণিত কল্পনা কর ;
তাহা হইলে কঙ রাশি গচএর যে গুণিত, ঙছ রাশি গঘএর সেই গুণিত হইবে ; [৫ম, ১।
কিন্তু কখ রাশি গঘএর যে গুণিত, কঙ রাশি গচএর সেই গুণিত ; [কল্পনা।
অতএব কখ রাশি গঘএর যে পরিমাণে গুণিত, ঙছ রাশি গঘএর সেই পরিমাণে গুণিত ;
এই হেতু ঙছ রাশি কখএর সমান। [৫ম, স্বতঃ ১।
এই দুই সমান বস্তু হইতে কঙ বিয়োগ করিলে,
অবশিষ্ট কছ অবশিষ্ট ঙখএর সমান হইবে। [স্বতঃ ৩।

অনন্তর, কঙ রাশি গচএর যে গুণিত, কছ রাশি চঘএর সেই গুণিত হওয়াতে, [অঙ্কন।
এবং কছ রাশি ঙখএর সমান বলিয়া,
কঙ রাশি গচএর যে গুণিত, ঙখ রাশি চঘএর সেই গুণিত;
কিন্তু কখ যে পরিমাণে গঘএর গুণিত, কঙ সেই পরিমাণে গচএর গুণিত ; [কল্পনা।
সুতরাং কখ যে পরিমাণে গঘএর গুণিত, ঙখ সেই পরিমাণে চঘএর গুণিত ; অতএব এক রাশি যে পরিমাণে ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। ক ও খ দুইটী রাশি এবং গ ও ঘ যথাক্রমে তাহাদের এক এক ভাগ। আর ক = সখ, গ = সঘ;
∴ ক – গ = সখ – সঘ = স(খ-ঘ)।

৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন দুই রাশি যদি অন্য দুই রাশির সমগুণিত হয়, আবার প্রথম দুইটীর এক এক অংশ যদি অন্য দুইটীর সমগুণিত হয়, তাহা হইলে অবশিষ্ট গুলিও তাহাদের সমান বা সমগুণিত হইবে।

কখ ও গঘ দুই রাশি ঙ ও চএর সমগুণিত এবং কখ ও গঘএর এক এক অংশ কছ ও গজ, ঙ ও চএর সমগুণিত; তাহা হইলে ছখ, জঘ দুইটী অবশিষ্টও, ঙ এবং চএর সমান বা সমগুণিত হইবে।

ক ছ খ ঙ——

ট গ জ ঘ চ——

প্রথমত যদি ছখ, ঙর সমান হয়, তবে জঘও চএর সমান হইবে। গট রাশি চএর সমান কর।

পরে, কছ রাশি ঙর যে পরিমাণে গুণিত, গজ রাশি চএর সেই পরিমাণে গুণিত হওয়ায়, [কল্পনা।

এবং ছখ রাশি ঙর সমান ও গট চএর সমান বলিয়া,

কখ রাশি ঙর যে গুণিত, টজ রাশি চএর সেই গুণিত হইবে;

কিন্তু কখ, ঙর যে গুণিত, গঘ চএর সেই গুণিত, [কং।

এই হেতু টজ রাশি চএর যে গুণিত, গঘ রাশি চএর সেই গুণিত।

অতএব টজ রাশি গঘএর সমান ; [৫ম, স্বতঃ ১।

প্রত্যেক হইতে সাধারণ অংশ গজ বিয়োগ করিলে,

অবশিষ্ট টগ অবশিষ্ট জঘএর সমান হইবে ; [স্বতঃ ৩।

কিন্তু টগ রাশি চএর সমান ;

অতএব জঘ রাশি চএর সমান।

অনন্তর, যদি ছখ, ঙর গুণিত হয়,

তবে জঘও চএর সেই পরিমাণে গুণিত হইবে।

ক ছ খ ঙ——

ট গ জ ঘ চ——

ছখ রাশি ঙর যে পরিমাণে গুণিত, টগকে চএর সেই পরিমাণে গুণিত কর।

পরে, কছ রাশি ঙর যে পরিমাণে গুণিত, গজ রাশি চএর সেই পরিমাণে গুণিত হওয়াতে, [কল্পনা।

ও ছখ রাশি ঙর যে পরিমাণে গুণিত টগ রাশি চএর সেই পরিমাণে গুণিত বলিয়া, [অঙ্কন।

কখ রাশি ঙর যে পরিমাণে গুণিত, টজ রাশি চএর সেই পরিমাণে গুণিত ; [৫ম, ২।

কিন্তু কখ, ঙর যে গুণিত, গঘ রাশি চএর সেই গুণিত, [কল্পনা।

এই হেতু টজ রাশি চএর যে গুণিত, গঘ রাশি চএর সেই গুণিত ; [৫ম, স্বতঃ ১।

অতএব টজ রাশি গঘএর সমান :
প্রত্যেক হইতে সাধারণ খণ্ড গজ বিয়োগ করিলে,
অবশিষ্ট টগ অবশিষ্ট জঘএর সমান হইবে। [স্বতঃ ৩।

আবার ছথ রাশি ঙর যে গুণিত, টগ রাশি চএর সেই গুণিত হওয়াতে, [অঙ্কন।
এবং টগ রাশি জঘএর সমান বলিয়া,
ছথ, ঙর যে গুণিত জঘও চএর সেই গুণিত ; অতএব কোন দুই রাশি ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। যদি ক=সগ, খ=সঘ হয়, এবং কএর এক অংশ চ=হগ ও খএর এক অংশ ছ=হঘ হয়, তবে ক−চ =সগ−হগ=(স−হ)গ; খ−ছ=(স−হ)ঘ; যদি স−হ ১ হয়, তবে ক−চ=গ এবং খ−ছ=ঘ হইবে।

ক প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

চারি রাশির মধ্যে প্রথমের দ্বিতীয়ের সহিত যে অনুপাত, তৃতীয়ের চতুর্থের সহিত যদি সেই অনুপাত হয়, তবে প্রথমটী দ্বিতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে তৃতীয়টী চতুর্থ অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান, ও ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে।

প্রত্যেক রাশির কোন সমগুণিত কল্পনা কর ; এখানে যেন ঐ সমগুণিত প্রত্যেকের দ্বিগুণ লওয়া গেল।
তাহা হইলে যদি দ্বিগুণিত প্রথমরাশি দ্বিগুণিত দ্বিতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে দ্বিগুণিত তৃতীয়রাশি দ্বিগুণিত চতুর্থ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ; [৫ম, সং ৫।

কিন্তু যদি প্রথম রাশি দ্বিতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে প্রথমের দ্বিগুণ দ্বিতীয়ের দ্বিগুণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে; ও তাহা হইলে তৃতীয়ের দ্বিগুণ চতুর্থের দ্বিগুণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে;

অতএব তৃতীয় রাশি চতুর্থ রাশি অপেক্ষা বৃহত্তর।

এইরূপে প্রথম রাশি দ্বিতীয়ের সমান বা ক্ষুদ্রতর হইলে তৃতীয় রাশিও চতুর্থের সমান বা ক্ষুদ্রতর হইবে; অতএব চারি রাশির মধ্যে ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। ক : খ : : গ : ঘ অথবা $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ}$

∴ ক > খ হইলে, গ > ঘ হইবে; ক = খ হইলে, গ = ঘ হইবে আর ক < খ হইলে, গ < ঘ হইবে।

খ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

চারি রাশি সমানুপাতী হইলে, বিলোমেও সমানুপাতী হইবে।

কতে খতে যে রূপ, গতে ঘতে যেন সেই রূপ সম্বন্ধ; তাহা হইলে বিলোমে খতে কতে যে রূপ ঘতে গতে সেই রূপ হইবে।

ক——　　　খ——　　　গ——　　　ঘ——

ছ——　　　ঙ——　　　জ——　　　চ——

খ ও ঘএর কোন সমগুণিত ঙ ও চ এবং ক ও গএর কোন সমগুণিত ছ ও জ কল্পনা কর।

প্রথমত যেন, ঙ রাশি ছ অপেক্ষা বৃহত্তর হইল; তবে ছ রাশি ঙ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

পরে, কতে খতে যে রূপ, গতে ঘতে সেই রূপ হওয়াতে, [কল্পনা।

এবং প্রথম ও তৃতীয়ের কোন সমগুণিত ছ ও জ কল্পিত হইয়াছে বলিয়া,

এবং দ্বিতীয় ও চতুর্থের কোন সমগুণিত ঙ ও চ কল্পিত হওয়ায়,

আর ছ রাশি ঙ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হওয়াতে,

জ রাশি চ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, [৫ম, সং ৫।

অর্থাৎ চ রাশি জ অপেক্ষা বৃহত্তর।

সুতরাং ঙ রাশি ছ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে চ রাশি জ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

এই রূপে ঙ রাশি ছএর সমান হইলে চ রাশি জএর সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে।

কিন্তু ঙ ও চ, খ ও ঘএর কোন সমগুণিত, এবং ছ ও জ এই দুই রাশি ক ও গএর কোন সমগুণিত;

এই হেতু খতে কতে যে রূপ, ঘতে গতে সেই রূপ; অতএব চারি রাশি ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। ক : খ : : গ : ঘ, অথবা $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ}$ ∴ ১ ÷ $\frac{ক}{খ}$ = ১ ÷ $\frac{গ}{ঘ}$; অথবা $\frac{খ}{ক} = \frac{ঘ}{গ}$; অর্থাৎ খ : ক : : ঘ : গ।

গ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

প্রথম রাশি দ্বিতীয়ের যে পরিমাণে গুণিত বা যত অংশ, তৃতীয় রাশি চতুর্থের সেই পরিমাণে গুণিত বা তত অংশ হইলে প্রথমে দ্বিতীয়ে যে অনুপাত, তৃতীয়ে চতুর্থে সেই অনুপাত হইবে।

প্রথমত ক রাশি খএর যে গুণিত, গ রাশি ঘএর সেই গুণিত হইলে, কতে খতে যে অনুপাত, গতে ঘতে সেই অনুপাত হইবে।

ক—— খ—— গ—— ঘ——

ঙ——— ছ——— চ——— জ———

ঙ ও চ এই দুই রাশিকে ক ও গএর কোন সমগুণিত এবং ছ ও জ এই দুই রাশিকে খ ও ঘএর কোন সমগুণিত কল্পনা কর।

পরে, ক রাশি খএর যে গুণিত, গ রাশি ঘএর সেই গুণিত বলিয়া, [কল্পনা।

আর ঙ রাশি কএর যে গুণিত, চ রাশি গএর সেই গুণিত হওয়াতে, [অঙ্কন।

ঙ, খএর যে গুণিত. চ রাশি ঘএর সেই গুণিত, [৫ম, ৩।

অর্থাৎ ঙ ও চ এই দুই রাশি খ ও ঘএর সমগুণিত,

আর ছ ও জ, খ ও ঘএর সমগুণিত; [অঙ্কন।

এই হেতু যদি ছ, খএর যে গুণিত, ঙ তদপেক্ষা বৃহত্তর পরিমাণে খএর গুণিত হয়, তবে জ রাশি ঘএর যে গুণিত, চ তদপেক্ষা বৃহত্তর পরিমাণে ঘএর গুণিত হইবে,

অর্থাৎ যদি ছ অপেক্ষা ঙ বৃহত্তর হয়, জ অপেক্ষা চ বৃহত্তর হইবে।

এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে, যে ঙ, ছএর সমান হইলে চ রাশি জএর সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে।

কিন্তু ঙ, চ এই দুই রাশি ক ও গএর সমগুণিত এবং ছ ও জ এই দুই রাশি খ ও ঘএর সমগুণিত কল্পিত হইয়াছে। এই হেতু কতে খতে যে অনুপাত, গতে ঘতে সেই অনুপাত।

অনন্তর, যদি ক রাশি খএর যে অংশ, গ রাশি ঘএর সেই অংশ হয়, তাহা হইলে কতে খতে যে অনুপাত, গতে ঘতে সেই অনুপাত হইবে।

ক—— খ——— গ—— ঘ-

ক রাশি খএর যে অংশ, গ রাশি ঘএর সেই অংশ হওয়াতে, খ রাশি কএর যে গুণিত, ঘ রাশি গএর সেই গুণিত হইবে; তাহা হইলে পূর্ব্ব উপপাদ্য অনুসারে খতে কতে যে অনুপাত, ঘতে গতে সেই অনুপাত; সুতরাং বিলোমে, কতে খতে যে অনুপাত, গতে ঘতে সেই অনুপাত; [৫ম, খ।

অতএব প্রথম রাশি ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। ক = সখ ; গ = সঘ ∴ ক ÷ খ = স এবং গ ÷ ঘ = স ∴ ক ÷ খ = গ ÷ ঘ অথবা ক : খ :: গ : ঘ।

আবার, $ক = \frac{খ}{স}$ এবং $গ = \frac{ঘ}{স}$ ∴ সক = খ, সগ = ঘ ;

অথবা স = খ ÷ ক এবং স = ঘ ÷ গ ∴ খ ÷ ক = ঘ ÷ গ

অথবা খ : ক :: ঘ : গ ; ∴ ক : খ :: গ : ঘ। [৫ম, খ।

ঘ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

চারি রাশি যদি সমানুপাতী হয় ও প্রথম রাশি যদি দ্বিতীয়ের গুণিত বা কোন অংশ হয়, তবে তৃতীয় রাশি চতুর্থের সেই পরিমাণে গুণিত বা তত অংশ হইবে।

কতে খতে যে অনুপাত, গতে ঘতে সেই অনুপাত॥ প্রথমত, ক রাশি খএর কোন গুণিত হইলে গ রাশিও ঘএর সেই গুণিত হইবে।

কএর সমান করিয়া ঙ অঙ্কিত কর; এবং ক অথবা ঙ রাশি খএর যে পরিমাণে গুণিত, চকে ঘএর সেই পরিমাণে গুণিত কর।

পরে, কতে খতে যে রূপ, গতে ঘতে সেই রূপ বলিয়া, [কল্পনা।

আর দ্বিতীয় রাশি খ ও চতুর্থ রাশি ঘএর কোন সমগুণিত ঙ ও চ কল্পিত হওয়াতে,

কতে ঙতে যে রূপ, গতে চতে সেই রূপ; [৫ম, ৪, অনু।

কিন্তু ক রাশি ঙর সমান, [অঙ্কন।

এই হেতু গ রাশি চএর সমান; [৫ম, কং।

আর ক রাশি খএর যে গুণিত, চ রাশি ঘএর সেই গুণিত হওয়াতে, [অঙ্কন।

ক রাশি খএর যে গুণিত, গ রাশি ঘএর সেই গুণিত হইয়াছে।

অনন্তর, যদি ক রাশি খএর কোন নির্দ্দিষ্ট অংশ হয়, তবে গ রাশিও ঘএর সেই অংশ হইবে।

ক—— খ——— গ— ঘ——

কতে খতে যে রূপ, গতে ঘতে সেই রূপ হওয়াতে,
বিলোমে, খতে কতে যে রূপ ঘতে গতে সেই রূপ [৫ম,খ।
কিন্তু ক রাশি খএর কোন অংশ, [কল্পনা।
অর্থাৎ খ রাশি কএর কোন গুণিত;
তাহা হইলে পূর্ব্ব উপপত্তি অনুসারে ঘও সেই পরিমাণে গএর গুণিত হইবে;
অর্থাৎ ক রাশি খএর যত অংশ, গ রাশি ঘএর তত অংশ;
অতএব চারি রাশি ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। প্রথমত, যদি ক = সখ হয়, তবে গ = সঘ হইবে।

$$ক = সখ \therefore \frac{ক}{খ} = স, \text{ কিন্তু} \frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ} \therefore \frac{গ}{ঘ} = স, \text{ অর্থাৎ } গ = সঘ।$$

$$\text{আবার, } ক = \frac{খ}{স} \text{ হইলে, } \frac{ক}{খ} = \frac{১}{স}; \text{ কিন্তু} \frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ} \therefore \frac{গ}{ঘ} = \frac{১}{স},$$

$$\text{অর্থাৎ } গ = \frac{ঘ}{স}।$$

৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সমান সমান রাশির অন্য কোন রাশির সহিত একই অনুপাত হইয়া থাকে; এবং এক রাশির, সমান সমান রাশির সহিত অনুপাত একই হয়।

ক ও খ যেন সমান সমান রাশি এবং গ অন্য কোন রাশি, তাহা হইলে ক ও খ এই দুইএর প্রত্যেক রাশির, গএর সহিত একই অনুপাত হইবে; এবং গএর, ক ও খ এই দুই রাশির প্রত্যেকের সহিত একই অনুপাত হইবে।

ক ও খএর কোন সমগুণিত ঘ ও ঙ এবং গএর কোন গুণিত চ কল্পনা কর।

পরে, ঘ রাশি কএর যে গুণিত, ঙ রাশি খএর সেই গুণিত হওয়াতে, [অঙ্কন।

এবং ক রাশি খএর সমান বলিয়া, [কল্পনা।

ঘ রাশি ঙর সমান; [৫ম, স্বতঃ ১।

এই হেতু ঘ রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে ঙও চ অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে;

কিন্তু ঘ ও ঙ এই দুই রাশি ক ও খএর কোন সমগুণিত, এবং চ রাশি গএর কোন গুণিত; [অঙ্কন।

সুতরাং কতে গতে যে রূপ, খতে গতে সেই রূপ।

[৫ম, সং ৫।

আবার গতে কতে যে রূপ, গতে খতে সেই রূপ হইবে; কেননা, পূর্ব্বপ্রকার চিত্র অঙ্কিত করিলে সেই রূপে প্রতিপন্ন হইবে যে, ঘ রাশি ঙর সমান;

অতএব যদি চ রাশি ঘ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে চও

ঙ অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে।

কিন্তু চ রাশি গএর কোন গুণিত এবং ঘ ও ঙ, ক ও খএর সমগুণিত। [অঙ্কন।

সুতরাং গতে কতে যে রূপ, গতে খতে সেই রূপ;

[৫ম, সং ৫।

অতএব সমান সমান রাশির ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। ক = খ.·.ক ÷ গ = খ ÷ গ অর্থাৎ ক : খ : : গ : ঘ; আবার গ ÷ ক = গ ÷ খ .·. গ : ক : : গ : খ।

৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই অসমান রাশির মধ্যে বৃহত্তরের অন্য কোন রাশির সহিত অনুপাত, ক্ষুদ্রতরের সেই রাশির সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে; এবং কোন এক রাশির দুই অসমান রাশির মধ্যে ক্ষুদ্রতরের সহিত অনুপাত, বৃহত্তরের সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

কখ, খগ দুই অসমান রাশির মধ্যে কখ বৃহত্তর এবং ঘ অন্য কোন রাশি। কখএর ঘএর সহিত অনুপাত, খগএর ঘএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে এবং ঘএর খগএর সহিত অনুপাত, ঘএর কখএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

(১ম চিত্র) (২য় চিত্র) (৩য় চিত্র)

কগ, গখ এই দুইএর মধ্যে যে রাশিটী অন্য অপেক্ষা বৃহত্তর নয়, তাহা যদি ঘ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর না হয়, (১ম চিত্র) তাহা হইলে কগ, গখএর দ্বিগুণ করিয়া ঙচ, চছ অঙ্কিত কর, কিন্তু কগ, গখএর মধ্যে যেটী অন্য অপেক্ষা বৃহত্তর নয়, তাহা যদি ঘ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, (২য় এবং ৩য় চিত্র) তবে সেই রাশিটী কগই হউক বা গখই হউক, গুণন দ্বারা তাহাকে বৃদ্ধি করিয়া ঘ অপেক্ষা বৃহত্তর করা যাইতে পারে। অতএব তাহাকে ঘ অপেক্ষা বৃহত্তর করিয়া বৃদ্ধি কর ও অপর রাশিকেও তত গুণ বৃদ্ধি কর। এই রূপে বৃদ্ধি করিয়া ঙচ রাশি কগএর যে গুণিত চছ রাশিকে গখএর সেই গুণিত করিলে ঙচ ও চছ প্রত্যেকেই ঘ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

আর যে পর্য্যন্ত না ঘএর কোন গুণিত চছ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তত ক্ষণ প্রত্যেক চিত্রে ঘএর দ্বিগুণ ত্রিগুণ ইত্যাদি করিয়া জ, ট প্রভৃতি গুণিত লইতে থাক। এই

রূপে গুণিত লওয়াতে ঠ যেন চছ অপেক্ষা প্রথম বৃহত্তর হইল এবং ঘএর অন্যান্য গুণিত মধ্যে ট রাশি যেন ঠএর অব্যবহিত ক্ষুদ্রতর হইল।

পরে, ঘএর গুণিত গুলির মধ্যে ঠ রাশি সর্ব্বাগ্রে চছ অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে, [অঙ্কন।
উহার অব্যবহিত পূর্ব্ববর্ত্তী গুণিত ট রাশি চছ অপেক্ষা বৃহত্তর নহে;
অর্থাৎ চছ, ট অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নহে;
আর ঙচ রাশি কগএর যে গুণিত, চছ রাশি গখএর সেই গুণিত হওয়াতে, [অঙ্কন।
চছ রাশি গখএর যে গুণিত, ঙছ রাশি কখএর সেই গুণিত, [৫ম, ১।
অর্থাৎ ঙছ ও চছ এই দুই রাশি কখ ও গখএর সমগুণিত।

আবার চছ রাশি যে ঠ অপেক্ষা লঘুতর নয়, ইহা প্রতিপন্ন হইয়াছে বলিয়া,
এবং ঙচ রাশি ঘ অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে, [অঙ্কন।
সমস্ত ঙছ রাশি ট ও ঘএর সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর;
কিন্তু ট ও ঘএর সমষ্টি ঠএর সমান; [অঙ্কন
এই হেতু ঙছ রাশি ঠ অপেক্ষা বৃহত্তর,
কিন্তু চছ রাশি ঠ অপেক্ষা বৃহত্তর নহে;
আর ঙছ ও চছ এই দুই রাশি যে কখ ও খগএর সমগুণিত তাহা প্রতিপন্ন হইয়াছে;
এবং ঠ রাশি ঘএর কোন গুণিত, [অঙ্কন
এই হেতু কখএর ঘএর সহিত অনুপাত, খগএর ঘএর

সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর। [৫ম, সং ৭।

অনন্তর, ঘএর খগএর সহিত অনুপাত ঘএর কখএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

পূর্ব্বরূপে অঙ্কন দ্বারা প্রতিপন্ন হইবে যে, ঠ রাশি চছ অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু ঙছ অপেক্ষা বৃহত্তর নহে;

আর ঠ রাশি ঘএর কোন গুণিত, [অঙ্কন।

এবং চছ ও ঙছ এই দুই রাশি গখ ও কখএর সমগুণিত;

সুতরাং ঘএর গখএর সহিত অনুপাত ঘএর কখএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর; [৫ম, সং ৭।

অতএব দুই অসমান রাশির ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজ ঃ উপ ঃ। যদি ক, খ দুই অসমান রাশি ও গ অন্য কোন রাশি হয় আর যদি ক > খ হয়, তবে ক ÷ গ > খ ÷ গ, ∴ ক : গ > খ : গ। আবার, গ ÷ ক < গ ÷ খ; ∴ গ ÷ ক < গ ÷ খ অথবা গ : খ > গ : ক।

৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যে সকল রাশি অন্য কোন রাশির সহিত একই অনুপাত বিশিষ্ট, তাহারা পরস্পর সমান এবং কোন রাশি যে সকল রাশির সহিত একই অনুপাত বিশিষ্ট, তাহারা পরস্পর সমান।

প্রথমত ক ও খ এই দুই রাশি প্রত্যেকে গএর সহিত একই অনুপাত বিশিষ্ট হইলে, ক রাশি খএর সমান হইবে।

যদি সমান না হয়, তাহা হইলে একটী অবশ্যই অন্যটী অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে; ক যেন দুইএর মধ্যে বৃহত্তর হইল। তাহা হইলে পূর্ব্ব প্রতিজ্ঞার রীতি অনুসারে প্রতিপন্ন হইবে যে, ক ও খএর কোন সমগুণিত এবং গএর কোন গুণিত এরূপে কল্পনা করা যাইতে পারে যে, কএর গুণিত, গএর গুণিত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে, কিন্তু খএর গুণিত, গএর গুণিত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে না। সেই রূপে ঘ ও ঙ এই দুই রাশি যেন ক ও খএর সমগুণিত এবং চ রাশি যেন গএর কোন গুণিত কল্পিত হইল, অতএব ঘ রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু ঙ রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর নহে।

পরে, কতে গতে যে রূপ, খতে গতে সেই রূপ বলিয়া, [কল্পনা।

এবং ঘ ও ঙ এই দুই রাশি ক ও খএর কোন সমগুণিত এবং চ রাশি গএর কোন গুণিত কল্পিত হওয়ায়,

আর ঘ রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে, [অঙ্কন।

ঙ রাশিও চ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে; [৫ম, সং ৫।

কিন্তু ঙ রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর নহে; [অঙ্কন।

অতএব এরূপ হওয়া অসম্ভব;

এই হেতু ক ও খ অসমান নয়, অর্থাৎ সমান।

অনন্তর, গতে কতে যে অনুপাত, গতে খতে সেই অনুপাত হইলে, ক রাশি খএর সমান হইবে। যদি সমান না হয়, একটী বৃহত্তর হইবে; ক যেন বৃহত্তর হইল; তাহা হইলে ৮ম প্রতিজ্ঞার রীতি অনুসারে প্রতিপন্ন হইবে যে, গএর কোন গুণিত চ এবং ক ও খএর কোন সমগুণিত ঘ ও ঙ এরূপে কল্পনা করা যাইতে পারে যে, চ রাশি ঙ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে কিন্তু ঘ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে না।

এক্ষণে, গতে কতে যে অনুপাত, গতে খতে সেই অনুপাত হওয়াতে, [কল্পনা।

এবং প্রথমের গুণিত চ দ্বিতীয়ের গুণিত ঙ অপেক্ষা বৃহত্তর বলিয়া, [অঙ্কন।

তৃতীয়ের গুণিত চ চতুর্থের গুণিত ঘ অপেক্ষা বৃহত্তর; [৫ম, সং ৫।

কিন্তু চ রাশি ঘ অপেক্ষা বৃহত্তর নহে; [অঙ্কন।

অতএব এরূপ হওয়া অসম্ভব।

সুতরাং ক ও খ অসমান নহে; অর্থাৎ সমান;

অতএব যে সকল রাশি ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। ক : গ : : খ : গ অথবা $\frac{ক}{গ} = \frac{খ}{গ}$ ∴ ক = খ।

আবার, গ : ক : : গ . খ অথবা $\frac{গ}{ক} = \frac{গ}{খ}$ ∴ $\frac{১}{ক} = \frac{১}{খ}$ ∴ ক = খ।

১০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই রাশির মধ্যে যে রাশির কোন এক রাশির সহিত অনুপাত অন্য রাশির তাহার সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর, সেই রাশিটীও বৃহত্তর; এবং কোন এক রাশির দুইএর মধ্যে যাহার সহিত অনুপাত অন্যের সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর, সেই রাশিটী ক্ষুদ্রতর।

প্রথমত, কএর গএর সহিত অনুপাত, খএর গএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে ক রাশি খ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

ক——— ঘ———
গ—— চ——
খ—— ঙ——

কএর গএর সহিত অনুপাত, খএর গএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে, ক ও খএর কোন সমগুণিত ও গএর কোন গুণিত এরূপে কল্পনা করা যাইতে পারে যে, কএর গুণিত গএর গুণিত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে, কিন্তু খএর গুণিত গএর গুণিত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে না।

[৫ম, সং ৭।

ঘ ও ঙ যেন ক ও খএর সেই রূপ কোন সমগুণিত ও চ রাশি গএর কোন গুণিত। তাহা হইলে ঘ রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু ঙ রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর নহে;

অতএব ঘ রাশি ঙ অপেক্ষা বৃহত্তর;

আবার ঘ ও ঙ রাশি ক ও খএর সমগুণিত হওয়াতে,

এবং ঘ রাশি ঙ অপেক্ষা বৃহত্তর বলিয়া,

ক রাশি খ অপেক্ষা বৃহত্তর। [৫ম, স্বতঃ ৪।

অনন্তর, গএর খএর সহিত অনুপাত, গএর কএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, খ রাশি ক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

কারণ, গএর কোন গুণিত চ এবং খ ও কএর কোন সমগুণিত ঙ ও ঘ এরূপে কল্পনা করা যাইতে পারে যে, চ রাশি ঙ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে কিন্তু ঘ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে না; [৫ম, সং ৭।

অতএব ঙ রাশি ঘ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

আবার ঙ ও ঘ রাশি খ ও কএর সমগুণিত হওয়াতে,

এবং ঙ রাশি ঘ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বলিয়া,

খ রাশি ক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর; [৫ম, স্বতঃ ৪।

অতএব দুই রাশির মধ্যে ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজ ঃ উপ ঃ। ক : গ > খ : গ অথবা $\frac{\text{ক}}{\text{গ}} > \frac{\text{খ}}{\text{গ}}$ ∴ ক > খ।

আবার গ : খ > গ : ক, অথবা $\frac{\text{গ}}{\text{খ}} > \frac{\text{গ}}{\text{ক}}$ ∴ গক > গখ,

∴ ক > খ অথবা খ < ক।

১১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যে সকল অনুপাত অন্য কোন অনুপাতের সমান, তাহারা পরস্পর সমান।

কতে খতে যে রূপ, গতে ঘতে যেন সেই রূপ এবং গতে ঘতে যে রূপ, ঙতে চতে যেন সেই রূপ; তাহা হইলে কতে খতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ হইবে।

ছ— —	জ———	ট———
ক— -	গ———	ঙ———
খ—	ঘ———	চ—
ঠ --	ড-	ঢ-

ক, গ ও ঙর কোন সমগুণিত ছ, জ ও ট; এবং খ, ঘ ও চএর কোন সমগুণিত ঠ, ড ও ঢ কল্পনা কর।

পরে, কতে খতে যে রূপ, গতে ঘতে সেই রূপ হওয়াতে, [কল্পনা।

এবং ক ও গএর কোন সমগুণিত ছ ও জ আর খ ও ঘএর কোন সমগুণিত ঠ ও ড কল্পিত হইয়াছে বলিয়া, [অঙ্কন।

ছ রাশি ঠ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে জ রাশি ড অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে। [৫ম, সং ৫।

আবার গতে ঘতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ হওয়াতে, [কল্পনা।

এবং গ ও ঙর কোন সমগুণিত জ ও ট আর ঘ ও চএর কোন সমগুণিত ড ও ঢ কল্পিত হইয়াছে বলিয়া, [অঙ্কন।

জ রাশি ড অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে ট রাশি ঢ অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান, এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে; [৫ম, সং ৫।

কিন্তু ছ রাশি ঠ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে জ রাশি ড অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান, এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে, প্রতিপন্ন হইয়াছে;

সুতরাং ছ রাশি ঠ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, ট রাশি ঢ অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে।

আর ছ ও ট রাশি ক ও ঙর সমগুণিত এবং ঠ ও ঢ রাশি খ ও চএর সমগুণিত; এই হেতু কতে খতে যে রূপ, গতে ঘতে সেই রূপ হইবে; [৫ম, সং ৫।

অতএব যে সকল অনুপাত ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। ক : খ : : গ : ঘ এবং গ : ঘ : : ঙ : চ,

অথবা $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ}$ এবং $\frac{গ}{ঘ} = \frac{ঙ}{চ}$ $\therefore \frac{ক}{খ} = \frac{ঙ}{চ}$ $\therefore$ ক : খ : : ঙ : চ।

১২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কতিপয় রাশি সমানুপাতী হইলে কোন একটী অগ্রবর্ত্তীর তাহার পরবর্ত্তীর সহিত যে অনুপাত, সমস্ত অগ্রবর্ত্তী গুলির সমস্ত পরবর্ত্তী গুলির সহিত সেই অনুপাত হইবে।

ক, খ, গ, ঘ, ঙ, চ কতিপয় সমানুপাতী রাশি অর্থাৎ কতে খতে যে অনুপাত, গতে ঘতে সেই অনুপাত এবং ঙতে চতেও সেই অনুপাত; তাহা হইলে কতে খতে যে

অনুপাত, একত্রকৃত ক, গ ও ঙতে একত্রকৃত খ, ঘ ও চতে সেই অনুপাত হইবে।

ছ——	জ——	ট——
ক——	গ——	ঙ——
খ——	ঘ——	চ——
ঠ——	ড——	ঢ——

ক, গ ও ঙর কোন সমগুণিত ছ, জ, ট এবং খ, ঘ ও চএর কোন সমগুণিত ঠ, ড ও ঢ কল্পনা কর।

পরে, কতে খতে যে অনুপাত, গতে ঘতে সেই অনুপাত এবং ঙতে চতেও সেই অনুপাত হওয়াতে, আর ছ, জ ও ট রাশি ক, গ, ও ঙর সমগুণিত এবং ঠ, ড ও ঢ রাশি খ, ঘ ও চএর সমগুণিত বলিয়া, [অঙ্কন। ছ রাশি ঠ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে জ রাশি ড অপেক্ষা ও ট রাশি ঢ অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে ; [৫ম, সং ৫।
অতএব ছ রাশি ঠ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে একত্রকৃত ছ, জ ও ট একত্রকৃত ঠ, ড ও ঢ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে; সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে।

কিন্তু ছ রাশি এবং একত্রকৃত ছ, জ ও ট ইহারা ক রাশি এবং একত্রকৃত ক, গ ও ঙর সমগুণিত ; [৫ম, ১।
আর ঠ রাশি এবং একত্রকৃত ঠ, ড ও ঢ ইহারা খ রাশি এবং একত্রকৃত খ, ঘ ও চএর সমগুণিত, [৫ম, ১।
এই হেতু কতে খতে যে অনুপাত, একত্রকৃত ক, গ, ও ঙতে একত্রকৃত খ, ঘ ও চতে সেই অনুপাত ; [৫ম, সং ৫।

অতএব কতিপয় রাশি ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। $\frac{ক}{খ}=\frac{গ}{ঘ}=\frac{ঙ}{চ}$ ∴ কঘ = খগ ; কচ = খঙ,

∴ কঘ + কচ = খগ + খঙ ; সমীকরণের দুই পার্শ্বে কখ যোগ করিলে, কখ + কঘ + কচ = খক + খগ + খঙ ; অথবা, $ক(খ + ঘ + চ) = খ(ক + গ + ঙ)$ ∴ $\frac{ক}{খ} = \frac{ক + গ + ঙ}{খ + ঘ + চ}$:

অথবা, ক : খ :: ক + গ + ঙ : খ + ঘ + চ।

১৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

প্রথমে দ্বিতীয়ে যে অনুপাত, যদি তৃতীয়ে চতুর্থে সেই অনুপাত হয় এবং তৃতীয়ের চতুর্থের সহিত অনুপাত যদি পঞ্চমের ষষ্ঠের সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে প্রথমের দ্বিতীয়ের সহিত অনুপাতও পঞ্চমের ষষ্ঠের সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

প্রথম রাশি কতে দ্বিতীয় রাশি খতে যে অনুপাত, যদি তৃতীয় রাশি গতে চতুর্থ রাশি ঘতে সেই অনুপাত হয়, কিন্তু তৃতীয় রাশি গএর চতুর্থ রাশি ঘএর সহিত অনুপাত যদি পঞ্চম রাশি ঙর ষষ্ঠ রাশি চএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তাহা হইলে ক ও খএর অনুপাত ঙ ও চএর অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

ড———	ছ———	জ———
ক———	গ———	ঙ———
খ———	ঘ———	চ———
ঢ———	ট———	ঠ———

গএর ঘএর সহিত অনুপাত, ঙর চএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে, গ ও ঙর কোন সমগুণিত এবং ঘ ও চএর কোন সমগুণিত এরূপে কল্পিত হইতে পারে যে, গএর গুণিত ঘএর গুণিত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে কিন্তু ঙর গুণিত চএর গুণিত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে না ; [৫ম, সং ৭।

ছ ও জ রাশি গ ও ঙর এবং ট ও ঠ রাশি যেন ঘ ও চএর সেই রূপ সমগুণিত ;

অতএব ছ রাশি ট অপেক্ষা বৃহত্তর, কিন্তু জ রাশি ঠ অপেক্ষা বৃহত্তর নহে।

আর ছ রাশি গএর যে গুণিত, ড রাশি কএর সেই গুণিত এবং ট রাশি ঘএর যে গুণিত, ঢ রাশি খএর সেই গুণিত কল্পনা কর।

পরে, কতে খতে যে রূপ, গতে ঘতে সেই রূপ হওয়াতে, [কল্পনা।

আর ড ও ছ রাশি ক ও গএর সমগুণিত এবং ঢ ও ট রাশি খ ও ঘএর সমগুণিত বলিয়া, [অঙ্কন।

ড রাশি ঢ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে ছ রাশি ট অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে ; [৫ম, সং ৫।

কিন্তু ছ রাশি ট অপেক্ষা বৃহত্তর ;

এই হেতু ড রাশি ঢ অপেক্ষা বৃহত্তর ;

কিন্তু জ রাশি ঠ অপেক্ষা বৃহত্তর নহে। [অঙ্কন।

আর ড ও জ রাশি ক ও ঙর সমগুণিত এবং ঢ ও ঠ রাশি

খ ও চএর সমগুণিত ; [অঙ্কন।

এই হেতু কএর খএর সহিত অনুপাত গুর চএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর ; অতএব প্রথমে দ্বিতীয়ে ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। ক : খ :: গ : ঘ এবং গ : ঘ > চ : ছ ; অথবা $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ}$ এবং $\frac{গ}{ঘ} > \frac{চ}{ছ}$ $\therefore \frac{ক}{খ} > \frac{চ}{ছ}$; অর্থাৎ ক : খ > চ : ছ।

১৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

প্রথমে দ্বিতীয়ে যে অনুপাত, যদি তৃতীয়ে চতুর্থে সেই অনুপাত হয়, তবে প্রথম রাশি তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, দ্বিতীয় রাশি চতুর্থ অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে।

প্রথম রাশি কতে দ্বিতীয় রাশি খতে যে অনুপাত, তৃতীয় রাশি গতে চতুর্থ রাশি ঘতে যেন সেই অনুপাত ; তাহা হইলে যদি ক রাশি গ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, খ রাশিও ঘ অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে।

১	২	৩
ক————	ক————	ক————
খ——	খ——	খ——
গ———	গ———	গ————
ঘ——	ঘ——	ঘ——

প্রথমত, ক রাশি গ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে খ রাশি ঘ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। (১ম চিত্র।)

ক, গ অপেক্ষা বৃহত্তর ও খ আর একটী রাশি বলিয়া, [কল্পনা।

ক রাশির খএর সহিত অনুপাত, গএর খএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর, [৫ম, ৮।

কিন্তু কতে খতে যে রূপ, গতে ঘতে সেই রূপ, [কং।

অতএব গএর ঘএর সহিত অনুপাত গএর খএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর, [৫ম, ১৩।

কিন্তু কোন এক রাশির অন্য দুইএর মধ্যে যে রাশির সহিত বৃহত্তর অনুপাত, সেই রাশিটী ক্ষুদ্রতর। [৫ম, ১০।

সুতরাং ঘ রাশি খ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অর্থাৎ খ রাশি ঘ অপেক্ষা বৃহত্তর।

দ্বিতীয়ত, ক রাশি গএর সমান হইলে খও ঘএর সমান হইবে; (২য় চিত্র।)

কএর খএর সহিত যে অনুপাত, গএর অর্থাৎ কএর ঘএর সহিত সেই অনুপাত হওয়াতে,

খ রাশি ঘএর সমান।

তৃতীয়ত, ক রাশি গ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে খও ঘ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

গ রাশি ক অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে,

এবং গতে ঘতে যে রূপ, কতে খতে সেই রূপ বলিয়া, [অং।

প্রথম প্রকরণ অনুসারে, ঘ রাশি খ অপেক্ষা বৃহত্তর;

অর্থাৎ খ রাশি ঘ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর;

অতএব প্রথমে দ্বিতীয়ে ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। ক : খ : : গ : ঘ অথবা $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ}$;

$\therefore \frac{ক}{খ} \times \frac{খ}{গ} = \frac{গ}{ঘ} \times \frac{খ}{গ}$ অথবা $\frac{ক}{গ} = \frac{খ}{ঘ}$;

অতএব ক >, = বা < গ হইলে খ >, = বা < ঘ হইবে, কারণ তাহা না হইলে $\frac{ক}{গ}$ এই ভগ্ন রাশি $\frac{খ}{ঘ}$-এর সমান হইতে পারে না।

১৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

রাশি সকল পরস্পর যে অনুপাত বিশিষ্ট, তাহাদিগের সমগুণিতেরাও সেই অনুপাত বিশিষ্ট।

কখ ও ঘঙ ইহারা গ ও চএর সমগুণিত ; তাহা হইলে গতে চতে যে রূপ, কখতে ঘঙতে সেই রূপ হইবে।

ক ছ জ খ　　　　ঘ ট ঠ ঙ

গ—　　　　চ—

কখ রাশি গএর যে গুণিত, ঘঙ রাশি চএর সেই গুণিত বলিয়া, [কল্পনা।
কখতে গএর সমান যত গুলি রাশি আছে, ঘঙতে চএর সমান তত গুলি রাশি থাকিবে।
প্রত্যেকে গএর সমান হয়, এমন করিয়া কখকে কছ, ছজ, জখ এই কয় অংশে ভাগ কর ;
এবং চএর সমান করিয়া ঘঙকে ঘট, টঠ, ঠঙ এই কয় অংশে ভাগ কর।

অতএব কছ, ছজ, জখ ইহাদের সংখ্যা, ঘট, টঠ, ঠঙ ইহাদের সংখ্যার সমান।

একক্ষণে, কছ, ছজ, জখ পরস্পর সমান হওয়াতে, [অং। এবং ঘট, টঠ, ঠঙ পরস্পর সমান বলিয়া,

কছতে ঘটতে যে রূপ, ছজতে টঠতে সেই রূপ এবং জখতে ঠঙতেও সেই রূপ; [৫ম, ৭।

কিন্তু একটা পূর্ব্ববর্ত্তীতে তাহার পরবর্ত্তীতে যে রূপ, একত্রকৃত সমস্ত পূর্ব্ববর্ত্তীতে একত্রকৃত সমস্ত পরবর্ত্তীতে সেই রূপ। [৫ম, ১২।

এই হেতু কছতে ঘটতে যে রূপ, কখতে ঘঙতে সেই রূপ; কিন্তু কছ রাশি গএর এবং ঘট রাশি চএর সমান;

এজন্য গতে চতে যে রূপ, কখতে টঙতে সেই রূপ; অতএব রাশি সকল পরস্পর ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। ক এবং খ দুই রাশি; সক, সখ তাহাদের সমগুণিত: $\frac{ক}{খ} = \frac{সক}{সখ}$ ∴ ক : খ :: সক : সখ।

১৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

এক জাতীয় চারি রাশি সমানুপাতী হইলে, একান্তরেও সমানুপাতী হইবে।

ক, খ, গ, ঘ, এক জাতীয় চারি সমানুপাতী রাশি; অর্থাৎ কতে খতে যে রূপ, গতে ঘতে সেই রূপ; তাহা

হইলে কতে গতে যে রূপ, খতে ঘতে সেই রূপ হইবে।

ঙ———	ছ———
ক——	গ——
খ——	ঘ——
চ———	জ———

ক ও খএর কোন সমগুণিত ঙ ও চ কল্পনা কর এবং গ ও ঘএর কোন সমগুণিত ছ ও জ কল্পনা কর।

পরে, ঙ রাশি কএর যে গুণিত, চ রাশি খএর সেই গুণিত হওয়ায়, আর রাশি সকল যে অনুপাত বিশিষ্ট, তাহাদের সমগুণিতেরাও সেই অনুপাত বিশিষ্ট হয় বলিয়া, [৫ম, ১৫।

কতে খতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ ;

কিন্তু কতে খতে যে রূপ, গতে ঘতে সেই রূপ ; [কল্পনা।

অতএব গতে ঘতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ। [৫ম, ১১।

আবার ছ ও জ রাশি গ ও ঘএর সমগুণিত বলিয়া,

গতে ঘতে যে রূপ, ছতে জতে সেই রূপ, [৫ম, ১৫।

কিন্তু পূর্ব্বে প্রমাণ হইয়াছে যে, গতে ঘতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ ;

অতএব ঙতে চতে যে রূপ, ছতে জতে সেই রূপ। [৫ম, ১১।

কিন্তু সমানুপাতী চারি রাশির প্রথম তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে দ্বিতীয় চতুর্থ অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান, এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইয়া থাকে ;

[৫ম, ১৪।

অতএব ঙ রাশি ছ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে চ রাশি জ

অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান, এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে।

কিন্তু ঙ ও চ, ক ও খএর সমগুণিত এবং ছ ও জ, গ ও ঘএর সমগুণিত; [অঙ্কন।

সুতরাং কতে গতে যে রূপ, খতে ঘতে সেই রূপ;

[৫ম, সং ৫।

অতএব এক জাতীয় ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। ক : খ : : গ : ঘ অথবা $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ}$;

$\therefore \frac{ক}{খ} \times \frac{খ}{গ} = \frac{গ}{ঘ} \times \frac{খ}{গ}$ অথবা $\frac{ক}{গ} = \frac{খ}{ঘ}$, বা ক : গ : : খ : ঘ।

১৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

একত্র করিলে যদি রাশি সকল সমানুপাতী হয়, তবে পৃথক্ করিলেও তাহারা সমানুপাতী হইবে, অর্থাৎ দুই রাশির সমষ্টির তাহাদের কোন একটার সহিত যে অনুপাত, অপর রাশিদ্বয়ের সমষ্টিরও তাহাদের কোন একটার সহিত সেই অনুপাত হইলে, প্রথম দুই রাশির অবশিষ্টের অপর রাশির সহিত যে অনুপাত, দ্বিতীয় দুইরাশির অবশিষ্টের অপর রাশির সহিত সেই অনুপাত হইবে।

কখ, খঙ, গঘ, ঘচ এই চারি রাশি, একত্র হইয়া যেন সমানুপাতী হইয়াছে; অর্থাৎ কখতে খঙতে যে অনু-

পাত, গঘতে ঘচতে সেই অনুপাত ; তাহা হইলে পৃথক্ করিলেও তাহারা সমানুপাতী হইবে ; অর্থাৎ কঙতে ঙখতে যে অনুপাত, গচতে চঘতে সেই অনুপাত হইবে।

ছ জ ট ভ ঠ ড ঢ ত

ক ঙ খ গ চ ঘ

কঙ, ঙখ, গচ ও চঘএর ছজ, জট, ঠড ও ডঢ সমগুণিত ; আবার ঙখ, চঘএর টভ, ঢত সমগুণিত কল্পনা কর।

পরে, ছজ রাশি কঙর যে গুণিত, জট রাশি ঙখএর সেই গুণিত হওয়াতে,

ছজ রাশি কঙর যে গুণিত, ছট রাশি কখএর সেই গুণিত, [৫ম, ১।

কিন্তু ছজ রাশি কঙর যে গুণিত, ঠড রাশি গচএর সেই গুণিত ; [অঙ্কন।

এই হেতু ছট রাশি কখএর যে গুণিত, ঠড রাশি গচএর সেই গুণিত।

আবার, ঠড রাশি গচএর যে গুণিত, ডঢ রাশি চঘএর সেই গুণিত হওয়াতে, [অঙ্কন।

ঠড রাশি গচএর যে গুণিত, ঠঢ রাশি গঘএর সেই গুণিত ; [৫ম, ১।

কিন্তু এরূপ প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, ঠড রাশি গচএর যে গুণিত, ছট রাশি, কখএর সেই গুণিত ;

অতএব ছট রাশি কখএর যে গুণিত, ঠঢ রাশি গঘএর সেই গুণিত ; অর্থাৎ, ছট ও ঠঢ, কখ ও গঘএর সমগুণিত।

পুনর্ব্বার, জট রাশি ঙখএর যে গুণিত, ডঢ রাশি চঘএর সেই গুণিত এবং টভ রাশি ঙখএর যে গুণিত, ঢত রাশি চঘএর সেই গুণিত হওয়াতে, [অঙ্কন।
জভ রাশি ঙখএর যে গুণিত, ডত রাশি চঘএর সেই গুণিত, [৫ম, ২।
অর্থাৎ জভ ও ডত ইহারা ঙখ ও চঘএর সমগুণিত।
আর কখতে খঙতে যে রূপ, গঘতে ঘচতে সেই রূপ, [কল্পনা।
এবং ছট ও ঠঢ, কখ ও গঘএর সমগুণিত, আর জভ ও ডত, ঙখ ও চঘএর সমগুণিত,
এই হেতু ছট রাশি জভ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে ঠঢ রাশি ডত অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে। [৫ম, সং ৫।
কিন্তু যদি ছজ রাশি টভ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তাহা হইলে প্রত্যেকে সাধারণ রাশি জট যোগ করিলে, ছট রাশি জভ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ;
অতএব ঠঢও ডত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ;
এবং উভয় হইতে সাধারাণ খণ্ড ডঢ বিয়োগ করিলে, ঠড রাশি ঢত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ; [১ম, স্বতঃ ৫।
এই হেতু যদি ছজ রাশি টভ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে ঠড রাশি ঢত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

এই রূপে উপপন্ন হইতে পারে যে, ছজ রাশি টভএর

সমান হইলে, ঠড রাশি ঢতএর সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে ;

কিন্তু ছজ ও ঠড, কঙ ও গচএর কোন সমগুণিত এবং টভ ও ঢত, ঙখ ও চঘএর কোন সমগুণিত ; [অং।

সুতরাং কঙতে ঙখতে যে অনুপাত, গচতে চঘতে সেই অনুপাত ; [৫ম, সং ৫।

অতএব একত্র করিলে ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। যদি ক + খ : খ : : গ + ঘ : ঘ হয়,

তবে, ক : খ : : গ : ঘ হইবে, $\frac{\text{ক}+\text{খ}}{\text{খ}} \quad \frac{\text{গ}+\text{ঘ}}{\text{ঘ}}$

$\frac{\text{ক}}{\text{খ}}+১ \quad \frac{\text{গ}}{\text{ঘ}}+১ \qquad \frac{\text{ক}}{\text{খ}}=\frac{\text{গ}}{\text{ঘ}}$ অথবা ক : খ : : গ : ঘ।

১৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

পৃথক করিলে যদি রাশি গুলি সমানুপাতী হয়, তবে একত্র করিলেও তাহারা সমানুপাতী হইবে ; অর্থাৎ প্রথমে দ্বিতীয়ে যে অনুপাত, যদি তৃতীয়ে চতুর্থে সেই অনুপাত হয়, তাহা হইলে একত্রকৃত প্রথম ও দ্বিতীয়ের, দ্বিতীয়ের সহিত যে অনুপাত, একত্রকৃত তৃতীয় ও চতুর্থের, চতুর্থের সহিত সেই অনুপাত হইবে।

যদি কঙ, ঙখ, গচ, চঘ এই চারি রাশি সমানুপাতী হয়, তবে একত্র করিলে কখতে খঙতে যে অনুপাত, গঘতে ঘচতে সেই অনুপাত হইবে।

ক ঙ খ

গ চ ছ ঘ

যদি না হয়, তবে কখতে খঙতে যে অনুপাত, গঘতে ঘচ অপেক্ষা কোন ক্ষুদ্রতর রাশি ঘছতে যেন সেই অনুপাত হইল।

পরে, কখতে খঙতে যে রূপ, গঘতে ঘছতে সেই রূপ বলিয়া,

কঙতে ঙখতে যে রূপ, গছতে ছঘতে সেই রূপ। [৫ম, ১৭।

কিন্তু কঙতে ঙখতে যে রূপ, গচতে চঘতে সেই রূপ, [কল্পনা।

এই হেতু গছতে ছঘতে যে রূপ, গচতে চঘতে সেই রূপ; [৫ম, ১১।

কিন্তু গছ রাশি গচ অপেক্ষা বৃহত্তর, [কল্পনা।

এই হেতু ছঘ রাশি চঘ অপেক্ষা বৃহত্তর; [৫ম, ১৪।

কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভবনীয়।

এই প্রকারে যদি ঘছ রাশি ঘচ অপেক্ষা বৃহত্তর কল্পিত হইত, তাহা হইলে উপরোক্ত রীতি অনুসারে তাহা অসম্ভব প্রমাণ হইত;

এই হেতু কখতে খঙতে যে রূপ, গঘতে ঘচতে সেই রূপ; অতএব পৃথক্ করিলে ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। ক : খ : : গ : ঘ, বা $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ} \therefore \frac{ক}{খ} + ১$

$= \frac{গ}{ঘ} + ১$, বা $\frac{ক + খ}{খ} = \frac{গ + ঘ}{ঘ}$; বা ক + খ : খ : : গ + ঘ : ঘ।

১৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

একটী পূর্ণ রাশিতে আর একটী পূর্ণ রাশিতে যে অনুপাত, প্রথমের এক অংশে দ্বিতীয়ের এক অংশে যদি সেই অনুপাত হয়, তবে পূর্ণ রাশিতে পূর্ণ রাশিতে যে অনুপাত, অবশিষ্টে অবশিষ্টে সেই অনুপাত হইবে।

পূর্ণ রাশি কখতে পূর্ণ রাশি গঘতে যে রূপ, কখএর এক অংশ কঙতে, গঘএর এক অংশ গচতে যেন সেই রূপ হইল; তাহা হইলে পূর্ণ রাশি কখতে পূর্ণ রাশি গঘতে যে রূপ, অবশিষ্ট ঙখতে অবশিষ্ট চঘতে সেই রূপ হইবে।

ক ঙ খ
গ চ ঘ

কখতে গঘতে যে রূপ, কঙতে গচতে সেই রূপ হওয়াতে, [কল্পনা।

একান্তরে, কখতে কঙতে যে রূপ, গঘতে গচতে সেই রূপ; [৫ম, ১৬।

আর একত্র করিলে যদি রাশি সকল সমানুপাতী হয়, তবে পৃথক করিলেও তাহারা সমানুপাতী হইবে; [৫ম, ১৭।

এই হেতু ঙখতে কঙতে যে রূপ, চঘতে গচতে সেই রূপ; অতএব একান্তরে, ঙখতে চঘতে যে রূপ, কঙতে গচতে সেই রূপ; [৫ম, ১৬।

কিন্তু কঙতে গচতে যে রূপ, কখতে গঘতে সেই রূপ; [কং।
এই হেতু কখতে, গঘতে যে রূপ, ঙখতে চঘতে সেই রূপ; [৫ম, ১১।
অতএব একটী পূর্ণ ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অনু। পূর্ণ রাশিতে পূর্ণ রাশিতে যে অনুপাত, যদি তাহাদের অংশে অংশে সেই অনুপাত হয়, তবে অংশে অংশে যে অনুপাত, অবশিষ্টে অবশিষ্টে সেই অনুপাত হইবে।

প্রতিজ্ঞার উপপত্তিতে এই অনুমান সপ্রমাণ হইয়াছে।

বীজঃ উপঃ। যদি ক, খ দুই পূর্ণ রাশি ও গ, ঘ তাহাদের অংশ হয়, এবং ক : খ : : গ : ঘ হয়,
তবে ক : খ : : ক – গ : খ – ঘ হইবে। ∵ ক : খ : : গ : ঘ ;
∴ একান্তরে, ক : গ : : খ : ঘ, বা $\frac{ক}{গ}=\frac{খ}{ঘ}$ ∴ $\frac{ক}{গ}-১=\frac{খ}{ঘ}-১$,

অথবা $\frac{ক-গ}{গ}=\frac{খ-ঘ}{ঘ}$, ∴ $\frac{গ}{ক-গ}=\frac{ঘ}{খ-ঘ}$

অথবা গ : ক – গ : : ঘ : খ – ঘ ;
∴ একান্তরে ; গ : ঘ : : ক – গ : খ – ঘ ;
কিন্তু ক : খ : : গ : ঘ ∴ ক : খ : : ক – গ : খ – ঘ।

ঙ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

চারি রাশি সমানুপাতী হইলে অন্তরবিলোমেও সমানুপাতী হইবে, অর্থাৎ প্রথম রাশিতে দ্বিতীয় অপেক্ষা প্রথমের আধিক্যেতে যে অনুপাত, তৃতীয় রাশিতে চতুর্থ অপেক্ষা তৃতীয়ের আধিক্যেতে সেই অনুপাত হইবে।

কখতে খঙতে যে রূপ, গঘতে ঘচতে যেন সেই রূপ; তাহা হইলে কখতে কঙতে যে রূপ, গঘতে গচতে সেই রূপ হইবে।

$$\begin{array}{ccc} \text{ক} & \text{ঙ} & \text{খ} \\ \hline \text{গ} & \text{চ} & \text{ঘ} \end{array}$$

কখতে খঙতে যে রূপ, গঘতে ঘচতে সেই রূপ হওয়াতে, [কল্পনা।

অন্তর সমানুপাতে, কঙতে খঙতে যে রূপ, গচতে ঘচতে সেই রূপ; [৫ম, ১৭।

এবং বিলোমে খঙতে কঙতে যে রূপ, চঘতে গচতে সেই রূপ। [৫ম, খ।

সুতরাং যোগ সমানুপাতে, কখতে কঙতে যে রূপ, গঘতে গচতে সেই রূপ; [৫ম, ১৮।

অতএব চারি রাশি ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। ক, খ, গ, ঘ সমানুপাতী চারি রাশি;

$$\frac{\text{ক}}{\text{খ}} = \frac{\text{গ}}{\text{ঘ}} \therefore \frac{\text{ক}}{\text{খ}} - ১ = \frac{\text{গ}}{\text{ঘ}} - ১ \text{ অথবা } \frac{\text{ক} - \text{খ}}{\text{খ}} = \frac{\text{গ} - \text{ঘ}}{\text{ঘ}}$$

$$\therefore \frac{\text{খ}}{\text{ক} - \text{খ}} = \frac{\text{ঘ}}{\text{গ} - \text{ঘ}};\ \therefore \frac{\text{খ}}{\text{ক} - \text{খ}} \times \frac{\text{ক}}{\text{খ}} = \frac{\text{ঘ}}{\text{গ} - \text{ঘ}} \times \frac{\text{গ}}{\text{ঘ}};$$

$$\text{অথবা } \frac{\text{ক}}{\text{ক} - \text{খ}} = \frac{\text{গ}}{\text{গ} - \text{ঘ}} \therefore \text{ক} : \text{ক} - \text{খ} :: \text{গ} : \text{গ} - \text{ঘ}।$$

২০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

এক শ্রেণীতে তিনটী ও অপর শ্রেণীতে আর তিনটী রাশি থাকিলে, যদি একের দুইটী দুইটী ক্রমে অপরের

দুইটী দুইটীর সহিত সমানুপাতী হয়, তবে প্রথম রাশিটী তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে চতুর্থ রাশি ষষ্ঠ অপেক্ষা বৃহত্তর; সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে।

ক, খ, গ যেন তিন রাশি ও ঘ, ঙ, চ অপর তিন রাশি; ইহারা ক্রমে দুইটী দুইটী করিয়া সমানুপাতী অর্থাৎ কতে খতে যে রূপ, ঘতে ঙতে সেই রূপ এবং খতে গতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ; তাহা হইলে যদি ক রাশি গ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে ঘ রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে।

ক———　　　　খ—

ঘ——　　　　ঙ—

প্রথমত, ক রাশি গ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, ঘ রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

ক রাশি গ অপেক্ষা বৃহত্তর ও খ অন্য কোন রাশি বলিয়া, কএর খএর সহিত অনুপাত, গএর খএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর, [৫ম, ৮।

কিন্তু কতে খতে যে রূপ, ঘতে ঙতে সেই রূপ; [কল্পনা।

অতএব ঘএর ঙর সহিত অনুপাত, গএর খএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর। [৫ম, ১৩।

আবার খতে গতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ; [কং।

অতএব বিলোমে, গতে খতে যে রূপ, চতে ঙতে সেই রূপ; [৫ম, খ।

এবং পূর্ব্বে প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, ঘএর ঙর সহিত অনুপাত গএর খএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর;

এই হেতু ঘএর ঙর সহিত অনুপাত চএর ঙর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর; [৫ম, ১৩, অনু।

অতএব ঘ রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর। [৫ম, ১০।

দ্বিতীয়ত, ক রাশি গএর সমান হইলে ঘ রাশি চএর সমান হইবে।

ক——— খ—— গ———

ঘ——— ঙ—— চ———

ক রাশি গএর সমান ও খ অন্য কোন রাশি বলিয়া,

কতে খতে যে রূপ, গতে খতে সেই রূপ; [৫ম, ৭।

কিন্তু কতে খতে যে রূপ, ঘতে ঙতে সেই রূপ, [কল্পনা।

এবং গতে খতে যে রূপ, চতে ঙতে সেই রূপ;

[কল্পনা; ৫ম, খ।

এই হেতু ঘতে ঙতে যে রূপ, চতে ঙতে সেই রূপ,

[৫ম, ১১।

সুতরাং ঘ রাশি চএর সমান। [৫ম, ৯।

তৃতীয়ত, ক রাশি গ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে ঘ রাশি চ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে;

ক—— খ——— গ———

ঘ— ঙ—— চ——

গ রাশি ক অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে এই প্রতিজ্ঞার

প্রথম প্রকরণের ন্যায় উপপন্ন হইবে যে, গতে খতে যে রূপ, চতে ঙতে সেই রূপ;
এই প্রকারে, খতে কতে যে রূপ, ঙতে ঘতে সেই রূপ; অতএব প্রথম প্রকরণ দ্বারা চ রাশি ঘ অপেক্ষা বৃহত্তর, অর্থাৎ ঘ রাশি চ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতেছে; অতএব এক শ্রেণীতে তিনটী ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। $\frac{ক}{খ} = \frac{ঘ}{ঙ}$ ও $\frac{খ}{গ} = \frac{ঙ}{চ}$ $\therefore \frac{ক}{খ} \times \frac{খ}{গ} = \frac{ঘ}{ঙ} \times \frac{ঙ}{চ}$;

অর্থাৎ $\frac{ক}{গ} = \frac{ঘ}{চ}$ $\therefore$ যদি ক $>$ গ হয়, তবে ঘ $>$ চ; যদি ক $=$ গ হয়, তবে ঘ $=$ চ; এবং যদি ক $<$ গ হয়, তবে ঘ $<$ চ হইবে।

২১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

এক শ্রেণীতে তিনটী ও অপর শ্রেণীতে আর তিনটী রাশি থাকিলে, যদি একের দুইটী দুইটী অপরের দুইটী দুইটীর সহিত ব্যতিক্রমে সমানুপাতী হয়, তবে প্রথম রাশিটী তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে চতুর্থ রাশি ষষ্ঠ অপেক্ষা বৃহত্তর; সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে।

ক, খ, গ তিন রাশি ও ঘ, ঙ, চ অপর তিন রাশি; ইহারা ব্যতিক্রমে দুইটী দুইটী করিয়া সমানুপাতী; অর্থাৎ কতে খতে যে অনুপাত, ঙতে চতে সেই অনুপাত এবং খতে গতে যে অনুপাত, ঘতে ঙতে সেই অনুপাত; তাহা হইলে যদি ক রাশি গ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, ঘ

রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে; সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে।

ক——— খ——— গ———

ঘ——— ঙ——— চ———

প্রথমত, ক রাশি গ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে ঘ রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

ক রাশি গ অপেক্ষা বৃহত্তর ও খ অন্য কোন রাশি বলিয়া,
কএর খএর সহিত অনুপাত, গএর খএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর; [৫ম, ৮।
কিন্তু কতে খতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ, [কল্পনা।
অতএব ঙর চএর সহিত অনুপাত, গএর খএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর। [৫ম, ১৩।
আবার খতে গতে যে রূপ, ঘতে ঙতে সেই রূপ হওয়াতে, [কল্পনা।
বিলোমে, গতে খতে যে রূপ, ঙতে ঘতে সেই রূপ; [৫ম, খ।
এবং পূর্ব্বে প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, ঙর চএর সহিত অনুপাত, গএর খএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর,
এই হেতু ঙর চএর সহিত অনুপাত, ঙর ঘএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর; [৫ম, ১৩, অনু।
অতএব চ রাশি ঘ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর; [৫ম, ১০।
অর্থাৎ চ অপেক্ষা ঘ বৃহত্তর।

দ্বিতীয়ত, ক রাশি গএর সমান হইলে, ঘ রাশি চএর সমান হইবে।

ক——— খ——— গ———

ঘ——— ঙ——— চ———

ক রাশি গএর সমান ও খ অন্য কোন রাশি বলিয়া
কতে খতে যে রূপ, গতে খতে সহিত সেই রূপ, [৫ম, ৭
কিন্তু কতে খতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ, [কল্পনা।
এবং গতে খতে যে রূপ, ঙতে ঘতে সেই রূপ; [৫ম, ১১
অতএব ঘ রাশি চএর সমান। [৫ম, ৯

তৃতীয়ত, ক রাশি গ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে, ঘ রাশি চ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে;

ক——— খ——— গ———

ঘ——— ঙ——— চ———

গ রাশি ক অপেক্ষা বৃহত্তর; এবং পূর্ব্বের ন্যায়, গতে খতে যে রূপ, ঙতে ঘতে সেই রূপ হওয়াতে,
ও ঐ প্রকারে, খতে কতে যে রূপ, চতে ঙতে সেই রূপ বলিয়া
প্রথম প্রকরণ দ্বারা চ রাশি ঘ অপেক্ষা বৃহত্তর
অর্থাৎ ঘ রাশি চ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর; অতএব এব
শ্রেণীতে ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। $\frac{ক}{খ}=\frac{ঙ}{চ}$; $\frac{খ}{গ}=\frac{ঘ}{ঙ}$ $\therefore \frac{ক}{খ}\times\frac{খ}{গ}=\frac{ঙ}{চ}\times\frac{ঘ}{ঙ}$;

অথবা $\frac{ক}{গ}=\frac{ঘ}{চ}$ $\therefore$ যদি ক $>$ গ হয়, তবে ঘ $>$ চ; যদি
ক $=$ গ হয়, তবে ঘ $=$ চ; এবং যদি ক $<$ গ হয়, তবে ঘ $<$ চ
হইবে।

২২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কতকগুলি রাশি এক স্থানে ও আর কতকগুলি অপর স্থানে থাকিলে, যদি তাহারা দুইটী দুইটী যথাক্রমে একই অনুপাত বিশিষ্ট হয়, তবে এক শ্রেণীর প্রথমের তাহার শেষ রাশির সহিত যে অনুপাত, অপর শ্রেণীর প্রথমের তাহার শেষ রাশির সহিত সেই অনুপাত হইবে।

[ক্রম সমানুপাত এই কথা প্রয়োগ করিলেই সংক্ষেপে এ প্রতিজ্ঞা ব্যক্ত করা হয়।]

প্রথমত, ক, খ, গ, এই তিনটী রাশি এক স্থানে ও ঘ, ঙ, চ আর তিনটী রাশি অপর স্থানে থাকিলে, যদি উহারা দুইটী দুইটী করিয়া যথাক্রমে একই অনুপাত বিশিষ্ট হয়, অর্থাৎ যদি কতে খতে যে রূপ, ঘতে ঙতে সেই রূপ এবং খতে গতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ হয়, তবে কতে গতে যে রূপ, ঘতে চতে সেই রূপ হইবে।

ছ———	ট———	ড———
ক———	খ———	গ———
ঘ——	ঙ——	চ——
জ———	ঠ———	ঢ———

ক ও ঘএর কোন সমগুণিত ছ ও জ, খ ও ঙর কোন সমগুণিত ট ও ঠ এবং গ ও চএর কোন সমগুণিত ড ও ঢ কল্পনা কর।

পরে কতে খতে যে রূপ, ঘতে ঙতে সেই রূপ বলিয়া,
[কল্পনা।

এবং ক ও ঘএর কোন সমগুণিত ছ ও জ আর খ ও ঙর কোন সমগুণিত ট ও ঠ কল্পিত হওয়াতে, [অঙ্কন।
ছতে টতে যে রূপ, জতে ঠতে সেই রূপ;
এই কারণে, টতে ডতে যে রূপ, ঠতে ঢতে সেই রূপ।

আবার এক শ্রেণীতে ছ, ট, ড এই তিনটী রাশি ও অপর শ্রেণীতে জ, ঠ, ঢ আর তিনটী রাশি থাকাতে ও তন্মধ্যে দুইটী দুইটী রাশি একই অনুপাত বিশিষ্ট হইয়াছে বলিয়া, যদি ছ রাশি ড অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে ডও ঢ অপেক্ষা বৃহত্তর; সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে; [৫ম, ২০।
কিন্তু ছ ও জ রাশি ক ও ঘএর কোন সমগুণিত;
এবং ড ও ঢ রাশি গ ও চএর কোন সমগুণিত;
সুতরাং কতে গতে যে রূপ, ঘতে চতে সেই রূপ।
[৫ম, সং ৫।

অনন্তর, প্রত্যেক শ্রেণীতে ক, খ, গ, ঘ এবং ঙ, চ, ছ, জ এই চারিটী চারিটী রাশি থাকিলে, যদি তাহারা দুইটী দুইটী করিয়া যথাক্রমে একই অনুপাত বিশিষ্ট হয়, তবে কতে

ক,	খ,	গ,	ঘ,
ঙ,	চ,	ছ,	জ,

ঘতে যে অনুপাত, ঙতে জতে সেই অনুপাত হইবে;
কারণ, ক, খ, গ ও ঙ, চ, ছ এই তিনটী তিনটী রাশি এক এক শ্রেণীস্থ হওয়াতে ও তাহারা দুইটী দুইটী করিয়া

যথাক্রমে একই অনুপাত বিশিষ্ট বলিয়া, [কল্পনা।
প্রথম প্রকরণ দ্বারা কতে গতে যে রূপ, ঙতে ছতে সেই রূপ ;
কিন্তু গতে ঘতে যে রূপ, ছতে জতে সেই রূপ ; [কল্পনা।
এই হেতু, পুনর্ব্বার ১ম প্রকরণ দ্বারা কতে ঘতে যে রূপ, ঙতে জতে সেই রূপ।
আর রাশি সংখ্যা যতই হউক না কেন, প্রতিজ্ঞা এই রূপে সপ্রমাণ হইবে। অতএব কতকগুলি ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। যদি ক, খ, গ, ঘ এই চারিটী রাশি এবং ঙ, চ, ছ, জ, আর চারিটী রাশি থাকে, তবে $\frac{ক}{খ}=\frac{ঙ}{চ}$; $\frac{খ}{গ}=\frac{চ}{ছ}$; $\frac{গ}{ঘ}=\frac{ছ}{জ}$;
$\therefore \frac{ক}{খ}\times\frac{খ}{গ}\times\frac{গ}{ঘ}=\frac{ঙ}{চ}\times\frac{চ}{ছ}\times\frac{ছ}{জ}$ অথবা $\frac{ক}{ঘ}=\frac{ঙ}{জ}$ $\therefore$ ক : ঘ : : ঙ : জ।

২৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কতকগুলি রাশি এক স্থানে ও আর কতকগুলি অপর স্থানে থাকিলে, যদি তাহারা দুইটী দুইটী ব্যতিক্রমে একই অনুপাত বিশিষ্ট হয়, তবে এক শ্রেণীর প্রথমের তাহার শেষ রাশির সহিত যে অনুপাত, অপর শ্রেণীর প্রথমের তাহার শেষ রাশির সহিত সেই অনুপাত হইবে।

[ব্যতিক্রম সমানুপাত এই কথা প্রয়োগ করিলেই সংক্ষেপে এ প্রতিজ্ঞা ব্যক্ত করা হয়।]

প্রথমত, ক, খ, গ এই তিনটী রাশি এক স্থানে ও ঘ, ঙ, চ এই তিনটী রাশি অপর স্থানে থাকিলে, যদি উহারা দুইটী দুইটী করিয়া ব্যতিক্রমে একই অনুপাত বিশিষ্ট হয়, অর্থাৎ যদি কতে খতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ এবং খতে গতে যে রূপ, ঘতে ঙতে সেই রূপ হয়, তবে কতে গতে যে রূপ, ঘতে চতে সেই রূপ হইবে।

ছ——— জ——— ঠ———

ক——— খ——— গ———

ঘ——— ঙ——— চ———

ট——— ড——— ঢ———

ক, খ ও ঘএর কোন সমগুণিত ছ, জ ও ট এবং গ, ঙ ও চএর কোন সমগুণিত ঠ, ড ও ঢ কল্পনা কর।

পরে, ছ ও জ এই দুই রাশি ক ও খএর সমগুণিত হওয়ায়, এবং রাশি সকল পরস্পর যে অনুপাত বিশিষ্ট, তাহাদের সমগুণিতেরাও পরস্পর সেই অনুপাত বিশিষ্ট হইয়া থাকে বলিয়া, [৫ম, ১৫।

কতে খতে যে রূপ, ছতে জতে সেই রূপ ;

এই হেতু, ঙতে চতে যে রূপ ডতে ঢতে সেই রূপ ;

কিন্তু কতে খতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ ; [কল্পনা।

সুতরাং ছতে জতে যে রূপ, ডতে ঢতে সেই রূপ।

[৫ম, ১১।

আবার খতে গতে যে রূপ, ঘতে ঙতে সেই রূপ বলিয়া, [কল্পনা।

এবং খ ও ঘএর কোন সমগুণিত জ ও ট আর গ ও ঙর

কোন সমগুণিত ঠ ও ড কল্পিত হওয়াতে, [অঙ্কন।
জতে ঠতে যে রূপ, টতে ডতে সেই রূপ। [৫ম, ৪।
আর সপ্রমাণ হইয়াছে যে, ছতে জতে যে রূপ, ডতে ঢতে সেই রূপ।

এক্ষণে এক শ্রেণীতে ছ, জ, ঠ এই তিনটী রাশি ও অপর শ্রেণীতে ট, ড, ঢ আর তিনটী রাশি থাকাতে, ও তন্মধ্যে ব্যতিক্রমে দুইটী দুইটী রাশি একই অনুপাত বিশিষ্ট হইয়াছে বলিয়া,

যদি ছ রাশি ঠ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে ট রাশি ঢ অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে; [৫ম, ২১।
কিন্তু ছ ও ট রাশি ক ও ঘএর কোন সমগুণিত,
এবং ঠ ও ঢ রাশি গ ও চএর কোন সমগুণিত;
অতএব কতে গতে যে রূপ, ঘতে চতে সেই রূপ।

অনন্তর, প্রত্যেক শ্রেণীতে ক, খ, গ, ঘ এবং ঙ, চ, ছ, জ এই চারিটী চারিটী রাশি থাকিলে, যদি তাহারা দুইটী দুইটী করিয়া ব্যতিক্রমে একই অনুপাত বিশিষ্ট হয়, অর্থাৎ যদি

ক,	খ,	গ,	ঘ,
ঙ,	চ,	ছ,	জ,

কতে খতে যে রূপ, ছতে জতে সেই রূপ; খতে গতে যে রূপ, চতে ছতে সেই রূপ এবং গতে ঘতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ হয়, তবে কতে ঘতে যে রূপ, ঙতে জতে সেই রূপ হইবে।

এক্ষণে ক, খ, গ এবং চ, ছ, জ এই তিনটী তিনটী রাশি ভিন্ন ভিন্ন শ্রেণীস্থ হওয়াতে,

ও তাহারা দুইটী দুইটী করিয়া ব্যতিক্রমে একই অনুপাত বিশিষ্ট বলিয়া, [কল্পনা।

প্রথম প্রকরণ দ্বারা কতে গতে যে রূপ, চতে জতে সেই রূপ;

কিন্তু গতে ঘতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ; [কল্পনা।

অতএব, পুনর্ব্বার প্রথম প্রকরণ দ্বারা কতে ঘতে যে রূপ, ঙতে জতে সেই রূপ;

আর রাশি সংখ্যা যতই হউক না কেন, প্রতিজ্ঞা এই রূপে সপ্রমাণ হইবে; অতএব কতকগুলি ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। চারিটী চারিটী রাশি লইলে, $\frac{ক}{খ} = \frac{চ}{জ}$; $\frac{খ}{গ} = \frac{চ}{ছ}$ এবং $\frac{গ}{ঘ} = \frac{ঙ}{চ}$ $\therefore \frac{ক}{খ} \times \frac{খ}{গ} \times \frac{গ}{ঘ} = \frac{ছ}{জ} \times \frac{চ}{ছ} \times \frac{ঙ}{চ}$;

অথবা $\frac{ক}{ঘ} = \frac{ঙ}{জ}$; $\therefore$ ক : ঘ : : ঙ : জ।

২৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

প্রথমে দ্বিতীয়ে যে অনুপাত, যদি তৃতীয়ে চতুর্থে সেই অনুপাত হয় এবং পঞ্চমে দ্বিতীয়ে যে অনুপাত, যদি ষষ্ঠে চতুর্থে সেই অনুপাত হয়, তাহা হইলে প্রথম ও পঞ্চমের সমষ্টিতে দ্বিতীয়েতে যে অনুপাত, তৃতীয় ও ষষ্ঠের সমষ্টিতে চতুর্থেতে সেই অনুপাত হইবে।

প্রথম রাশি কখতে দ্বিতীয় গতে যে রূপ, তৃতীয় রাশি ঘঙতে চতুর্থ চতে সেই রূপ হইলে এবং পঞ্চম খছতে দ্বিতীয় গতে যে রূপ, ষষ্ঠ ঙজতে চতুর্থ চতে সেই রূপ হইলে, প্রথম ও পঞ্চমের সমষ্টি কছতে দ্বিতীয় গতে যে রূপ তৃতীয় ও ষষ্ঠের সমষ্টি ঘজতে চতুর্থ চতে সেই রূপ হইবে।

ক　খ　ছ	ঘ　ঙ　জ
গ——	চ——

খছতে গতে যে রূপ, ঙজতে চতে সেই রূপ বলিয়া,
[কল্পনা।

বিলোমে, গতে খছতে যে রূপ, চতে ঙজতে সেই রূপ।
[৫ম, খ।

আবার, কখতে গতে যে রূপ, ঘঙতে চতে সেই রূপ,
[কল্পনা।

এবং গতে খছতে যে রূপ, চতে ঙজতে সেই রূপ;

অতএব ক্রম সমানুপাতে, কখতে খছতে যে রূপ, ঘঙতে ঙজতে সেই রূপ;　[৫ম, ২২।

আর এই সকল রাশি সমানুপাতী হওয়াতে একত্র করিলেও সমানুপাতী হইবে;　[৫ম, ১৮।

অতএব কছতে খছতে যে রূপ, ঘজতে ঙজতে সেই রূপ;

আর খছতে গতে যে রূপ, ঙজতে চতে সেই রূপ,　[কং।

সুতরাং, ক্রম সমানুপাতে, কছতে গতে যে রূপ, ঘজতে চতে সেই রূপ;　[৫ম, ২২।

অতএব প্রথমে দ্বিতীয়ে ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

১ম অনু। প্রতিজ্ঞায় যে রূপ কল্পনা করা গিয়াছে, সেই রূপ কল্পনা করিলে প্রথম ও পঞ্চমের অন্তরে দ্বিতীয়ে যে অনুপাত, তৃতীয় ও ষষ্ঠের অন্তরে চতুর্থে সেই অনুপাত হইবে।—যদি যোগ সমানুপাতের পরিবর্ত্তে অন্তর সমানুপাত ব্যবহার করা যায়, তাহা হইলে প্রতিজ্ঞার উপপত্তির ন্যায় এই অনুমান সপ্রমাণ হইতে পারে।

২য় অনু। ইহা সহজেই প্রতীত হইবে যে, দুই স্থানে যত গুলি করিয়া রাশি থাকুক না কেন, প্রথম শ্রেণীস্থ কোন এক রাশির দ্বিতীয় রাশির সহিত যে অনুপাত, যদি দ্বিতীয় শ্রেণীস্থ সেই স্থানীয় রাশির চতুর্থ রাশির সহিত সেই অনুপাত হয়, তাহা হইলেও এই প্রতিজ্ঞা সপ্রমাণ হইবে।

বীজঃ উপঃ। ক, খ, গ, ঘ, ঙ, চ ছয়টী রাশি।

$$\therefore \frac{\text{ক}}{\text{খ}} = \frac{\text{গ}}{\text{ঘ}} \text{ ও } \frac{\text{ঙ}}{\text{খ}} = \frac{\text{চ}}{\text{ঘ}} \therefore \frac{\text{ক}}{\text{খ}} + \frac{\text{ঙ}}{\text{খ}} = \frac{\text{গ}}{\text{ঘ}} + \frac{\text{চ}}{\text{ঘ}} \text{ অথবা } \frac{\text{ক}+\text{ঙ}}{\text{খ}} = \frac{\text{গ}+\text{চ}}{\text{ঘ}};$$

$\therefore$ ক + ঙ : খ :: গ + চ : ঘ।

অনুমান দুইটীও সহজেই এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে।

২৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যদি এক জাতীয় চারি রাশি সমানুপাতী হয়, তাহা হইলে বৃহত্তম ও লঘুতমের সমষ্টি অন্য দুইটীর সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

কখ, গঘ, ঙ, চ এই চারি রাশি সমানুপাতী; অর্থাৎ কখতে গঘতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ। এই কয়টী রাশির মধ্যে কখ যেন বৃহত্তম; সুতরাং চ সর্ব্বাপেক্ষা লঘুতম; [৫ম, ক ও ১৪।

কখ ও চএর সমষ্টি, গঘ ও ঙর সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

ক ——— ছ ——— খ   গ ——— জ ——— ঘ

ঙ———   চ———

ঙর সমান কছ এবং চএর সমান গজ রাশি কল্পনা কর।

পরে কখতে গঘতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ বলিয়া, [কল্পনা।

এবং কছ রাশি ঙর সমান ও গজ রাশি চএর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন।

কখতে গঘতে যে রূপ, কছতে গজতে সেই রূপ; [৫ম, ৭ ও ১১।

আর কখ পূর্ণ রাশিতে গঘ পূর্ণ রাশিতে যে রূপ কছতে গজতে সেই রূপ হওয়াতে,

কখ পূর্ণ রাশিতে গঘ পূর্ণ রাশিতে যে রূপ, অবশিষ্ট ছখতে অবশিষ্ট জঘতে সেই রূপ; [৫ম, ১৯।

কিন্তু কখ রাশি গঘ অপেক্ষা বৃহত্তর; [কল্পনা।

এই হেতু ছখ রাশি জঘ অপেক্ষা বৃহত্তর। [৫ম, ক।

আর কছ রাশি ঙর সমান ও গজ রাশি চএর সমান বলিয়া, [অঙ্কন।

কছ ও চএর সমষ্টি গজ ও ঙর সমষ্টির সমান।

আবার ছখ রাশি জঘ অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে যদি এই দুই অসমান রাশিতে দুই সমান রাশি, অর্থাৎ ছখ রাশিতে কছ ও চ এই দুইটী, এবং ঘজ রাশিতে, গজ ও ঙ এই দুইটী যোগ করা যায়, তাহা হইলে কখ ও চএর সমষ্টি, গঘ ও ঙর সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ; অতএব যদি এক জাতীয় ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। $ক : খ :: গ : ঘ$, অথবা $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ}$:

$\therefore$ $কঘ = খগ$, $\therefore$ $ঘ = \frac{খগ}{ক}$। $ক + ঘ - (খ + গ) = ক - খ$

$- (গ - ঘ) = ক - খ - \left(গ - \frac{খগ}{ক}\right) = \frac{(ক - খ)(ক - গ)}{ক}$

ক অথবা ঘ বৃহত্তম হইলে $\frac{(ক - খ)(ক - গ)}{ক}$ যুক্তরাশি হইবে.

এবং খ অথবা গ বৃহত্তম হইলে উহা বিযুক্ত রাশি হইবে।

$\therefore$ বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতমের সমষ্টি অন্য দুই রাশি অপেক্ষা বৃহত্তর।

৫ম অধ্যায়।

ব্যাখ্যা ও পরিশিষ্ট।

ইউক্লিডের প্রথম চারি অধ্যায়ে জ্যামিতিক রাশি সকল কিরূপ হইলে পরস্পর সমান হয় আর কোন্ স্থলেই বা এপ্রকার হয় না, তাহা নির্ণীত হইয়াছে। পঞ্চম অধ্যায়ে রাশি সকলের সম্বন্ধ নির্ণয়ের বিশেষ উপায় স্থিরীকৃত হইল। প্রথম চারি অধ্যায়ে রাশি শব্দে যাহার কেবল দৈর্ঘ অথবা দৈর্ঘ ও বিস্তার আছে, তাহাই বুঝিতে হইবে; কিন্তু ৫ম অধ্যায়ে যে কোন পদার্থের অপবর্ত্ত্য অথবা গুণিত কল্পিত হইতে পারে, তাহাই রাশি বলিয়া কথিত হইয়াছে। অতএব এ স্থলে ইউক্লিড রাশি শব্দের ব্যাপক ভাব গ্রহণ করিয়াছেন।

ইউক্লিড রাশি সকলের সম্বন্ধ নির্ণয় করিবার জন্য ৫ম অধ্যায়ে অনুপাত ও সমানুপাতের বিধি প্রকটন করিয়াছেন। তিনি যে প্রণালী অবলম্বন করিয়াছেন, তাহা পাটীক বা বৈজিক প্রণালী হইতে স্বতন্ত্র। ছাত্রেরা সমানুপাতের বিধি শিক্ষা করিবার সময় এক বারে জ্যামিতিক ও বৈজিক প্রণালী অভ্যাস করিলে সমধিক ফল লাভ করিতে পারিবে।

১ম সং। ইউক্লিড অংশ শব্দ দুই অর্থে প্রয়োগ করিয়াছেন; প্রথম চারি অধ্যায়ে কোন একটী রাশি সজাতীয় অপর এক রাশি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলেই প্রথমটী দ্বিতীয়ের অংশ বলিয়া বুঝিতে হইবে;—যথা, সমগ্র রাশিটী তাহার অংশ অপেক্ষা বৃহত্তর (স্বতঃ ৯)। ৫ম অধ্যায়ে কোন ক্ষুদ্রতর রাশি বৃহত্তরের অংশ বলিলে বুঝিতে হইবে যে, বৃহত্তর রাশি কোন নির্দ্দিষ্ট বার ক্ষুদ্রতর রাশি দ্বারা ব্যাপ্ত।

৩য় সং। সিম্‌সন বলেন যে, ৫ম অধ্যায়ের তৃতীয় ও অষ্টম সংজ্ঞা ইউক্লিডের রচিত নহে; অপর কোন টীকাকার লিখিয়া দিয়া থাকিবেন।

৪র্থ সং। চতুর্থ সংজ্ঞার তাৎপর্য্য এই যে, অনুপাতের দুইটী রাশি অবশ্যই এক জাতীয় হইবে।

৫ম সং। এই সংজ্ঞাটী ইউক্লিড লিখিত সমানুপাতের মূল সূত্র। বীজগণিতে লিখিত ও ইউক্লিডের প্রণীত সমানুপাতের সংজ্ঞা এক রূপ নহে; বৈজিক সংজ্ঞাতে সমানুপাতের একটী রাশি অপরের কোন নির্দ্দিষ্ট গুণিত বা অংশ, অর্থাৎ এক রাশিকে অপর রাশি দ্বারা ভাগ করিলে যে সংখ্যা বা ভগ্ন রাশি উৎপন্ন হয়, তাহা কোন নির্ণেয় সংখ্যা বা ভগ্ন রাশি হইয়া থাকে; এই রূপ রাশি ও পরস্পর দৃঢ় রাশি* এ উভয় বিধ রাশিরই অনুপাত জ্যামিতিতে কল্পিত হইতে পারে;—যথা, বর্গক্ষেত্রের ভুজ ও কর্ণ রেখা অথবা বৃত্তের ব্যাস ও পরিধি, ইহাদিগের সম্বন্ধ কোন পরিমিত পূর্ণ বা ভগ্ন রাশি দ্বারা প্রকাশ করা যাইতে পারে না; কিন্তু ইউক্লিডের ধারানুসারে ইহাদের অনুপাত প্রকাশিত হইতে পারে ও আসন্নতর মান নির্ণীত হইয়া থাকে।

বিদ্যার্থীরা ষষ্ঠ অধ্যায়ের প্রথম প্রতিজ্ঞা পাঠ করিলে, ইউক্লিড যে কি রূপে এই সংজ্ঞার প্রয়োগ করিয়াছেন তাহা বুঝিতে পারিবে ও জ্যামিতির রীত্যনুসারে সমানুপাতের বিধি উত্তম রূপে তাহাদের হৃদয়ঙ্গম হইবে।

৯ম সং। নবম সংজ্ঞাতে লিখিত হইয়াছে যে, সমানুপাতে অন্তত তিনটী রাশি থাকে; অর্থাৎ এরূপ সমানুপাতে দ্বিতীয় রাশিটী দুইবার গৃহীত হয়; একবার উহা প্রথম অনুপাতের পরবর্ত্তী অন্যবার দ্বিতীয় অনুপাতের পূর্ব্ববর্ত্তী হইয়া থাকে। তিনটী রাশি সমানুপাতী হইলে স্পষ্টই বুঝা যাইতেছে যে,

---

* Incommensurable Quantities.

পরস্পরং ভাজিতযোর্যয়োর্যঃ শেষস্তয়োঃ স্যাদপবর্ত্তনং সঃ।
তেনাপবর্ত্তেন বিভাজিতৌ যৌ তৌ ভাজ্যহারৌ দৃঢ়সংজ্ঞকৌ স্তঃ॥
ভাস্করাচার্য্যঃ।

উহারা এক জাতীয় রাশি। এই তিনটীর মধ্যে দ্বিতীয় রাশিকে প্রথম ও তৃতীয়ের মধ্যসমানুপাতী এবং তৃতীয় রাশিকে প্রথম ও দ্বিতীয়ের তৃতীয়সমানুপাতী বলে।

এই তিনটী সংজ্ঞা বিদ্যার্থীদিগের জানিয়া রাখা আবশ্যক;—

(১) তিনটী রাশির মধ্যে প্রথম ও দ্বিতীয়ের অন্তরের দ্বিতীয় ও তৃতীয়ের অন্তরের সহিত যে অনুপাত, প্রথমের প্রথমের সহিত সেই অনুপাত হইলে পূর্ব্বোক্ত তিনটী রাশিকে সমান্তর সমানুপাতী বলে।

(২) তিনটী রাশির মধ্যে প্রথম ও দ্বিতীয়ের অন্তরের দ্বিতীয় ও তৃতীয়ের অন্তরের সহিত যে অনুপাত, প্রথমের দ্বিতীয়ের সহিত সেই অনুপাত হইলে পূর্ব্বোক্ত তিনটী রাশিকে সমগুণ সমানুপাতী বলে।

(৩) তিনটী রাশির মধ্যে প্রথম ও দ্বিতীয়ের অন্তরের দ্বিতীয় ও তৃতীয়ের অন্তরের সহিত যে অনুপাত, প্রথমের তৃতীয়ের সহিত সেই অনুপাত হইলে পূর্ব্বোক্ত তিনটী রাশিকে লয় সমানুপাতী বলে।

১১শ সং। প্রত্যেক অনুপাতের পরবর্ত্তী রাশি ও তাহার অব্যবহিত পরস্থিত অনুপাতের পূর্ব্ববর্ত্তী রাশি একই হইলে রাশি গুলিকে ক্রমাগত সমানুপাতী বলে।

সম্মিলিত অনুপাত। এই পারিভাষিক শব্দ ইউক্লিডের লিখিত নহে; ইহা ইংলণ্ডীয় গণিতবেত্তা সিম্‌সন সাহেব ব্যবহার করিয়াছেন। দ্বিঘাত, ত্রিঘাত ইত্যাদি অনুপাত গুলি প্রত্যেকেই সম্মিলিত অনুপাত; কেননা, দুইটী সমান অনুপাতের সম্মিলনে দ্বিঘাত, তিনটীর সম্মিলনে ত্রিঘাত প্রভৃতি অনুপাত উৎপন্ন হয়।

. পঞ্চম অধ্যায়ের সংজ্ঞার পর যে স্বতঃসিদ্ধ গুলি লিখিত হইয়াছে, তাহা সিম্‌সন সাহেবের রচিত।

পঞ্চম অধ্যায়ের প্রতিজ্ঞা গুলি চারি অংশে বিভক্ত করা যাইতে পারে। প্রথম ছয়টী প্রতিজ্ঞাতে রাশি সকলের সমগুণিতের বিষয় লিখিত হইয়াছে। ৭ম হইতে ১০ম ও ১৩শ এবং

১৪শ প্রতিজ্ঞাতে সমান ও অসমান রাশি গুলির পরস্পরের এবং অপর কোন রাশির সহিত কিরূপ অনুপাত, তাহা নির্ণীত হইয়াছে। ১১শ, ১২শ, ১৫শ, ও ১৬শ প্রতিজ্ঞা দ্বারা স্থির হইয়াছে যে, চারি রাশি সমানুপাতী হইলে একান্তরেও তাহারা সমানুপাতী হইবে; অবশিষ্ট প্রতিজ্ঞা গুলিতে যোগ, অন্তর ও সমদূর সমানুপাতের বিধি লিখিত হইয়াছে।

ক, খ, গ, ঘ ও ঙ প্রতিজ্ঞা সিমসন সাহেবের রচিত।

১ম, ২য়, ৩য়, ৪থ, ৫ম, ৬ষ্ঠ প্র। এই কয়টী প্রতিজ্ঞা পাঠ করিলে স্পষ্ট প্রতীয়মান হইবে যে, ইহাদের দ্বারা পাটীগণিত সম্বন্ধীয় কতকগুলি অনায়াস সাধ্য বিষয় উপপন্ন হইয়াছে। ইদানীন্তন সুবিখ্যাত গণিত বেত্তা ডিমর্গান সাহেব বলেন যে, ১ম প্রতিজ্ঞা দ্বারা এই মাত্র উপপন্ন হইতেছে যে, এক বিঘা ও এক কাঠা যত খানি, ১০ বিঘা ও ১০ কাঠা তাহার দশ গুণ।

ইউক্লিড ৬ষ্ঠ অধ্যায়ের নবম প্রতিজ্ঞায় একটী রেখার কোন নির্দ্দিষ্ট অংশ স্থির করিবার উপায় লিখিয়াছেন; কিন্তু ৫ম অধ্যায়ের ৫ম প্রতিজ্ঞার অঙ্কন কালে এই বিষয়টী স্বীকার করিয়াছেন; এই দোষ দেখিয়া সিমসন সাহেব এই প্রতিজ্ঞার চিত্র ভিন্ন রূপে অঙ্কিত করিয়াছেন।

১৮শ প্র। অষ্টাদশ প্রতিজ্ঞা ইউক্লিডের মূল গ্রন্থানুসারে লিখিত হইয়াছে। সিমসন ইহা ভিন্ন রূপে উপপন্ন করিয়াছেন। তিনি বলেন যে, প্রমাণ স্থলে ইউক্লিড স্বীকার করিয়াছেন যে, তিনটী রাশির চতুর্থ সমানুপাতী আর একটী রাশি স্থির হইতে পারে কিন্তু তিনি ষষ্ঠ অধ্যায়ের দ্বাদশ প্রতিজ্ঞায় চতুর্থ সমানুপাতী স্থির করিবার উপায় উদ্ভাবন করিয়াছেন; অতএব ইহা পূর্ব্বে স্বীকার করিয়া লওয়া বিধেয় নহে।

সিমসন লিখিত সম্মিলিত সমানুপাত সংক্রান্ত চ, ছ, জ ও ঝ প্রতিজ্ঞা কোন বিদ্যালয়েই পঠিত হয় না ও উহাদের বিশেষ আবশ্যকতাও দৃষ্ট হয় না; এ জন্য মূল গ্রন্থে ঐ সকল লিখিত হইল না।

৬ষ্ঠ অধ্যায়।

সংজ্ঞা।

১। যে সকল সরল রৈখিক ক্ষেত্রের কোণ গুলি যথাক্রমে পরস্পর সমান, এবং সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী তাহাদিগকে সদৃশ বা সমপ্রকৃতিক ক্ষেত্র বলা যায়।

২। যদি দুই ত্রিভুজ বা সমান্তর ক্ষেত্রের সমান সমান দুইটী কোণের পার্শ্বস্থ বাহুগুলি এরূপে সমানুপাতী হয় যে, প্রথম ক্ষেত্রের একটী বাহুতে দ্বিতীয় ক্ষেত্রের একটী বাহুতে যে অনুপাত, দ্বিতীয় ক্ষেত্রের অবশিষ্ট বাহুতে প্রথম ক্ষেত্রের অবশিষ্ট বাহুতে সেই অনুপাত, তাহা হইলে ক্ষেত্র গুলিকে বিন্যস্ত ভাবাপন্ন ক্ষেত্র বলে। (ষষ্ঠ অধ্যায়ের পরিশিষ্ট দেখ।)

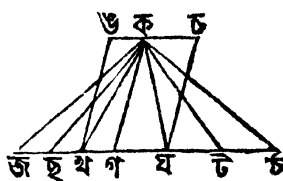
৩। কোন সরল রেখা অন্ত্য ও মধ্য অনুপাতী রূপে বিভক্ত হইয়াছে বলিলে বুঝিতে হইবে যে, সমস্ত রেখাতে উহার বৃহত্তর অংশেতে যে অনুপাত, বৃহত্তর অংশেতে ক্ষুদ্রতর অংশেতে সেই অনুপাত। (পরিশিষ্ট দেখ।)

৪। কোন ক্ষেত্রের শৃঙ্গ হইতে ভূমি পর্য্যন্ত অঙ্কিত লম্বকে ঐ ক্ষেত্রের উন্নতি বলা যায়।

১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

ত্রিভুজ ও সমান্তর ক্ষেত্র সকলের একই উন্নতি হইলে, ত্রিভুজ গুলির অনুপাত ও সমান্তর ক্ষেত্র গুলির অনুপাত, ভূমির অনুপাতানুসারে হইয়া থাকে।

কখগ ও কগঘ ত্রিভুজের এবং ঙগ ও গচ সমান্তর ক্ষেত্রের একই উন্নতি, অর্থাৎ ক বিন্দু হইতে খগএর উপর লম্ব রেখা উহাদের সাধারণ উন্নতি; তাহা হইলে খগ ভূমিতে গঘ ভূমিতে যে অনুপাত, কখগ ত্রিভুজে কগঘ ত্রিভুজে সেই অনুপাত এবং ঙগ সমান্তর ক্ষেত্রে গচ সমান্তর ক্ষেত্রেও সেই অনুপাত হইবে।

খঘ রেখার উভয় প্রান্ত বৃদ্ধি কর, ও খছ, ছজ কতিপয় রেখা খগ ভূমির সমান কর; এবং ঘট, টঠ আর কতকগুলি রেখা গঘ ভূমির সমান কর; [১ম, ৩।

এবং কছ, কজ, কট, কঠ সংযুক্ত করিয়া দাও।

পরে, গখ, খছ, ছজ পরস্পর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন। কখগ, কছখ, কজছ ত্রিভুজ গুলি পরস্পর সমান;

[১ম, ৩৮।

এই হেতু জগ ভূমি খগ ভূমির যে পরিমাণে গুণিত, কজগ ত্রিভুজও কখগ ত্রিভুজের সেই পরিমাণে গুণিত। এই রূপে, গঠ ভূমি গঘ ভূমির যে গুণিত, কগঠ ত্রিভুজও কগঘ ত্রিভুজের সেই গুণিত;
আর জগ ভূমি গঠ ভূমির সমান হইলে কজগ ত্রিভুজ কগঠ ত্রিভুজের সমান, জগ ভূমি গঠ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে কজগ ত্রিভুজ কগঠ ত্রিভুজ অপেক্ষা বৃহত্তর, এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে। [১ম, ৩৮।

অতএব এ স্থলে খগ ও গঘ ভূমি এবং কখগ ও কগঘ ত্রিভুজ এই চারি রাশির মধ্যে, প্রথম ও তৃতীয় রাশির অর্থাৎ খগ ভূমির ও কখগ ত্রিভুজের কোন সমগুণিত জগ ভূমি ও কজগ ত্রিভুজ কল্পিত হইয়াছে; আর দ্বিতীয় ও চতুর্থ রাশির অর্থাৎ গঘ ভূমির ও কগঘ ত্রিভুজের কোন সমগুণিত গঠ ভূমি ও কগঠ ত্রিভুজ কল্পিত হইয়াছে; এবং উপপন্ন হইয়াছে যে, গজ ভূমি গঠ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে কজগ ত্রিভুজ কগঠ ত্রিভুজ অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান ও ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে;
সুতরাং খগ ভূমিতে গঘ ভূমিতে যে রূপ, কখগ ত্রিভুজে কগঘ ত্রিভুজে সেই রূপ। [৫ম, সং ৫।

আবার, গঙ সমান্তর ক্ষেত্র কখগ ত্রিভুজের এবং গচ সমান্তর ক্ষেত্র কগঘ ত্রিভুজের দ্বিগুণ হওয়াতে, [১ম, ৪১। এবং রাশি সকল যে অনুপাত বিশিষ্ট, তাহাদের সমগুণিতেরাও সেই অনুপাত বিশিষ্ট হয় বলিয়া, [৫ম, ১৫।

ঙগ সমান্তর ক্ষেত্রে গচ সমান্তর ক্ষেত্রে যে রূপ, কখগ ত্রিভুজে কগঘ ত্রিভুজে সেই রূপ ;
কিন্তু পূর্ব্বে সপ্রমাণ হইয়াছে যে, কখগ ত্রিভুজে কগঘ ত্রিভুজে যে রূপ, খগতে গঘতে সেই রূপ ;
সুতরাং ঙগ সমান্তর ক্ষেত্রে গচ সমান্তর ক্ষেত্রে যে রূপ, খগ ভূমিতে গঘ ভূমিতে সেই রূপ। [৫ম, ১১।
অতএব ত্রিভুজ ও সমান্তর ক্ষেত্র ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

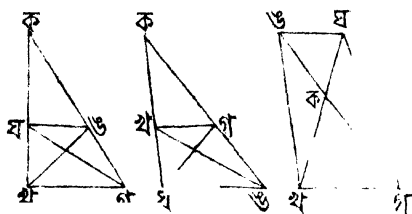
অনু। ইহা হইতে স্পষ্টই বোধ হইবে যে, ত্রিভুজ ও সমান্তর ক্ষেত্র সকলের উন্নতি সমান হইলে ত্রিভুজ সকলের অনুপাত ও সমান্তর ক্ষেত্র সকলের অনুপাত ভূমির অনুপাত অনুসারে হইয়া থাকে।

ত্রিভুজ ও সমান্তর ক্ষেত্র গুলি এরূপ করিয়া স্থাপন কর, যেন তাহাদের ভূমি এক সরল রেখায় থাকে ; পরে ত্রিভুজ দ্বয়ের শৃঙ্গ হইতে তাহাদের ভূমির উপর লম্ব টানিলে, সেই লম্বদ্বয় সমান ও সমান্তর হওয়াতে শৃঙ্গদ্বয় সংযোজক রেখা ভূমির সমান্তর হইবে ; [১ম, ৩৩।
অনন্তর, পূর্ব্ব রূপ চিত্র অঙ্কিত করিলে উপপত্তিও তদ্রূপ হইবে।

অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞা—১। সমান সমান ভূমি বিশিষ্ট ত্রিভুজ গুলির অনুপাত ও সমান্তর ক্ষেত্র সকলের অনুপাত তাহাদের উন্নতির অনুপাত অনুসারে হইয়া থাকে।

২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন ত্রিভুজের এক বাহুর সমান্তর একটী রেখা টানিলে, তাহা অন্য দুই বাহুকে বা বর্দ্ধিত অন্য দুই বাহুকে সমানুপাতী রূপে ছেদ করিবে; আবার ত্রিভুজের দুই বাহু বা বর্দ্ধিত দুই বাহু সমানুপাতী রূপে ছিন্ন হইলে, ছেদ বিন্দু দ্বয় সংযোজক রেখা অবশিষ্ট বাহুর সমান্তর হইবে।

কখগ ত্রিভুজের খগ বাহুর সমান্তর করিয়া ঘঙ রেখা টান; তাহা হইলে খঘতে ঘকতে যে অনুপাত, গঙতে ঙকতে সেই অনুপাত হইবে।

খঙ, গঘ সংযুক্ত কর;

তাহা হইলে খঘঙ ত্রিভুজ গঘঙ ত্রিভুজের সমান হইবে; কেননা, উভয়েই ঘঙ ভূমির উপরিস্থ এবং ঘঙ ও খগ এই দুই পরস্পর সমান্তর রেখার মধ্যস্থ হইয়াছে; [১ম, ৩৭।

আর, কঘঙ অন্য একটী ত্রিভুজ;

অতএব, সমান সমান রাশির অন্য কোন রাশির সহিত

অনুপাত একই হইয়া থাকে বলিয়া, [৫ম, ৭।

খঘঙ ত্রিভুজে কঘঙ ত্রিভুজে যে রূপ, গঘঙ ত্রিভুজে কঘঙ ত্রিভুজে সেই রূপ;

কিন্তু খঘতে ঘকতে যে রূপ, খঘঙ ত্রিভুজে কঘঙ ত্রিভুজে সেই রূপ,

কেননা, এই দুই ত্রিভুজের উন্নতি, অর্থাৎ ঙ শীর্ষ বিন্দু হইতে কখএর উপর লম্ব একই রেখা হওয়াতে, ত্রিভুজ দ্বয়ের অনুপাত তাহাদের ভূমির অনুপাত অনুসারে হইবে। [৬ঠ, ১।

এই কারণে, গঙতে ঙকতে যে রূপ, গঘঙ ত্রিভুজে কঘঙ ত্রিভুজে সেই রূপ;

অতএব খঘতে ঘকতে যে রূপ, গঙতে ঙকতে সেই রূপ। [৫ম, ১১।

অনন্তর যেন খঘতে ঘকতে যে রূপ, গঙতে ঙকতে সেই রূপ হইল; ঘঙ সংযুক্ত কর; তাহা হইলে ঘঙ রেখা খগএর সমান্তর হইবে।

পূর্ব্ব প্রকার চিত্র অঙ্কিত কর।

এক্ষণে, খঘতে ঘকতে যে রূপ, গঙতে ঙকতে সেই রূপ বলিয়া,

এবং খঘতে ঘকতে যে রূপ, খঘঙ ত্রিভুজে কঘঙ ত্রিভুজে সেই রূপ হওয়াতে, [৬ঠ, ১।

ও গঙতে ঙকতে যে রূপ, গঘঙ ত্রিভুজে কঘঙ ত্রিভুজে সেই রূপ হওয়ায়; [৬ঠ, ১।

খঘঙ ত্রিভুজে কঘঙ ত্রিভুজে যে রূপ, গঘঙ ত্রিভুজে কঘঙ ত্রিভুজে সেই রূপ; [৫ম, ১১।

অর্থাৎ খঘঙ ও গঘঙ এই দুই ত্রিভুজের প্রত্যেকেই কঘঙ ত্রিভুজের সহিত এক অনুপাত বিশিষ্ট;

অতএব খঘঙ ত্রিভুজ গঘঙ ত্রিভুজের সহিত সমান; [৫ম, ৯।

কিন্তু সমান সমান ত্রিভুজ এক ভুমির উপর এক পার্শ্বে থাকিলে পরস্পর সমান্তর দুই রেখার মধ্যস্থ হইবে; [১ম, ৩৯।

সুতরাং ঘঙ রেখা খগএর সমান্তর।

অতএব কোন ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অাঃ প্রঃ—২। কোন ত্রিভুজের ভূমির সমান্তর একটী রেখা টানিলে, তাহা যদি অপর দুই বাহুকে ছেদ করে, তবে বাহুদ্বয় যে অনুপাত বিশিষ্ট, যথাক্রমে তাহাদের এক একটী খণ্ডও সেই অনুপাত বিশিষ্ট হইবে।

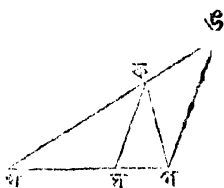
৩। কগখ, কঘখ এই দুই ত্রিভুজের সাধারণ ভুমিস্থ ঙ বিন্দু হইতে কগ ও কঘএর সমান্তর দুইটী রেখা টান; এই দুই রেখা যথাক্রমে গখ ও ঘখএর সহিত যেন চ ও ছ বিন্দুতে সংলগ্ন হইল। প্রমাণ কর যে, চছ, গঘএর সমান্তর।

৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ কোণ যদি এক সরল রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হয় এবং সেই সরল রেখা যদি ভুমিকে ছেদ করে, তবে ত্রিভুজের অন্য দুই বাহু যে অনুপাত

বিশিষ্ট, ভুমির দুই খণ্ডও সেই অনুপাত বিশিষ্ট হইবে; আবার ত্রিভুজের দুই বাহুর যে অনুপাত, ভুমির দুই খণ্ডের সেই অনুপাত হইলে, ভুমির ছেদ বিন্দুর ও শীর্ষ কোণের যোজক রেখা শীর্ষ কোণকে দ্বিখণ্ড করিবে।

কঘ সরল রেখা যেন কখগ ত্রিভুজের খকগ শৃঙ্গস্থ কোণ দ্বিখণ্ড করিয়া ঘ বিন্দুতে ভূমিকে ছেদ করিয়াছে; খক ও কগ যে অনুপাত বিশিষ্ট, খঘ ও ঘগ সেই অনুপাত বিশিষ্ট হইবে।

গ বিন্দু দিয়া ঘকএর সমান্তর গঙ রেখা টান; [১ম, ৩১। খক বাহু বর্দ্ধিত করিলে তাহা যেন ঙ বিন্দুতে গঙর সহিত মিলিত হইল।

পরে, কঘ ও ঙগ সমান্তর রেখা দ্বয়ের সহিত কগ রেখা সংলগ্ন হইয়াছে বলিয়া,

কগঙ ও গকঘ একান্তর কোণ দ্বয়* পরস্পর সমান;

[১ম, ২৯।

কিন্তু গকঘ কোণ খকঘ কোণের সমান কল্পিত হইয়াছে; এই হেতু খকঘ কোণ কগঙ কোণের সমান; [স্বতঃ ১। আবার কঘ, ঙগ সমান্তর রেখার উপর খকঙ রেখার পাত হওয়াতে, বহিস্থ খকঘ কোণ অন্তরস্থ কঙগ কোণের সমান; [১ম, ২৯।

* The two alternate angles.

কিন্তু উপপন্ন হইয়াছে যে, খকঘ কোণ কগঙ কোণের সমান;
এই হেতু কগঙ কোণ কঙগ কোণের সমান; [স্বতঃ ১।
অতএব কগ রেখা কঙর সমান। [১ম, ৬।
পরে, কঘ রেখা, ঙখগ ত্রিভুজের ঙগ বাহুর সমান্তর বলিয়া, [অঙ্কন।
খকতে কঙতে যে রূপ, খঘতে ঘগতে সেই রূপ; [৬ষ্ঠ, ২।
কিন্তু কঙ রেখা কগএর সমান;
সুতরাং খকতে কগতে যে রূপ, খঘতে ঘগতে সেই রূপ।

অনন্তর যেন খকতে কগতে যে রূপ, খঘতে ঘগতে সেই রূপ হইল; কঘ সংযুক্ত কর। খকঘ কোণ কঘ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে।

পূর্ব্ব প্রকার চিত্র অঙ্কিত কর।

পরে, খকতে কগতে যে রূপ, খঘতে ঘগতে সেই রূপ হওয়ায়,
আর কঘ রেখা ঙগএর সমান্তর বলিয়া, খকতে কঙতে যে রূপ, খঘতে ঘগতে সেই রূপ হওয়াতে; [৬ষ্ঠ, ২।
খকতে কগতে যে রূপ, খকতে কঙতে সেই রূপ; [৫ম, ১১।
এই হেতু কগ রেখা কঙর সমান; [৫ম, ৯।
অতএব কঙগ কোণ কগঙ কোণের সমান; [১ম, ৫।
কিন্তু কঙগ কোণ বহিস্থ খকঘ কোণের সমান; এবং কগঙ কোণ তাহার একান্তর গকঘ কোণের সমান; [১ম, ২৯।

সুতরাং, খকঘ কোণ গকঘ কোণের সমান; [স্বতঃ ১।
অর্থাৎ খকগ কোণ কঘ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।
অতএব কোন ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৪। একটী সরল রেখা কোন ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ কোণ দ্বিখণ্ড করিয়া ভূমি ছেদ করিলে, ত্রিভুজের দুই বাহুর যে অনুপাত, শীর্ষ কোণ দ্বিখণ্ড কারক রেখা দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজ দ্বয়ও সেই অনুপাত বিশিষ্ট হইবে।

ক প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন ত্রিভুজের বহিস্থ কোণ যদি এক সরল রেখার দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হয় এবং সেই রেখা যদি বর্দ্ধিত ভূমিকে ছেদ করে, তবে ত্রিভুজের অন্য দুই বাহু যে অনুপাত বিশিষ্ট, ভূমির এক এক প্রান্ত ও দ্বিখণ্ডকারক রেখার মধ্যস্থিত রেখাদ্বয়ও সেই অনুপাত বিশিষ্ট হইবে; আর ত্রিভুজের দুই বাহুর যে অনুপাত, যদি সমস্ত বর্দ্ধিত ভূমি ও বর্দ্ধিত অংশের সেই অনুপাত হয়, তবে শৃঙ্গ হইতে ছেদবিন্দু পর্য্যন্ত অঙ্কিত রেখা, ত্রিভুজের বহিস্থ কোণকে দ্বিখণ্ড করিবে।

কখগ ত্রিভুজের খক বাহু ঙ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর এবং বহিস্থ গকঙ কোণকে কঘ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড কর। কঘ রেখা যেন ঘ বিন্দুতে বর্দ্ধিত ভূমির সহিত সংলগ্ন হইল;

তাহা হইলে খকতে কগতে যে রূপ, খঘতে ঘগতে সেই রূপ হইবে।

গ বিন্দু দিয়া ঘকএর সমান্তর গচ রেখা টান;
[১ম, ৩১।

খ কএর উপর চ বিন্দুতে যেন গচ রেখার সম্পাত হইল;

তাহা হইলে কগ রেখা কঘ, চগ সমান্তর রেখাদ্বয়ের সহিত সংলগ্ন হইয়াছে বলিয়া কগচ কোণ তাহার একান্তর গকঘ কোণের সমান; [১ম, ২৯।

কিন্তু গকঘ কোণ ঘকঙ কোণের সমান কল্পিত হইয়াছে;

অতএব ঘকঙ কোণ কগচ কোণের সমান। [স্বতঃ ১।

আবার কঘ, চগ সমান্তর রেখাদ্বয়ের উপর চকঙ রেখার পাত হওয়াতে, বহিস্থ ঘকঙ কোণ অন্তরস্থ কচগ কোণের সমান; [১ম, ২৯।

কিন্তু ঘকঙ কোণ কগচ কোণের সমান উপপন্ন হইয়াছে;

এই হেতু কগচ কোণ কচগ কোণের সমান; [স্বতঃ ১।

সুতরাং কগ রেখা কচ রেখার সমান। [১ম, ৬।

পরে, কঘ রেখা খচগ ত্রিভুজের চগ ভূমির সমান্তর হওয়াতে, [অঙ্কন।

খকতে কচতে যে রূপ, খঘতে ঘগতে সেই রূপ; [৬ঠ, ২।

কিন্তু কচ রেখা কগএর সমান;

সুতরাং খকতে কগতে যে রূপ, খঘতে ঘগতে সেই রূপ।
[৫ম, ৭।

অনন্তর যেন খকতে কগতে যে রূপ, খঘতে ঘগতে সেই রূপ হইল; ঘক সংযুক্ত কর; তাহা হইলে বহিস্থ গকঙ কোণ ঘক রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে।

পূর্ব্ব রূপ চিত্র অঙ্কিত কর।

এক্ষণে, খকতে কগতে যে রূপ, খঘতে ঘগতে সেই রূপ হওয়াতে, [কল্পনা।

ও খকতে কচতে যে রূপ, খঘতে ঘগতে সেই রূপ বলিয়া, [৬ষ্ঠ, ২।

খকতে কগতে যে রূপ, খকতে কচতে সেই রূপ; [৫ম, ১১।

এই হেতু কগ রেখা কচ রেখার সমান, [৫ম, ৯।

সুতরাং কচগ কোণ কগচ কোণের সমান; [১ম, ৫।

কিন্তু কচগ কোণ বহিস্থ ঙকঘ কোণের সমান; [১ম, ২৯।

এবং কগচ কোণ তাহার একান্তর গকঘ কোণের সমান; [১ম, ২৯।

সুতরাং গকঘ কোণ ঘকঙ কোণের সমান, [স্বতঃ ১।

অর্থাৎ গকঙ কোণ কঘ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

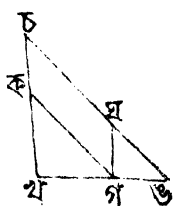
অতএব কোন ত্রিভুজের বহিস্থ কোণ ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৫। এই প্রতিজ্ঞার চিত্রে যদি খকগ কোণ কছ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড করা যায়, তবে খঘ রেখা গ ও ছ বিন্দুতে লয় বিভাগ অনুসারে বিভক্ত হইবে; অর্থাৎ সমস্ত রেখাতে এক পার্শ্বের খণ্ডেতে যে অনুপাত, অপর পার্শ্বের খণ্ডে মধ্য খণ্ডে সেই অনুপাত হইবে।

৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

পরস্পর সমান কোণী ত্রিভুজ সকলের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহুগুলি সমানুপাতী, এবং যে যে বাহু সমান সমান কোণের সম্মুখীন, তাহারা সবর্গীয় অর্থাৎ অনুপাত গুলির পূর্ব্ববর্ত্তী বা পরবর্ত্তী হইবে।

কখগ, ঘগঙ যেন দুইটী পরস্পর সমান কোণী ত্রিভুজ; ইহাদের কোণ গুলির মধ্যে কখগ কোণ ঘগঙ কোণের সমান ও কগখ কোণ ঘঙগ কোণের সমান; সুতরাং খকগ কোণ গঘঙ কোণের সমান; [১ম, ৩২।

তাহা হইলে কখগ, ঘগঙ ত্রিভুজের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু সমানুপাতী এবং যে সকল বাহু সমান সমান কোণের সম্মুখীন, তাহারা সবর্গীয় হইবে।

ঘগঙ ত্রিভুজ এরূপে স্থাপিত কর, যেন গঙ বাহু খগ বাহুর সহিত সংলগ্ন এবং এক রেখাস্থ হয়। [১ম, ২২।

পরে, খগক কোণ গঙঘ কোণের সমান বলিয়া, [কং। প্রত্যেকের সহিত কখগ কোণ যোগ করিলে, একত্রকৃত কখগ ও খগক কোণ, একত্রকৃত কখগ ও গঙঘ কোণের সমান হইবে; [স্বতঃ ২।

কিন্তু কখগ ও খগক কোণ দুই সমকোণের ন্যূন; [১ম, ১৭।

এই হেতু কখগ ও গঙঘ এই দুই কোণ একত্র যোগে দুই

সমকোণ অপেক্ষা ন্যূন ; অতএব খক, ঙঘ বর্দ্ধিত করিলে সংলগ্ন হইবে। [স্বতঃ ১২।

তাহারা বর্দ্ধিত হইয়া যেন চ বিন্দুতে সংলগ্ন হইল।

পরে, কখগ কোণ ঘগঙ কোণের সমান হওয়াতে, [কল্পনা।

খচ রেখা গঘএর সমান্তর ; [১ম, ২৮।

আর কগখ কোণ ঘঙগ কোণের সমান বলিয়া, [কল্পনা।

কগ রেখা চঙর সমান্তর ;

এই হেতু চকগঘ একটী সমান্তর ক্ষেত্র ;

অতএব কচ রেখা গঘএর এবং কগ, চঘএর সমান।

[১ম, ৩৪।

আবার কগ রেখা চখঙ ত্রিভুজের চঙ বাহুর সমান্তর বলিয়া,

খকতে কচতে যে রূপ, খগতে গঙতে সেই রূপ ; [৬ঠ, ২।

কিন্তু কচ রেখা গঘএর সমান ;

অতএব খকতে গঘতে যে রূপ, খগতে গঙতে সেই রূপ,

[৫ম, ৭।

এবং একান্তরে, কখতে খগতে যে রূপ, ঘগতে গঙতে সেই রূপ। [৫ম, ১৬।

পুনরায়, গঘ রেখা খচএর সমান্তর হওয়াতে,

খগতে গঙতে যে রূপ, চঘতে ঘঙতে সেই রূপ ; [৬ঠ, ২।

কিন্তু চঘ রেখা কগএর সমান ;

এ জন্য, খগতে গঙতে যে রূপ, কগতে ঘঙতে সেই রূপ ;

[৫ম, ৭।

এবং একান্তরে, খগতে গকতে যে রূপ, গঙতে ঙঘতে সেই রূপ। [৫ম, ১৬।

পরে, কখতে খগতে যে রূপ, ঘগতে গঙতে সেই রূপ প্রতিপন্ন হইয়াছে বলিয়া,

এবং খগতে গকতে যে রূপ, গঙতে ঙঘতে সেই রূপ হওয়াতে,

ক্রম সমানুপাতে, খকতে কগতে যে রূপ, গঘতে ঘঙতে সেই রূপ। [৫ম, ২২।

অতএব পরস্পর সমান কোণী ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৬। ত্রিভুজের শৃঙ্গ হইতে একটী সরল রেখা টানিলে, উহা যদি ভূমিকে দ্বিখণ্ড করে, তবে ভূমির সমান্তর ও দুই ভুজ দ্বারা সীমা বদ্ধ যাবতীয় রেখা, প্রথমোক্ত রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে।

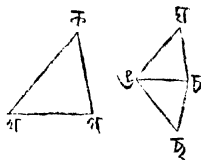
৭। সমান কোণী ত্রিভুজ সকলের শৃঙ্গ হইতে ভূমির উপর লম্ব টানিলে, ভূমি সকল পরস্পর যে অনুপাত বিশিষ্ট, লম্ব গুলিও পরস্পর সেই অনুপাত বিশিষ্ট হইবে।

৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের প্রত্যেক কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি ক্রমে অন্যের প্রত্যেক কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলির সহিত সমানুপাতী হইলে, ত্রিভুজ দ্বয় পরস্পর সমান কোণী হইবে এবং যে যে কোণ সবর্গীয় বাহুর সম্মুখীন, তাহারা পরস্পর সমান হইবে।

কখগ, ঘঙচ ত্রিভুজের বাহু গুলি যেন সমানুপাতী অর্থাৎ কখতে খগতে যে অনুপাত, ঘঙতে ঙচতে সেই

অনুপাত এবং খগতে গকতে যে অনুপাত, ঙচতে চঘতে সেই অনুপাত; অতএব ক্রম সমানুপাতে, খকতে কগতে যে অনুপাত, ঙঘতে ঘচতে সেই অনুপাত; তাহা হইলে, কখগ ও ঘঙচ ত্রিভুজ দ্বয় সমান কোণী হইবে এবং উহাদের যে যে কোণ সবর্গীয় বাহুর সম্মুখীন, তাহারা পরস্পর সমান হইবে; অর্থাৎ কখগ কোণ ঘঙচ কোণের, খগক কোণ ঙচঘ কোণের এবং খকগ কোণ ঙঘচ কোণের সমান হইবে।

ঙচ সরল রেখার ঙ বিন্দুতে কখগ কোণের সমান চঙছ কোণ এবং চ বিন্দুতে খগক কোণের সমান ঙচছ কোণ কর; [১ম, ২৩।

অতএব অবশিষ্ট ঙছচ কোণ অবশিষ্ট খকগ কোণের সমান হইবে। [১ম, ৩২।

সুতরাং, কখগ ও ঙছচ ত্রিভুজ সমান কোণী;

এবং তাহাদের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহুগুলি সমানুপাতী; [৬ষ্ঠ, ৪।

অতএব কখতে খগতে যে রূপ, ছঙতে ঙচতে সেই রূপ, আর কখতে খগতে যে রূপ, ঘঙতে ঙচতে সেই রূপ। [কল্পনা।

এই হেতু, ঘঙতে ঙচতে যে রূপ, ছঙতে ঙচতে সেই রূপ; [৫ম, ১১।

সুতরাং, ঘঙ রেখা ছঙর সমান। [৫ম, ৯

এই কারণে, ঘচ ও ছচ রেখা দ্বয় পরস্পর সমান।

পরে, ঘঙচ ও ছঙচ এই দুই ত্রিভুজের ঘঙ বাহু ছঙ বাহুর সমান এবং ঙচ সামান্য বাহু বলিয়া,

ঘঙ, ঙচ এই দুই বাহু ক্রমে ছঙ, ঙচ বাহু দ্বয়ের সমান;

এবং ঘচ ভূমি ছচ ভূমির সমান;

অতএব ঘঙচ কোণ ছঙচ কোণের সমান; [১ম, ৮।

এবং সমান সমান বাহুর সম্মুখীন কোণ গুলিও যথাক্রমে সমান; [১ম, ৪।

অতএব ঘচঙ কোণ ছচঙ কোণের ও ঙঘচ কোণ ঙছচ কোণের সমান।

আবার ঘঙচ কোণ ছঙচ কোণের সমান বলিয়া,

এবং ছঙচ কোণ কখগ কোণের সমান হওয়াতে, [অঙ্কন।

কখগ কোণ ঘঙচ কোণের সমান। [স্বতঃ ১।

এই কারণে, কগখ কোণ ঘচঙ কোণের সমান এবং ক কোণ ঘ কোণের সমান।

সুতরাং কখগ ও ঘঙচ ত্রিভুজ দ্বয় পরস্পর সমান কোণী।

অতএব দুই ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৮। এই প্রতিজ্ঞা প্রয়োগ দ্বারা প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজের বাহু সকল দ্বিখণ্ড করিয়া খণ্ডন বিন্দু গুলি পরস্পর সংযুক্ত করিলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে, তাহা প্রথম ত্রিভুজের কোণের সমান কোণ বিশিষ্ট হইবে।

৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

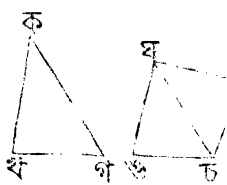
যদি দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের একটী কোণ অন্যের একটী কোণের সমান হয় এবং সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী হয়, তবে

ত্রিভুজ দুইটী পরস্পর সমান কোণী হইবে এবং সমান সমান কোণ গুলি সবর্গীয় বাহুর সম্মুখে থাকিবে।

কখগ, ঘঙচ এই দুই ত্রিভুজের একের খকগ কোণ অন্যের ঙঘচ কোণের সমান এবং এই কোণ দ্বয়ের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী, অর্থাৎ খকতে কগতে যে অনুপাত, ঙঘতে ঘচতে সেই অনুপাত ; তাহা হইলে কখগ ও ঘঙচ ত্রিভুজ দ্বয় সমান কোণ বিশিষ্ট হইবে অর্থাৎ কখগ কোণ ঘঙচ কোণের এবং খগক কোণ ঙচঘ কোণের সমান হইবে।

খকগ অথবা ঙঘচ কোণের সমান করিয়া, ঘচ রেখার ঘ বিন্দুতে চঘছ কোণ কর, আর ঐ রেখার চ বিন্দুতে কগখ কোণের সমান ঘচছ কোণ কর ; [১ম,

এই হেতু অবশিস্ট খ কোণ অবশিস্ট ছ কোণের সমান।

[১ম, ৩২

অতএব কখগ ও ঘছচ ত্রিভুজ দ্বয় পরস্পর সমান কোণী এজন্য খকতে কগতে যে রূপ, ছঘতে ঘচতে সেই রূপ।

[৬ষ্ঠ, ৪

কিন্তু খকতে কগতে যে রূপ, ঙঘতে ঘচতে সেই রূপ।

[কল্পনা।

এই হেতু ঙঘতে ঘচতে যে রূপ, ছঘতে ঘচতে সেই রূপ

[৫ম, ১১

সুতরাং ঙঘ রেখা ছঘএর সমান; [৫ম, ৯।

আর ঘচ রেখা ঘঙচ ও ঘছচ ত্রিভুজ দ্বয়ের সাধারণ বাহু;

অতএব ঙঘ, ঘচ এই দুই বাহু যথাক্রমে ছঘ, ঘচ বাহুর সমান;

এবং ঙঘচ কোণ ছঘচ কোণের সমান; [অঙ্কন।

এই হেতু ঙচ ভূমি ছচ ভূমির সমান ও ঘঙচ ত্রিভুজ ঘছচ ত্রিভুজের সমান,

এবং সমান সমান বাহুর সম্মুখীন কোণ গুলি যথাক্রমে পরস্পর সমান; [১ম, ৪।

অতএব ঘচছ কোণ ঘচঙ কোণের এবং ছ কোণ ঙ কোণের সমান।

কিন্তু ঘচছ কোণ কগখ কোণের সমান; [অঙ্কন।

অতএব কগখ কোণ ঘচঙ কোণের সমান; [স্বতঃ ১।

আর খকগ কোণ ঙঘচ কোণের সমান; [কল্পনা।

সুতরাং অবশিষ্ট খ কোণ অবশিষ্ট ঙ কোণের সমান।

অতএব যদি দুই ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

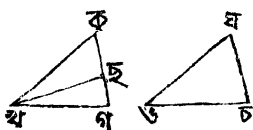
অঃ প্রঃ—৯। কখ সরল রেখা গ ও ঘ বিন্দুতে এরূপে বিভক্ত হইয়াছে যে, কখ : কঘ : : কগ : কঙ। যদি ক বিন্দু হইতে কখএর সহিত একটী কোণ করিয়া কঙ রেখা টানা যায় ও তাহা যদি কগএর সমান হয়, তবে ঘঙখ কোণ ঙগ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে।

৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যদি দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের একটী কোণ অন্যের একটী কোণের সমান হয় এবং আর এক একটী কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী হয়, তবে অবশিষ্ট এক একটী কোণ প্রত্যেকে এক সমকোণের ন্যূন বা অন্যূন হইলে কিম্বা তাহাদের কোনটী সম-কোণ হইলে, ত্রিভুজ দুইটী পরস্পর সমান কোণ বিশিষ্ট হইবে এবং যে যে কোণের পার্শ্বস্থ বাহু অনুপাতী, সেই সেই কোণ সমান হইবে।

কখগ, ঘঙচ এই দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের একটী কোণ অন্যের একটী কোণের সমান, অর্থাৎ খকগ কোণ ঙঘচ কোণের সমান এবং কখগ, ঘঙচ এই দুই কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী অর্থাৎ কখতে খগতে যে অনুপাত, ঘঙতে ঙচতে সেই অনুপাত। প্রথমতঃ অবশিষ্ট গ ও চ কোণ প্রত্যেকে এক সমকোণের ন্যূন হইলে, কখগ ও ঘঙচ ত্রিভুজ দুইটী পরস্পর সমান কোণী হইবে, অর্থাৎ কখগ কোণ ঘঙচ কোণের এবং অবশিষ্ট গ কোণ অবশিষ্ট চ কোণের সমান হইবে।

কখগ কোণ যদি ঘঙচ কোণের সমান না হয়, তবে তাহাদের মধ্যে অবশ্যই একটী অন্যা-পেক্ষা বৃহত্তর হইবে;

কখগ যেন বৃহত্তর হইল।

কখ রেখার খ বিন্দুতে ঘঙচ কোণের সমান কখছ কোণ কর। [১ম, ২৩।

পরে, ক কোণ ঘ কোণের সমান হওয়াতে, [কল্পনা।
এবং কখছ কোণ ঘঙচ কোণের সমান বলিয়া, [অঙ্কন।
অবশিষ্ট কছখ কোণ, অবশিষ্ট ঘচঙ কোণের সমান ;
এই হেতু, কখছ ও ঘঙচ এই দুইটী ত্রিভুজ সমান কোণী ;
অতএব কখতে খছতে যে রূপ, ঘঙতে ঙচতে সেই রূপ ;
[৬ষ্ঠ, ৪।
কিন্তু কখতে খগতে যে রূপ, ঘঙতে ঙচতে সেই রূপ ; [কং।
অতএব কখতে খগতে যে রূপ, কখতে খছতে সেই রূপ ;
[৫ম, ১১।
এই হেতু খগ রেখা খছএর সমান ; [৫ম, ৯।
তজ্জন্য, খগছ কোণ খছগ কোণের সমান ; [১ম, ৫।
কিন্তু খগছ কোণ এক সম কোণ অপেক্ষা ন্যূন ; [কল্পনা।
এই হেতু খছগ কোণ এক সম কোণ অপেক্ষা ন্যূন ;
অতএব সন্নিহিত কছখ কোণ অবশ্যই এক সম কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ; [১ম, ১৩
কিন্তু প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, কছখ কোণ চ কোণের সমান,
এই হেতু চ কোণ এক সম কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ;
কিন্তু চ কোণ এক সম কোণ অপেক্ষা ন্যূন কল্পিত হইয়াছে ;
সুতরাং, এরূপ হওয়া যুক্তি বিরুদ্ধ।
অতএব কখগ ও ঘঙচ কোণ অসমান নহে অর্থাৎ তাহারা

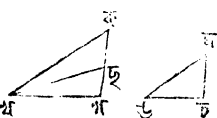
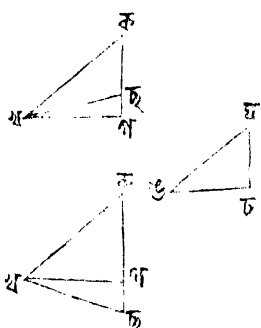
পরস্পর সমান ;
আর ক কোণ ঘ কোণের সমান ; [কল্পনা।
এই হেতু অবশিষ্ট গ কোণ অবশিষ্ট চ কোণের সমান ;
অতএব কখগ ও ঘঙচ এই দুই ত্রিভুজ পরস্পর সমান কোণী।

দ্বিতীয়ত, গ ও চ কোণ প্রত্যেকে এক সম কোণ অপেক্ষা অন্যূন হইলে, কখগ ও ঘঙচ ত্রিভুজ দ্বয় পরস্পর সমান কোণী হইবে। পূর্ব্ব প্রকরণের ন্যায় চিত্র অঙ্কিত করিলে, সেই রূপে সপ্রমাণ হইবে যে, খগ রেখা খছএর সমান ;

ক ঘ ছ খ গ ঙ চ

এই হেতু খগছ কোণ খছগ কোণের সমান ; [১ম, ৫।
কিন্তু খগছ কোণ এক সম কোণের ন্যূন নহে ; [কল্পনা।
সুতরাং খছগ কোণ এক সম কোণের ন্যূন নহে ;
অর্থাৎ খগছ ত্রিভুজের দুইটী কোণের সমষ্টি দুই সম-কোণের ন্যূন নহে ;
কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব। [১ম, ১৭।
অতএব প্রথম প্রকরণের ন্যায় সপ্রমাণ হইবে যে, কখগ ও ঘঙচ এই দুই ত্রিভুজ সমান কোণী।

তৃতীয়ত, গ ও চ এই দুই কোণের মধ্যে গ কোণ সম কোণ হইলে, কখগ ও ঘঙচ ত্রিভুজ দ্বয় সমান কোণী হইবে।

কখগ ও **ঘঙচ** ত্রিভুজ দ্বয় যদি সমান কোণী না হয়, তবে **ঘঙচ** কোণের সমান করিয়া **কখ** রেখার **খ** বিন্দুতে **কখছ** কোণ অঙ্কিত কর। [১ম, ২৩।

তাহা হইলে, প্রথম প্রকরণের ন্যায় সপ্রমাণ হইবে যে, **খগ** রেখা **খছ**এর সমান;

এই হেতু **খগছ** কোণ **খছগ** কোণের সমান; [১ম, ৫।

কিন্তু **খগছ** কোণ এক সম কোণ; [কল্পনা।

এই হেতু **খছগ** কোণ এক সম কোণ;

অর্থাৎ **খগছ** ত্রিভুজের দুই কোণের সমষ্টি দুই সম কোণের সমান;

কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব। [১ম, ১৭।

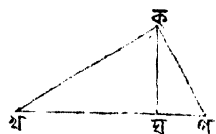
সুতরাং **কখগ** ও **ঘঙচ** ত্রিভুজ দ্বয় পরস্পর সমান কোণী। অতএব যদি দুই ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অ: প্রঃ—১০। এই প্রতিজ্ঞায় লিখিত দুইটী ত্রিভুজের অবশিষ্ট কোণ গুলি যদি এক জাতীয় না হয়, তবে প্রমাণ কর যে, তাহাদের যোগ ফল দুই সম কোণের সমান হইবে। (ত্রিকোণমিতি পাঠের সময় ৭ম ও এই অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞাটির বিশেষ আবশ্যকতা দৃষ্ট হইবে।)

৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন সম কোণী ত্রিভুজের সম কোণ হইতে ভূমির উপর লম্ব টানিলে, লম্বের দুই পার্শ্বস্থ ত্রিভুজ দ্বয় সমুদয় ত্রিভুজের এবং পরস্পরের সদৃশ হইবে।

কখগ ত্রিভুজের খকগ কোণ সম কোণ; ক বিন্দু হইতে ভূমির উপর কঘ লম্ব টান; তাহা হইলে ঘকখ, ঘকগ ত্রিভুজ দ্বয় সমুদয় কখগ ত্রিভুজের ও পরস্পরের সদৃশ হইবে।

খকগ ও খঘক এই দুই কোণ, প্রত্যেকে সম কোণ হওয়াতে, পরস্পর সমান, [স্বতঃ ১১।
আর খ কোণ কখগ ও ঘখক ত্রিভুজ দ্বয়ের সামান্য কোণ;
এই হেতু অবশিষ্ট কগখ কোণ, অবশিষ্ট ঘকখ কোণের সমান। [১ম, ৩২।
সুতরাং কখগ ও ঘখক ত্রিভুজ দ্বয় পরস্পর সমান কোণী; এবং সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী হইয়া থাকে; [৬ঠ, ৪।
অতএব ত্রিভুজ দুইটী সদৃশ। [৬ঠ, সং ১।
এই রূপে উপপন্ন হইবে যে, ঘকগ ও কখগ ত্রিভুজ দ্বয় পরস্পর সমান কোণী ও সদৃশ;
আর ঘখক ও ঘকগ এই দুই ত্রিভুজ প্রত্যেকে কখগ

ত্রিভুজের কোণের সমান কোণ বিশিষ্ট ও তাহার সদৃশ হওয়াতে, পরস্পর সমান কোণী ও সদৃশ হইয়াছে।
অতএব কোন সম কোণী ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

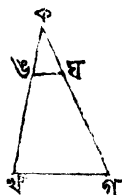
অনুমান। এই প্রতিজ্ঞা হইতে সহজেই প্রতিপন্ন হইবে যে, কোন সম কোণী ত্রিভুজের সম কোণ হইতে ভূমির উপর লম্ব, ভূমির দুই খণ্ডের মধ্য সমানুপাতী এবং ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহু, ভূমির ও সেই বাহু সন্নিহিত ভূমি খণ্ডের মধ্য সমানুপাতী।

ঘখক ও ঘকগ ত্রিভুজ পরস্পর সমান কোণী হওয়াতে, খঘতে ঘকতে যে রূপ, ঘকতে ঘগতে সেই রূপ; [৬ঠ, ৪।
আবার কখগ ও ঘখক ত্রিভুজ দ্বয় সমান কোণী বলিয়া, খগতে খকতে যে রূপ, খকতে খঘতে সেই রূপ; [৬ঠ, ৪।
আর কখগ ও ঘকগ ত্রিভুজ দ্বয় সমান কোণী হওয়ায়, খগতে গকতে যে রূপ, গকতে গঘতে সেই রূপ। [৬ঠ, ৪।

অঃ প্রঃ—১১। কোন দুই বৃত্ত যদি পরস্পর বহির্দ্দিকে স্পর্শ করে, তবে তাহাদের সাধারণ স্পর্শক রেখার দুই স্পর্শ বিন্দুর মধ্যস্থ খণ্ড, বৃত্ত দ্বয়ের ব্যাসের মধ্য সমানুপাতী হইবে।

৯ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার কোন নির্দ্দিষ্ট অংশ ছেদ করিতে হইবে।

কখ যেন এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা; ইহার কোন নির্দ্দিষ্ট অংশ ছেদ করিতে হইবে।

ক বিন্দু হইতে কগ রেখা এরূপ করিয়া টান, যেন তাহা কখএর সহিত একটী কোণ উৎপন্ন করে; কগ রেখার যে কোন স্থানে ঘ বিন্দু কল্পনা কর; এবং কখ রেখা প্রস্তাবিত অংশের যে পরিমাণে গুণিত, কগ রেখাকে কঘএর সেই পরিমাণে গুণিত কর; খগ সংযুক্ত কর এবং গখএর সমান্তর ঘঙ রেখা টান।

কঙ, কখ রেখার সম্পাদ্য অংশ।

ঙঘ রেখা কখগ ত্রিভুজের খগ বাহুর সমান্তর বলিয়া, [অঙ্কন।

গঘতে ঘকতে যে সম্বন্ধ, খঙতে ঙকতে সেই সম্বন্ধ; [৬ঠ, ২।

এবং যোগ সমানুপাতে, গকতে কঘতে যে সম্বন্ধ, খকতে কঙতে সেই সম্বন্ধ। [৫ম, ১৮।

কিন্তু কগ রেখা কঘএর কোণ গুণিত; [অঙ্কন।

এই হেতু খক রেখা কঙর সেই গুণিত; [৫ম, ঘ।

অর্থাৎ কঘ রেখা কগএর যে অংশ, কঙ রেখা কখএর সেই অংশ।

অতএব নির্দ্দিষ্ট কখ রেখার প্রস্তাবিত অংশ ছেদ করা হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—১২। কোন নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের শৃঙ্গ হইতে ভূমি পর্য্যন্ত একটী রেখা এরূপে টানিতে হইবে, যেন তদ্দ্বারা নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের পঞ্চমাংশ একটী ত্রিভুজ ছেদ করা হয়।

১০ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে অন্য কোন নির্দ্দিষ্ট বিভক্ত সরল রেখার সদৃশ করিয়া ভাগ করিতে হইবে; অর্থাৎ, বিভক্ত সরল রেখার অংশ গুলি পরস্পর যে যে অনুপাত বিশিষ্ট, বিভাজ্য রেখার অংশ গুলিকেও সেই সেই অনুপাত বিশিষ্ট করিতে হইবে।

কখ নির্দ্দিষ্ট বিভাজ্য সরল রেখা ও কগ নির্দ্দিষ্ট বিভক্ত সরল রেখা: কখকে কগএর সদৃশ করিয়া ভাগ করিতে হইবে।

কগ সরল রেখা যেন ঘ ও ঙ বিন্দুতে বিভক্ত হইয়াছে; কখ, কগ রেখা দ্বয়কে এরূপে স্থাপন কর, যেন তাহাদের সম্পাতে কোন একটা কোণ উৎপন্ন হয়; খগ সংযুক্ত কর এবং ঘ ও ঙ বিন্দু দিয়া ঘচ ও ঙছ রেখা গখএর সমান্তর করিয়া টান। [১ম, ৩১।

তাহা হইলে, চ ও ছ বিন্দুতে কখ রেখা, কগএর সদৃশ রূপে বিভক্ত হইবে।

ঘ বিন্দু দিয়া কখএর সমান্তর ঘট রেখা টান;

[১ম, ৩১।

তবে চজ, জখ এই দুইএর প্রত্যেকে সমান্তর ক্ষেত্র হইবে; অতএব ঘজ, চছএর ও জট, ছখএর সমান; [১ম, ৩৪।

পুরে, জঙ রেখা ঘটগ ত্রিভুজের টগ বাহুর সমান্তর বলিয়া, [অঙ্কন।

টজতে জযতে যে রূপ, গঙতে ঙঘতে সেই রূপ।
[৬ঠ, ২।

আর টজ রেখা খছএর ও জয রেখা ছচএর সমান ;
অতএব খছতে ছচতে যে রূপ, গঙতে ঙঘতে সেই রূপ।
[৫ম, ৭।

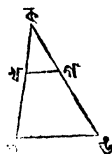
আবার চঘ রেখা কছঙ ত্রিভুজের ছঙ বাহুর সমান্তর বলিয়া,
ছচতে চকতে যে রূপ, ঙঘতে ঘকতে সেই রূপ ; [৬ঠ, ২।
আর পূর্ব্বে উপপন্ন হইয়াছে যে, খছতে ছচতে যে রূপ, গঙতে ঙঘতে সেই রূপ ;
সুতরাং, খছতে ছচতে যে রূপ, গঙতে ঙঘতে সেই রূপ এবং ছচতে চকতে যে রূপ, ঙঘতে ঘকতে সেই রূপ।
অতএব কখ রেখা কগএর সদৃশ রূপে বিভক্ত হইল।
এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—১১। একটী নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে এরূপে বর্দ্ধিত করিতে হইবে, যেন সমস্ত বর্দ্ধিত সরল রেখা ও বর্দ্ধিত অংশ কোন নির্দ্দিষ্ট অনুপাতী হয়।

১১ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

দুই নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার তৃতীয় সমানুপাতী স্থির করিতে হইবে।

কখ, কগ যেন দুই নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা; কখ ও কগএর তৃতীয় সমানুপাতী স্থির করিতে হইবে।

কখ, কগকে এরূপে স্থাপন কর, যেন তাহাদের সম্পাতে একটী কোণ উৎপন্ন হয়; কখ ও কগকে যথাক্রমে ঘ ও ঙ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর; এবং খঘকে কগএর সমান কর; [১ম, ৩।

খগ সংযুক্ত কর এবং ঘ বিন্দু দিয়া ঘঙ রেখা খগএর সমান্তর করিয়া টান। [১ম, ৩১।

গঙ রেখা কখ ও কগএর তৃতীয় সমানুপাতী হইবে।

খগ রেখা কঘঙ ত্রিভুজের ঘঙ বাহুর সমান্তর বলিয়া, [অঙ্কন।

কখতে খঘতে যে রূপ, কগতে গঙতে সেই রূপ; [৬ঠ, ২।

আর খঘ রেখা কগএর সমান; [অঙ্কন।

সুতরাং কখতে কগতে যে রূপ, কগতে গঙতে সেই রূপ। [৫ম, ৭।

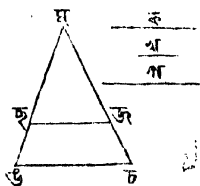
অতএব কখ ও কগ এই দুই রেখার তৃতীয় সমানুপাতী গঙ রেখা নির্ণীত হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ ৫ঃ—১৪। এই প্রতিজ্ঞার চিত্রে কগ রেখাকে কগএর সমান কল্পনা করিয়া প্রমাণ কর যে, কঙ রেখা কখ ও কগএর তৃতীয় সমানুপাতী।

১২ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

তিনটী নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার চতুর্থ সমানুপাতী স্থির করিতে হইবে।

ক, খ, গ যেন তিনটী নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা; ক, খ ও গএর চতুর্থ সমানুপাতী স্থির করিতে হইবে।

ঘঙ, ঘচ কোন দুই সরল রেখা কল্পনা করিয়া এরূপে স্থাপন কর, যেন তাহাদের সম্পাতে একটী কোণ উৎপন্ন হয়; এবং এই দুই রেখা হইতে কএর সমান করিয়া ঘছ, খএর সমান করিয়া ছঙ ও গএর সমান করিয়া ঘজ ছেদ কর; [১ম, ৩।

ছজ সংযুক্ত কর এবং ঙ বিন্দু দিয়া ছজএর সমান্তর ঙচ রেখা টান। [১ম, ৩১।

জচ রেখা সম্পাদ্য চতুর্থ সমানুপাতী।

ছজ রেখা ঘঙচ ত্রিভুজের ঙচ বাহুর সমান্তর বলিয়া. [অঙ্কন।

ঘছতে ছঙতে যে রূপ, ঘজতে জচতে সেই রূপ; [৬ঠ, ২।

আর ঘছ রেখা কএর, ছঙ রেখা খএর ও ঘজ রেখা গএর সমান; [অঙ্কন।

সুতরাং কতে খতে যে রূপ, গতে জচতে সেই রূপ।

[৫ম, ৭।

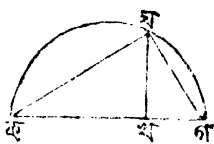
অতএব ক, খ, গ এই তিনটী নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার চতুর্থ সমানুপাতী জচ রেখা নির্ণীত হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—১৫। প্রমাণ কর যে, কোন সম কোণী ত্রিভুজের সম কোণ হইতে কর্ণের উপর লম্ব, কর্ণ ও অন্য দুই ভুজ এই তিন রাশির চতুর্থ সমানুপাতী হইবে.

১৩ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

দুই নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার মধ্য সমানুপাতী স্থির করিতে হইবে।

কখ, খগ যেন দুই নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা; এই দুই রেখার মধ্য সমানুপাতী স্থির করিতে হইবে।

কখ ও খগকে এক রেখাতে স্থাপন কর, এবং কগএর উপর কঘগ অর্দ্ধ বৃত্ত অঙ্কিত কর; খ বিন্দু হইতে কগ রেখার সহিত সম কোণ করিয়া খঘ রেখা টান। [১ম, ১১।

খঘ রেখা কখ ও খগএর মধ্য সমানুপাতী হইবে।

কঘ, ঘগ সংযুক্ত কর।

পরে, কঘগ কোণ অর্দ্ধ বৃত্তস্থ হওয়ায় একটী সম কোণ হইয়াছে। [৩য়, ৩১।

আবার, কঘগ সম কোণী ত্রিভুজের সম কোণ হইতে ভূমির উপর ঘখ লম্ব টানা হইয়াছে বলিয়া,

খঘ রেখা ভূমির দুই খণ্ড কখ ও খগএর মধ্য সমানুপাতী হইবে। [৬ঠ, ৮, অনু।

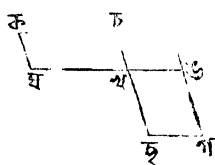
অতএব কখ ও খগ রেখার মধ্য সমানুপাতী খঘ রেখা নির্ণীত হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—১৬। দুই নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার সমান্তর, সমগুণ ও লয় মধ্য স্থির করিতে হইবে। (পরিশিষ্ট দেখ।)

১৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সমান সমান সমান্তর ক্ষেত্রের এক এক কোণ সমান হইলে, সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি বিবৃক্ত ভাবে সমানুপাতী হইবে; আর যে যে সমান্তর ক্ষেত্রের এক এক কোণ সমান এবং সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি বিবৃক্ত ভাবে সমানুপাতী, তাহারা পরস্পর সমান। (পরিশিষ্টের ২য় সংজ্ঞা দেখ।)

কখ, খগ সমান সমান সমান্তর ক্ষেত্রের **চখঘ** ও **ঙখছ** কোণ দ্বয় পরস্পর সমান; এই দুই ক্ষেত্রের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি বিবৃক্ত ভাবে সমানুপাতী হইবে, অর্থাৎ, **ঘখ**তে **খঙ**তে যে রূপ, **ছখ**তে **খচ**তে সেই রূপ হইবে।

সমান্তর ক্ষেত্র দুইটী এরূপে স্থাপন কর, যেন **ঘখ** ও **খঙ** এক রেখাস্থ হয়; সুতরাং **ছখ**, **খচ** ও এক রেখাস্থ হইবে। [১ম, ১৪।
চঙ সমান্তর ক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

পরে, **কখ** সমান্তর ক্ষেত্র, **খগ** সমান্তর ক্ষেত্রের সমান হওয়াতে, [কল্পনা।

এবং **চঙ** অন্য একটী সমান্তর ক্ষেত্র বলিয়া,

কখতে **চঙ**তে যে রূপ, **খগ**তে **চঙ**তে সেই রূপ; [৫ম, ৭।

এবং **কখ**তে **চঙ**তে যে রূপ, **ঘখ**তে **খঙ**তে সেই রূপ, [৬ষ্ঠ, ১।

আর খগতে চঙতে যে রূপ, ছখ ভূমিতে খচ ভূমিতে সেই রূপ; [৬ঠ, ১।

এই হেতু ঘখতে খঙতে যে রূপ, ছখতে খচতে সেই রূপ। [৫ম, ১১।

অনন্তর, সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি বিরত্ত ভাবে সমানুপাতী হইলে, অর্থাৎ, ঘখতে খঙতে যে রূপ, ছখতে খচতে সেই রূপ হইলে, কখ সমান্তর ক্ষেত্র, খগ সমান্তর ক্ষেত্রের সমান হইবে।

পূর্ব্ব মত ক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

পরে, ঘখতে খঙতে যে রূপ, ছখতে খচতে সেই রূপ হওয়াতে, [কল্পনা।

আর ঘখতে খঙতে যে রূপ, কখ ক্ষেত্রে চঙ ক্ষেত্রে সেই রূপ বলিয়া, [৬ঠ, ১।

এবং ছখতে খচতে যে রূপ, খগ ক্ষেত্রে চঙ ক্ষেত্রে সেই রূপ হওয়ায়, [৬ঠ, ১।

কখতে চঙতে যে রূপ, খগতে চঙতে সেই রূপ; [৫ম, ১১।

সুতরাং কখ সমান্তর ক্ষেত্র খগ সমান্তর ক্ষেত্রের সমান। [৫ম, ৯।

অতএব সমান সমান ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

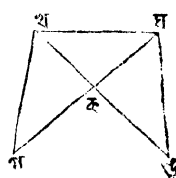
অঃ প্রঃ—১৭। কখগঘ সমান্তর ক্ষেত্রের কগ কর্ণের ও বিন্দু দিয়া কখ এবং কঘ বাহুর সমান্তর চঙছ এবং জঙট রেখা টানিয়া প্রমাণ কর যে, কচ : চঘ : : কজ : জখ।

১৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সমান সমান ত্রিভুজের এক এক কোণ সমান হইলে, সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি বিবৃত্ত ভাবে সমানুপাতী হইবে; আর যে যে ত্রিভুজের এক এক কোণ সমান এবং সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি বিবৃত্ত ভাবে সমানুপাতী, তাহারা পরস্পর সমান।

কখগ ও কঘঙ সমান সমান ত্রিভুজের যেন খকগ কোণ ঘকঙ কোণের সমান; এই দুই ত্রিভুজের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি বিবৃত্ত ভাবে সমানুপাতী হইবে, অর্থাৎ, গকতে কঘতে যে রূপ. ঙকতে কখতে সেই রূপ হইবে।

ত্রিভুজ দুইটা এরূপে স্থাপন কর, যেন গক, কঘ এক রেখাস্থ হয়; সুতরাং ঙক, কখও এক রেখাস্থ হইবে; [১ম, ১৪।

খঘ সংযুক্ত কর।

পরে, কখগ ত্রিভুজ কঘঙর সমান বলিয়া, [কল্পনা।

এবং কখঘ অন্য একটা ত্রিভুজ হওয়াতে,

কখগ ত্রিভুজে কখঘ ত্রিভুজে যে রূপ, কঘঙ ত্রিভুজে কখঘ ত্রিভুজে সেই রূপ; [৫ম, ৭।

আর কখগ ত্রিভুজে কখঘ ত্রিভুজে যে রূপ, গক ভূমিতে

কঘ ভূমিতে সেই রূপ ; [৬ষ্ঠ, ১।

আবার কঘঙ ত্রিভুজে কঘখ ত্রিভুজে যে রূপ, ঙক ভূমিতে কখ ভূমিতে সেই রূপ ; [৬ষ্ঠ, ১।

অতএব গকতে কঘতে যে রূপ, ঙকতে কখতে সেই রূপ। [৫ম, ১১।

অনন্তর, সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি বিবৃত্ত ভাবে সমানুপাতী হইলে অর্থাৎ, গকতে কঘতে যে রূপ, ঙকতে কখতে সেই রূপ হইলে, কখগ ত্রিভুজ কঘঙ ত্রিভুজের সমান হইবে।

পূর্ব্ব মত চিত্র অঙ্কিত কর।

পরে, গকতে কঘতে যে রূপ, ঙকতে কখতে সেই রূপ হওয়াতে, [কল্পনা।

আর গকতে কঘতে যে রূপ, কখগ ত্রিভুজে কখঘ ত্রিভুজে সেই রূপ বলিয়া, [৬ষ্ঠ, ১।

এবং ঙকতে কখতে যে রূপ, কঘঙ ত্রিভুজে কঘখ ত্রিভুজে সেই রূপ হওয়ায়, [৬ষ্ঠ, ১।

কখগ ত্রিভুজে কখঘ ত্রিভুজে যে রূপ, কঘঙ ত্রিভুজে কখঘ ত্রিভুজে সেই রূপ ; [৫ম, ১১।

সুতরাং কখগ ত্রিভুজ কঘঙ ত্রিভুজের সমান। [৫ম, ৯।

অতএব সমান সমান ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—১৮। সমান সমান ত্রিভুজের এক একটী কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি বিবৃত্ত ভাবে সমানুপাতী হইলে, সেই সেই কোণ পরস্পর সমান অথবা তাহাদের যোগ ফল দুই সম কোণের সমান হইবে।

১৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যদি চারি সরল রেখা সমানুপাতী হয়, তবে তাহাদের আদি ও অন্ত রেখার অন্তর্গত আয়ত, দুই মধ্য রেখার অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে; আর আদি ও অন্তের অন্তর্গত আয়ত যদি দুই মধ্য রেখার অন্তর্গত আয়তের সমান হয়, তবে ঐ চারি রেখা সমানুপাতী হইবে।

কখ, গঘ, ঙ ও চ এই চারি রেখা সমানুপাতী, অর্থাৎ, কখতে গঘতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ; তাহা হইলে কখ ও চএর অন্তর্গত আয়ত গঘ ও ঙর অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে।

ক ও গ বিন্দু হইতে কখ ও গঘ রেখার সহিত সম কোণ করিয়া কছ ও গজ রেখা টান। [১ম, ১১।

কছকে চএর সমান এবং গজকে ঙর সমান কর। [১ম, ৩।

এবং খছ, ঘজ সমান্তর ক্ষেত্র দ্বয় অঙ্কিত কর। [১ম, ৩১।

চ ঙ

চ

ক খ গ ঘ

পরে, কখতে গঘতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ হওয়াতে,

এবং ঙ রেখা গজএর সমান হওয়ায় ও চ রেখা কছএর সমান বলিয়া, [অঙ্কন।

কখতে গঘতে যে রূপ, গজতে কছতে সেই রূপ; [৬ম, ৭।

অর্থাৎ, খছ ও ঘজ সমান্তর ক্ষেত্র দ্বয়ের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি বিব্রত্ত ভাবে সমানুপাতী;

অতএব খছ সমান্তর ক্ষেত্র ঘজ সমান্তর ক্ষেত্রের সমান।

[৬ঠ, ১৪।

আর কছ রেখা চএর সমান হওয়াতে, খছ আয়ত কখ ও চএর অন্তর্গত বলিতে হইবে,

এবং গজ রেখা ঙর সমান হওয়াতে, ঘজ আয়ত গঘ ও ঙর অন্তর্গত বলিতে হইবে;

অতএব কখ ও চএর অন্তর্গত আয়ত গঘ ও ঙর অন্তর্গত আয়তের সমান।

অনন্তর, কখ ও চএর অন্তর্গত আয়ত গঘ ও ঙর অন্তর্গত আয়তের সমান হইলে, এই চারি রেখা সমানুপাতী হইবে; অর্থাৎ, কখতে গঘতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ হইবে।

পূর্ব্ব মত চিত্র অঙ্কিত কর।

পরে, কছ রেখা চএর সমান এবং গজ রেখা ঙর সমান হওয়াতে,

খছ আয়ত কখ ও চএর অন্তর্গত এবং ঘজ আয়ত গঘ ও ঙর অন্তর্গত বলিতে হইবে।

আর কখ ও চএর অন্তর্গত আয়ত গঘ ও ঙর অন্তর্গত আয়তের সমান; [কল্পনা।

অতএব খছ সমান্তর ক্ষেত্র ঘজ সমান্তর ক্ষেত্রের সমান;

[স্বতঃ ১।

এবং এই দুইটী ক্ষেত্র সমান কোণ বিশিষ্ট হওয়ায়,

ইহাদের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি বিরুদ্ধ ভাবে সমানুপাতী হইবে; [৬ঠ, ১৪।

অতএব কখতে গঘতে যে রূপ, গজতে কছতে সেই রূপ। আর গজ রেখা ঙর ও কছ রেখা চএর সমান। [অঙ্কন। সুতরাং কখতে গঘতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ। অতএব যদি চারি সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—১৯। কখ, গঘ দুই সরল রেখা পরস্পর ঙ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। কগ, খঘ সংযুক্ত করিলে কগঙ ত্রিভুজের বাহু সকল যথা ক্রমে যদি খঘঙ ত্রিভুজের বাহু সকলের সমানুপাতী হয়, তবে ক, খ, গ, ঘ এক বৃত্ত পরিধিস্থ হইবে।

১৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যদি তিন সরল রেখা সমানুপাতী হয়, তবে আদি ও অন্ত রেখার অন্তর্গত আয়ত, মধ্য রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে; আর আদি ও অন্তের অন্তর্গত আয়ত যদি মধ্য রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হয়, তবে এই তিন রেখা সমানুপাতী হইবে।

ক, খ, গ, এই তিনটী রেখা সমানুপাতী, অর্থাৎ, কতে খতে যে রূপ, খতে গতে সেই রূপ; তাহা হইলে ক ও গএর অন্তর্গত আয়ত খএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

খএর সমান করিয়া ঘ রেখা টান।

পরে, কতে খতে যে রূপ, খতে গতে সেই রূপ বলিয়া, [কল্পনা।

ক———
খ———
ঘ———
গ———

এবং খ রেখা ঘএর সমান হওয়াতে,

কতে খতে যে রূপ, ঘতে গতে সেই রূপ; [৫ম, ৭।

আর চারি রেখা যদি সমানুপাতী হয়, তবে আদি ও অন্তের অন্তর্গত আয়ত দুই মধ্য রেখার অন্তর্গত আয়তের সমান হইয়া থাকে; [৬ষ্ঠ, ১৬।

অতএব ক ও গএর অন্তর্গত আয়ত খ ও ঘএর অন্তর্গত আয়তের সমান;

এবং খ রেখা ঘএর সমান হওয়াতে, খ ও ঘএর অন্তর্গত আয়ত ও খএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ একই ক্ষেত্র হইবে; [অঙ্কন।

অতএব ক ও গএর অন্তর্গত আয়ত খএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান;

অনন্তর, ক ও গএর অন্তর্গত আয়ত খএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইলে, কতে খতে যে রূপ, খতে গতে সেই রূপ হইবে।

পূর্ব্ব মত চিত্র অঙ্কিত কর।

পরে, খ রেখা ঘএর সমান বলিয়া খএর উপর সমচতুর্ভুজ

খ ও ঘএর অন্তর্গত আয়তের সমান বলিতে হইবে;
আর ক ও গএর অন্তর্গত আয়ত খএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান, [কল্পনা।
অতএব ক ও গএর অন্তর্গত আয়ত খ ও ঘএর অন্তর্গত আয়তের সমান।
আবার আদি ও অন্ত রেখা দ্বয়ের অন্তর্গত আয়ত দুই মধ্য রেখার অন্তর্গত আয়তের সমান হইলে, ঐ চারি রেখা সমানুপাতী হয়, [৬ঠ, ১৬।
অতএব কতে খতে যে রূপ, ঘতে গতে সেই রূপ;
আর খ রেখা ঘএর সমান;
সুতরাং কতে খতে যে রূপ, খতে গতে সেই রূপ। [৫ম, ৭।
অতএব যদি তিন সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—২০। নির্দ্দিষ্ট ভূমি ও উন্নতি বিশিষ্ট কোন ত্রিভুজের সমান একটী সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

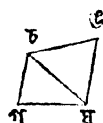
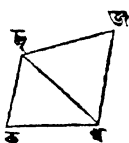
২১। কখগঘ একটী সমান্তর ক্ষেত্র; খ বিন্দু হইতে কোন রেখা এরূপে টান যেন তাহা কগ কর্ণকে, ঘগ বাহুকে ও বর্দ্ধিত কঘ বাহুকে যথাক্রমে চ, ছ ও ঙ বিন্দুতে ছেদ করে; তাহা হইলে ঙচ ও চছএর অন্তর্গত আয়ত খচএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

১৮ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ ও এক রূপে স্থাপিত অন্য একটী সরল রৈখিক ক্ষেত্র কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখ যেন একটী নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা এবং গঘঙচ

নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক চতুর্ভুজ ক্ষেত্র; গঘঙচএর সদৃশ ও এক রূপে স্থাপিত অন্য একটী সরল রৈখিক ক্ষেত্র কখ রেখার উপর অঙ্কিত করিতে হইবে।

ঘচ সংযুক্ত কর; এবং ঘগচ কোণের সমান করিয়া কখ রেখার ক বিন্দুতে খকছ কোণ অঙ্কিত কর; আর গঘচ কোণের সমান করিয়া কখ রেখার খ বিন্দুতে কখছ কোণ অঙ্কিত কর; [১ম, ২৩।

অতএব অবশিষ্ট কছখ কোণ অবশিষ্ট গচঘ কোণের সমান, [১ম, ৩২।

এবং কছখ ও গচঘ ত্রিভুজ দ্বয় সমান কোণী।

আবার চঘঙ কোণের সমান করিয়া খছ রেখার খ বিন্দুতে ছখজ কোণ কর, এবং ঘচঙ কোণের সমান করিয়া খছ রেখার ছ বিন্দুতে খছজ কোণ কর; [১ম, ২৩।

অতএব অবশিষ্ট ছজখ কোণ অবশিষ্ট চঙঘ কোণের সমান, [১ম, ৩২।

এবং খছজ ও ঘচঙ ত্রিভুজ দ্বয় সমান কোণী।

পরে, কছখ কোণ গচঘ কোণের ও খছজ কোণ ঘচঙ কোণের সমান বলিয়া, [অঙ্কন।

সমস্ত কছজ কোণ সমস্ত গচঙ কোণের সমান। [স্বতঃ ২।

এই কারণে, কখজ কোণ গঘঙ কোণের সমান;

এবং খকছ কোণ ঘগচ কোণের সমান ও খজছ কোণ ঘঙচ কোণের সমান;

অতএব কখজছ ও গঘঙচ সরল রৈখিক ক্ষেত্র দ্বয় পরস্পর সমান কোণী।

আর, এই দুই ক্ষেত্রের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী হইবে ;

কেননা, খকছ ও ঘগচ ত্রিভুজ সমান কোণ বিশিষ্ট হওয়ায়, খকতে কছতে যে রূপ, ঘগতে গচতে সেই রূপ। [৬ষ্ঠ, ৪।

এই কারণে, কছতে ছখতে যে রূপ, গচতে চঘতে সেই রূপ ;

এবং খছতে ছজতে যে রূপ, ঘচতে চঙতে সেই রূপ।

অতএব ক্রম সমানুপাতে, কছতে ছজতে যে রূপ, গচতে চঙতে সেই রূপ। [৫ম, ২২।

এই প্রকারে উপপন্ন হইবে যে, কখতে খজতে যে রূপ, গঘতে ঘঙতে সেই রূপ ;

আর, ছজতে জখতে যে রূপ, চঙতে ঙঘতে সেই রূপ। [৬ষ্ঠ, ৪।

অতএব কখজছ ও গঘঙচ ক্ষেত্র দ্বয় পরস্পর সমান কোণী ও তাহাদের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী ;

সুতরাং তাহারা সদৃশ ক্ষেত্র। [৬ষ্ঠ, সং ১।

অনন্তর, গঘটঙচ সরল রৈখিক পঞ্চভুজ ক্ষেত্রের সদৃশ ও এক রূপে স্থাপিত অন্য একটী সরল রৈখিক ক্ষেত্র কখ রেখার উপর অঙ্কিত করিতে হইবে।

ঘঙ সংযুক্ত কর এবং পূর্ব্ব প্রকরণানুসারে গঘঙচ সরল রৈখিক চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের সদৃশ ও এক রূপে স্থাপিত

কখজছ ক্ষেত্র কখ রেখার উপর অঙ্কিত কর ; ঙঘট কোণের সমান করিয়া খজ রেখার খ বিন্দুতে জখঠ কোণ কর, এবং ঘঙট কোণের সমান করিয়া খজ রেখার জ বিন্দুতে খজঠ কোণ কর ; [১ম, ২৩।

অতএব অবশিষ্ট ঠ কোণ অবশিষ্ট ট কোণের সমান।

পরে, কখজছ ও গঘঙচ ক্ষেত্র সদৃশ হওয়াতে,

কখজ কোণ গঘঙ কোণের সমান ; [৬ষ্ঠ, সং ১।

আর জখঠ কোণ ঙঘট কোণের সমান, [অঙ্কন।

অতএব সমুদায় কখঠ কোণ সমূদায় গঘট কোণের সমান। [স্বতঃ, ২।

এই কারণে, সমুদায় ছজঠ কোণ সমুদায় চঙট কোণের সমান।

অতএব কখঠজছ ও গঘটঙচ এই দুই পঞ্চভুজ ক্ষেত্র পরস্পর সমান কোণী।

আর কখজছ ও গঘঙচ এই দুই ক্ষেত্র সদৃশ হওয়াতে,

কখতে খজতে যে রূপ, গঘতে ঘঙতে সেই রূপ ;

[৬ষ্ঠ, সং ১।

এবং খজতে খঠতে যে রূপ, ঘঙতে ঘটতে সেই রূপ;

[৬ষ্ঠ, ৪।

এই হেতু ক্রম সমানুপাতে, কখতে খঠতে যে রূপ, গঘতে ঘটতে সেই রূপ। [৫ম, ২২

এই কারণে, ছজতে জঠতে যে রূপ, চঙতে ঙটতে সেই রূপ;

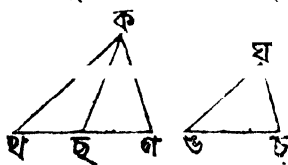
আর খঠতে ঠজতে যে রূপ, ঘটতে টঙতে সেই রূপ। [৬ঠ,৪।
অতএব কখঠজছ এবং গঘটঙচ এই দুই পঞ্চভুজ ক্ষেত্র পরস্পর সমান কোণী এবং তাহাদের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী ;
সুতরাং তাহারা পরস্পর সদৃশ।
এই রূপে, কোন ষড়্ভুজ, সপ্তভুজ প্রভৃতি সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ ও এক রূপে স্থাপিত অন্য সরল রৈখিক ক্ষেত্র কোন নির্দ্দিষ্ট রেখার উপর অঙ্কিত করিতে পারা যায়।
অতএব কোন নির্দ্দিষ্ট ইত্যাদি। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—২২। কোণ নিয়মিত পঞ্চভুজ ক্ষেত্রের বাহু সকলের দ্বিখণ্ড কারক বিন্দুগুলি যথাক্রমে সংযুক্ত করিলে, তদ্দ্বারা যে ক্ষেত্র উৎপন্ন হইবে, তাহা পূর্ব্বোক্ত পঞ্চভুজের সদৃশ আর একটী পঞ্চভুজ হইবে।

১৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সদৃশ ত্রিভুজ গুলি তাহাদের সবর্গীয় বাহুর অনুপাতের দ্বিঘাত অনুপাতী হইয়া থাকে।

কখগ ও ঘঙচ এই দুই সদৃশ ত্রিভুজের খ কোণ যেন ঙ কোণের সমান এবং কখতে খগতে যে অনুপাত, ঘঙতে ঙচতে যেন সেই অনুপাত ; অতএব খগ ও ঙচ বাহু সবর্গীয় ; তাহা হইলে, কখগ ত্রিভুজ এবং ঘঙচ ত্রিভুজ খগ ও ঙচ বাহুর অনুপাতের দ্বিঘাত অনুপাতী হইবে।

খগ ও ঙচএর তৃতীয়

সমানুপাতী খছ কল্পনা কর ; [৬ঠ, ১১।
তাহা হইলে, খগতে ঙচতে যে রূপ, ঙচতে খছতে সেই রূপ হইবে ;
কছ সংযুক্ত কর।

পরে, কখতে খগতে রূপ, ঘঙতে ঙচতে সেই রূপ বলিয়া, [কল্পনা।
একান্তরে, কখতে ঘঙতে যে রূপ, খগতে ঙচতে সেই রূপ, [৫ম, ১৬।
আর খগতে ঙচতে যে রূপ, ঙচতে খছতে সেই রূপ ; [অঙ্কন।
অতএব কখতে ঘঙতে যে রূপ, ঙচতে খছতে সেই রূপ ; [৫ম, ১১।
অর্থাৎ কখছ, ঘঙচ ত্রিভুজ দ্বয়ের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি বিরুত্ত ভাবে সমানুপাতী হইয়াছে,
আর ত্রিভুজ দ্বয়ের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু-গুলি বিরুত্ত ভাবে সমানুপাতী হইলে পরস্পর সমান হইয়া থাকে, [৬ঠ, ১৫।
এই হেতু কখছ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান।

আবার, খগতে ঙচতে যে রূপ, ঙচতে খছতে সেই রূপ বলিয়া,
খগএর খছএর সহিত অনুপাত, খগএর ঙচএর সহিত অনুপাতের দ্বিঘাত ; [৫ম, সং ১০।
আর কখগ ত্রিভুজে কখছ ত্রিভুজে যে অনুপাত, খগতে খছতে সেই অনুপাত ; [৬ঠ, ১

অতএব কখগ ত্রিভুজের কখছ ত্রিভুজের সহিত অনুপাত, খগএর ঙচএর সহিত অনুপাতের দ্বিঘাত ;
আর কখছ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান উপপন্ন হইয়াছে ;
সুতরাং কখগ ও ঘঙচ ত্রিভুজ খগ ও ঙচ বাহুর অনুপাতের দ্বিঘাত অনুপাতী। [৫ম, ৭।
অতএব সদৃশ ত্রিভুজ ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অনু। এই প্রতিজ্ঞা দ্বারা স্পষ্টই বোধ হইবে যে, তিন রেখা সমানুপাতী হইলে, প্রথমে তৃতীয়ে যে অনুপাত, প্রথমের উপর অঙ্কিত ত্রিভুজে দ্বিতীয়ের উপর অঙ্কিত তৎসদৃশ ও এক রূপে স্থাপিত ত্রিভুজে সেই অনুপাত।

অঃ প্রঃ—২৩। ঘঙচ একটী ত্রিভুজ এরূপে কখগ অন্য একটী ত্রিভুজের অন্তর্গত হইয়াছে যে, চঙ এবং খগ বাহু পরস্পর সমান্তর। প্রমাণ কর যে, ঘঙচ ত্রিভুজে কখগ ত্রিভুজে যে অনুপাত, কচ ও চখএর অন্তর্গত আয়তে কখএর উপর সমচতুর্ভুজে সেই অনুপাত।

২০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সদৃশ বহুভুজ ক্ষেত্রগুলি কতিপয় সমান সংখ্যক সদৃশ ত্রিভুজে বিভক্ত হইতে পারে এবং বহুভুজ গুলি যে অনুপাত বিশিষ্ট, এই সকল ত্রিভুজও পরস্পর সেই অনুপাত বিশিষ্ট হইবে; আর এই সকল বহুভুজ ক্ষেত্র তাহাদের সবর্গীয় বাহুর অনুপাতের দ্বিঘাত অনুপাতী হইবে।

কখগঘঙ ও চছজটঠ এই দুইটী সদৃশ বহুভুজ ক্ষেত্র :

কখ ও চছ যেন তাহাদের দুই সবর্গীয় বাহু। কখগঘঙ ও চছজটঠ বহুভুজ ক্ষেত্র, কতিপয় সমান সংখ্যক সদৃশ ত্রিভুজে বিভক্ত হইতে পারে এবং বহুভুজ দ্বয় যে অনুপাত বিশিষ্ট, ত্রিভুজ গুলিও পরস্পর সেই অনুপাত বিশিষ্ট হইবে; আর কখগঘঙ ও চছজটঠ বহুভুজ তাহাদের সবর্গীয় কখ ও চছ বাহুর অনুপাতের দ্বিঘাত অনুপাতী হইবে।

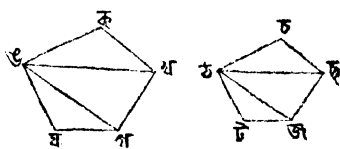
খঙ, ঙগ, ছঠ, ঠজ সংযুক্ত কর।

পরে, কখগঘঙ ও চছজটঠ বহুভুজ দ্বয় পরস্পর সদৃশ বলিয়া, [কল্পনা।

খকঙ কোণ ছচঠ কোণের সমান এবং খকতে কঙতে যে রূপ, ছচতে চঠতে সেই রূপ, [৬ঠ, সং ১।

আর কখঙ ও চছঠ ত্রিভুজ দ্বয়ের এক একটা কোণ পরস্পর সমান এবং সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহুগুলি সমানুপাতী হওয়াতে;

কখঙ ও চছঠ ত্রিভুজ সমান কোণী, [৬ঠ, ৬।

ও তজ্জন্য পরস্পর সদৃশ; [৬ঠ, ৪।

অতএব কখঙ কোণ চছঠ কোণের সমান;

আর বহুভুজ দ্বয় সদৃশ হওয়াতে, [কল্পনা।

সমস্ত কখগ কোণ সমস্ত চছজ কোণের সমান; [৬ঠ, সং ১।

সুতরাং অবশিষ্ট ঙখগ কোণ অবশিষ্ট ঠছজ কোণের সমান। [স্বতঃ ৩।

আবার কখঙ ও চছঠ ত্রিভুজ দ্বয় পরস্পর সদৃশ বলিয়া,
ঙখতে খকতে যে রূপ, ঠছতে ছচতে সেই রূপ;
আবার বহুভুজ দ্বয় সদৃশ হওয়াতে, [কল্পনা।
কখতে খগতে যে রূপ, চছতে ছজতে সেই রূপ;
[৬ঠ, সং ১।

সুতরাং ক্রম সমানুপাতে, ঙখতে খগতে যে রূপ, ঠছতে
ছজতে সেই রূপ; [৫ম, ২২।
অর্থাৎ ঙখগ ও ঠছজ ত্রিভুজের সমান সমান কোণের
পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী; এই হেতু ঙখগ ও
ঠছজ ত্রিভুজ দ্বয় সমান কোণী; [৬ঠ, ৬।
অতএব এই দুই ত্রিভুজ পরস্পর সদৃশ। [৬ঠ, ৪।
এই কারণে, ঙগঘ ও ঠজট ত্রিভুজ পরস্পর সদৃশ।
অতএব কখগঘঙ ও চছজটঠ সদৃশ বহুভুজ ক্ষেত্র দ্বয়
সমান সংখ্যক সদৃশ ত্রিভুজে বিভক্ত হইল।

আর বহুভুজ দ্বয় যে অনুপাত বিশিষ্ট, ত্রিভুজ গুলিও
যথা ক্রমে পরস্পর সেই অনুপাত বিশিষ্ট হইবে এবং
কখঙ, ঙখগ, ঙগঘ ত্রিভুজ এই সকল অনুপাতের পূর্ব্ববর্ত্তী
রাশি এবং চছঠ, ঠছজ ও ঠজট ত্রিভুজ পরবর্ত্তী রাশি
হইবে; এবং কখগঘঙ ও চছজটঠ বহুভুজ, তাহাদের
সবর্গীয় কখ ও চছ বাহু দ্বয়ের অনুপাতের দ্বিঘাত
অনুপাতী হইবে।

কখঙ ও চছঠ ত্রিভুজ পরস্পর সদৃশ হওয়াতে,
ঙখ ও ঠছ এর অনুপাতের দ্বিঘাত অনুপাতী হইবে।
[৬ঠ, ১৯।

এই কারণে, ঙখগ ও ঠছজ ত্রিভুজ ঙখ ও ঠছএর অনুপাতের দ্বিঘাত অনুপাতী।

অতএব কখঙ ত্রিভুজে চছঠ ত্রিভুজে যে রূপ, ঙখগ ত্রিভুজে ঠছজ ত্রিভুজে সেই রূপ। [৫ম, ১১।

আবার, ঙখগ ও ঠছজ ত্রিভুজ পরস্পর সদৃশ হওয়ায়, ঙগ ও ঠজএর অনুপাতের দ্বিঘাত অনুপাতী হইবে। [৬ষ্ঠ, ১৯।

এই কারণে, ঙগঘ ও ঠজট ত্রিভুজ, ঙগ ও ঠজএর অনুপাতের দ্বিঘাত অনুপাতী;

অতএব ঙখগ ত্রিভুজে ঠছজ ত্রিভুজে যে রূপ, ঙগঘ ত্রিভুজে ঠজট ত্রিভুজে সেই রূপ। [৫ম, ১১।

আর উপপন্ন হইয়াছে যে, ঙখগ ত্রিভুজে ঠছজ ত্রিভুজে যে রূপ, কখঙ ত্রিভুজে চছঠ ত্রিভুজে সেই রূপ।

সুতরাং কখঙ ত্রিভুজে চছঠ ত্রিভুজে যে রূপ, ঙখগ ত্রিভুজে ঠছজ ত্রিভুজে সেই রূপ আর ঙগঘ ত্রিভুজে ঠজট ত্রিভুজেও সেই রূপ; [৫ম, ১১।

তাহা হইলে, একটী পূর্ব্ববর্ত্তীতে তাহার পরবর্ত্তীতে যে অনুপাত, সমস্ত পূর্ব্ববর্ত্তী গুলিতে সমস্ত পরবর্ত্তী গুলিতে সেই অনুপাত হইবে। [৫ম, ১২।

অর্থাৎ কখঙ ত্রিভুজে চছঠ ত্রিভুজে যে রূপ, কখগঘঙ বহুভুজে চছজটঠ বহু ভুজে সেই রূপ।

আর কখঙ ও চছঠ ত্রিভুজ কখ ও চছ সবর্গীয় বাহুর অনুপাতের দ্বিঘাত অনুপাতী। [৬ষ্ঠ, ১৯।

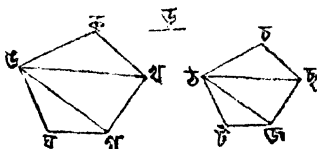
সুতরাং কখগঘঙ ও চছজটঠ পঞ্চ ভুজ কখ ও চছ সবর্গীয়

বাহুর অনুপাতের দ্বিঘাত অনুপাতী।

অতএব সদৃশ বহুভুজ ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অনু—১। এই রূপে সপ্রমাণ হইবে যে, সদৃশ চতুর্ভুজ বা অন্য কোন বহুভুজ গুলি তাহাদের সবর্গীয় বাহুর অনুপাতের দ্বিঘাত অনুপাতী হইয়া থাকে। ত্রিভুজ সম্বন্ধে পূর্ব্বে এই রূপ উপপন্ন হইয়াছে; অতএব ব্যাপক ভাবে বলা যাইতে পারে যে, সদৃশ সরল রৈখিক ক্ষেত্র গুলি তাহাদের সবর্গীয় বাহুর অনুপাতের দ্বিঘাত অনুপাতী হয়।

অনু—২। যদি কখ ও চছ দুই সবর্গীয় বাহুর তৃতীয় সমানুপাতী ড কল্পনা করা যায়, [৬ঠ, ১১।

তবে কখ ও ড, কখ ও চছএর অনুপাতের দ্বিঘাত অনুপাতী হইবে। [৫ম, সং ১০।

কিন্তু কখএর উপর অঙ্কিত যে কোন সরল রৈখিক ক্ষেত্রের চছএর উপর তৎ সদৃশ ও এক রূপে অঙ্কিত ক্ষেত্রের অনুপাত, কখ ও চছএর অনুপাতের দ্বিঘাত, [অনু ১।

সুতরাং কখতে ডতে যে রূপ, কখএর উপর অঙ্কিত ক্ষেত্রে চছএর উপর অঙ্কিত ক্ষেত্রে সেই রূপ;

আর ত্রিভুজ সম্বন্ধে পূর্ব্বে এই বিষয় সপ্রমাণ হইয়াছে বলিয়া, [৬ঠ, ১৯, অনু।

ব্যাপক ভাবে এরূপ বলা যাইতে পারে যে, তিন রেখা সমানুপাতী হইলে প্রথমে তৃতীয়ে যে অনুপাত প্রথমের

উপর অঙ্কিত কোন সরল রৈখিক ক্ষেত্রে দ্বিতীয়ের উপর তদ্রূপে অঙ্কিত ও তৎ সদৃশ ক্ষেত্রে সেই অনুপাত।

অঃ প্রঃ—২৪। কোন বৃত্ত তাহার দ্বিগুণ ব্যাস বিশিষ্ট অন্য কোন বৃত্তকে অন্তরে স্পর্শ করিলে, যদি স্পর্শ বিন্দু হইতে দুই বৃত্তের কতিপয় জ্যা টানা যায়, তবে ঐ সকল জ্যার প্রান্ত বিন্দু গুলি যথাক্রমে দুইটী দুইটী করিয়া সংযুক্ত করিলে, উভয় বৃত্তে যে এক একটী বহু ভুজ অঙ্কিত হইবে, তাহাদের একটী অন্যটীর চতুর্গুণ হইবে।

২১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যে যে সরল রৈখিক ক্ষেত্র অন্য এক সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ, তাহারা পরস্পর সদৃশ।

ক ও খ এই দুই সরল রৈখিক ক্ষেত্রের প্রত্যেকে যেন গ ক্ষেত্রের সদৃশ; তাহা হইলে ক ক্ষেত্র খ ক্ষেত্রের সদৃশ হইবে।

ক ক্ষেত্র গ ক্ষেত্রের সদৃশ বলিয়া, [কল্পনা। তাহারা পরস্পর সমান কোণী এবং তাহাদের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু সকল সমানুপাতী। [৬ঠ, সং ১।

আবার খ ক্ষেত্র গ ক্ষেত্রের সদৃশ বলিয়া, [কল্পনা। তাহারা সমান কোণী এবং তাহাদের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী। [৬ঠ, সং ১।

এই হেতু, ক ও খ ক্ষেত্র উভয়েই গ ক্ষেত্রের কোণের সমান কোণ বিশিষ্ট এবং প্রত্যেকের ও গএর সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী;

অতএব ক ও খ ক্ষেত্র সমান কোণী, [স্বতঃ ১।

এবং তাহাদের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী; [৫ম, ১১।

সুতরাং ক ক্ষেত্র খ ক্ষেত্রের সদৃশ। [৬ষ্ঠ, সং ১।

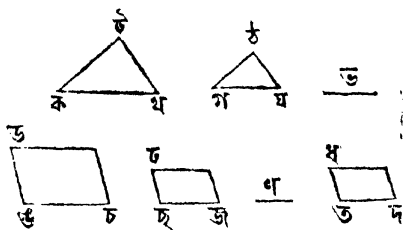
অতএব যে যে সরল রৈখিক ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—২৫। দুইটী সদৃশ সরল রৈখিক ক্ষেত্র নির্দ্দিষ্ট আছে; এই দুই ক্ষেত্রের প্রত্যেকের সদৃশ ও উভয়ের মধ্য সমানুপাতী আর একটী সরল রৈখিক ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

২২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

চারি সরল রেখা যদি সমানুপাতী হয়, তবে তাহাদের উপর এক রূপে অঙ্কিত সদৃশ সরল রৈখিক ক্ষেত্র গুলি সমানুপাতী হইবে; আর চারি রেখার উপর এক রূপে অঙ্কিত সদৃশ সরল রৈখিক ক্ষেত্রগুলি যদি সমানুপাতী হয়, তবে রেখা গুলিও সমানুপাতী হইবে।

কখ, গঘ, ঙচ, ছজ যেন চারি সমানুপাতি রেখা অর্থাৎ কখতে গঘতে যে অনুপাত, ঙচতে ছজতে সেই অনুপাত; কখ ও গঘএর উপর টকখ, ঠগঘ সদৃশ সরল রৈখিক ক্ষেত্র এক রূপে অঙ্কিত করিলে এবং ঙচ ও ছজএর

উপর ঙচ ও ঢজ সদৃশ সরল রৈখিক ক্ষেত্র এক রূপে অঙ্কিত করিলে টকখ ক্ষেত্রে ঠগঘ ক্ষেত্রে যে সম্বন্ধ, ঙচ ক্ষেত্রে ঢজ ক্ষেত্রে সেই সম্বন্ধ হইবে।

কখ ও গঘএর তৃতীয় সমানুপাতী ভ রেখা এবং ঙচ ও ছজএর তৃতীয় সমানুপাতী ণ রেখা কল্পনা কর। [৬ঠ, ১১।

পরে, কখতে গঘতে যে রূপ, ঙচতে ছজতে সেই রূপ হওয়াতে, [কল্পনা।

এবং কখতে গঘতে যে রূপ, গঘতে ভতে সেই রূপ বলিয়া, [অঙ্কন।

আর ঙচতে ছজতে যে রূপ, ছজতে ণতে সেই রূপ হওয়ায়, [অঙ্কন।

গঘতে ভতে যে রূপ, ছজতে ণতে সেই রূপ; [৫ম, ১১।

আবার কখতে গঘতে যে রূপ, ঙচতে ছজতে সেই রূপ;

অতএব ক্রম সমানুপাতে, কখতে ভতে যে রূপ, ঙচতে ণতে সেই রূপ; [৫ম, ২২।

আর কখতে ভতে যে রূপ, টকখ ক্ষেত্রে ঠগঘ ক্ষেত্রে সেই রূপ; [৬ঠ, ২০, অনু ২।

এবং ঙচতে গতে যে রূপ, ডচ ক্ষেত্রে ঢজ ক্ষেত্রে সেই রূপ; [৬ষ্ঠ, ২০, অনু ২।
অতএব টকখ ক্ষেত্রে ঠগঘ ক্ষেত্রে যে রূপ, ডচ ক্ষেত্রে ঢজ ক্ষেত্রে সেই রূপ। [৫ম, ১১।

অনন্তর, টকখ ক্ষেত্রে ঠগঘ ক্ষেত্রে যে রূপ, ডচ ক্ষেত্রে ঢজ ক্ষেত্রে সেই রূপ হইলে, কখতে গঘতে যে রূপ, ঙচতে ছজতে সেই রূপ হইবে।

কখতে গঘতে যে রূপ, ঙচতে ত্দতে সেই রূপ কল্পনা কর; [৬ষ্ঠ, ১২।
এবং ডচ বা ঢজএর সদৃশ ও এক রূপে অঙ্কিত ধদ ক্ষেত্র ত্দ রেখার উপর অঙ্কিত কর। [৬ষ্ঠ, ১৮।
পরে, কখতে গঘতে যে রূপ, ঙচতে ত্দতে সেই রূপ বলিয়া,
আর টকখ ও ঠগঘ সদৃশ ক্ষেত্র কখ ও গঘএর উপর এক রূপে অঙ্কিত হওয়াতে,
এবং ডচ ও ধদ সদৃশ ক্ষেত্র কখ ও গঘএর উপর এক রূপে অঙ্কিত হওয়ায়,
এই প্রতিজ্ঞার পূর্ব্ব প্রকরণ দ্বারা টকখতে ঠগঘতে যে রূপ, ডচতে ধদতে সেই রূপ।
আর টকখতে ঠগঘতে যে রূপ, ডচতে ঢজতে সেই রূপ কল্পিত হইয়াছে;
সুতরাং, ডচ ক্ষেত্রে ধদ ক্ষেত্রে যে রূপ, ডচ ক্ষেত্রে ঢজ ক্ষেত্রে সেই রূপ; [৫ম, ১১।

অতএব ধদ ক্ষেত্র ঢজ ক্ষেত্রের সমান; [৫ম, ৯।
আর ধদ ও ঢজ ক্ষেত্র দ্বয় সদৃশ ও এক রূপে অঙ্কিত হইয়াছে বলিয়া, [অঙ্কন।
তদ রেখা ছজএর সমান।
আবার কখতে গঘতে যে রূপ, ঙচতে তদতে সেই রূপ হওয়ায়,
এবং তদ, ছজএর সমান বলিয়া,
কখতে গঘতে যে রূপ, ঙচতে ছজতে সেই রূপ।
অতএব চারি সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—২৬। কোন দুই সদৃশ ত্রিভুজের এক এক বাহুর মধ্য বিন্দু হইতে ভূমির সমান্তর এক একটী রেখা টানিলে, যে দুইটী বিষম চতুর্ভুজ হইবে, সেই দুই ক্ষেত্র ও নির্দ্দিষ্ট দুই ত্রিভুজ, এই চারি রাশি সমানুপাতী।

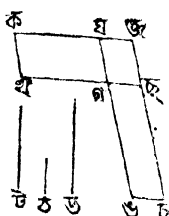
২৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সমান কোণী সমান্তর ক্ষেত্র সকল, বাহুগুলির অনুপাতের সম্মিলিত অনুপাত বিশিষ্ট হইবে।

কগ ও গচ সমান কোণী সমান্তর ক্ষেত্র দ্বয়ের খগঘ ও ঙগছ কোণ পরস্পর সমান; তাহা হইলে, কগ ও গচ ক্ষেত্র দ্বয় বাহুগুলির অনুপাতের সম্মিলিত অনুপাত বিশিষ্ট হইবে।

খগ ও গছকে এক রেখায় স্থাপন কর;

তাহা হইলে, গঘ ও গঙ এক রেখাস্থ হইবে; [১ম, ১৪।

ঘছ সমান্তর ক্ষেত্র অঙ্কিত কর; এবং ট রেখা টানিয়া, খগতে গছতে যেরূপ, টতে ঠতে সেই রূপ আর ঘগতে গঙতে যে রূপ, ঠতে ডতে সেই রূপ কল্পনা কর; [৬ঠ, ১২।

তাহা হইলে, টএর ঠএর সহিত অনুপাত এবং ঠএর ডএর সহিত অনুপাত বাহু গুলির অনুপাতের অর্থাৎ খগএর গছএর সহিত এবং ঘগএর গঙর সহিত অনুপাতের সমান; আর টএর ডএর সহিত অনুপাত টএর সহিত ঠএর এবং ঠএর সহিত ডএর অনুপাতের সম্মিলিত অনুপাত; [৫ম, সং ক।

এই হেতু ট ও ড রেখা, ক্ষেত্র দ্বয়ের বাহুগুলির অনুপাতের সম্মিলিত অনুপাত বিশিষ্ট।

এক্ষণে কগ ক্ষেত্রে গজ ক্ষেত্রে যে রূপ, খগতে গছতে সেই রূপ; [৬ঠ, ১।

আর খগতে গছতে যেরূপ, টতে ঠতে সেই রূপ; [অঙ্কন।

এই হেতু কগ ক্ষেত্রে গজ ক্ষেত্রে যে রূপ, টতে ঠতে সেই রূপ; [৫ম, ১১।

আবার, গজ ক্ষেত্রে গচ ক্ষেত্রে যে রূপ, ঘগতে গঙতে সেই রূপ; [৬ঠ, ১।

আর ঘগতে গঙতে যে রূপ, ঠতে ডতে সেই রূপ; [অঙ্কন।

এই হেতু গজ ক্ষেত্রে গচ ক্ষেত্রে যে রূপ, ঠতে ডতে সেই রূপ; [৫ম, ১১।

অতএব সপ্রমাণ হইল যে, কগ ক্ষেত্রে গজ ক্ষেত্রে যে রূপ, টতে ঠতে সেই রূপ,

এবং গজ ক্ষেত্রে গচ ক্ষেত্রে যে রূপ, ঠতে ডতে সেই রূপ;

তাহা হইলে ক্রম সমানুপাতে, কগ সমান্তর ক্ষেত্রে গচ সমান্তর ক্ষেত্রে যে রূপ, টতে ডতে সেই রূপ। [৫ম, ২২।

কিন্তু ট ও ড রেখা, ক্ষেত্র দ্বয়ের বাহু গুলির অনুপাতের সম্মিলিত অনুপাত বিশিষ্ট;

সুতরাং কগ ও গচ সমান্তর ক্ষেত্র, বাহু গুলির অনুপাতের সম্মিলিত অনুপাত বিশিষ্ট।

অতএব সমান কোণী ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

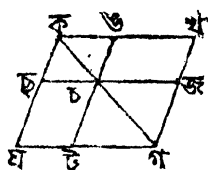
আঃ প্রঃ—২৭। যদি ক কোণ কঙচ ও কখগ এই দুই ত্রিভুজের সাধারণ কোণ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, কখগ ত্রিভুজ : কঙচ ত্রিভুজ : : কখ.কগ : কঙ.কচ।

২৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন সমান্তর ক্ষেত্রের অভ্যন্তরীণ ও কর্ণের পরিতঃস্থ ক্ষেত্র গুলি সমুদয় ক্ষেত্রের ও পরস্পরের সদৃশ।

কখগঘ কোন সমান্তর ক্ষেত্র; কগ ইহার কর্ণ এবং ঙছ ও জট কর্ণের পরিতঃস্থ সমান্তর ক্ষেত্র; ঙছ ও জট ক্ষেত্র, সমুদয় ক্ষেত্রের ও পরস্পরের সদৃশ হইবে।

ঘগ এবং ছচ রেখা দ্বয় পরস্পর সমান্তর হওয়াতে, কঘগ কোণ কছচ কোণের সমান। [১ম, ২৯।

আবার খগ এবং ঙচ রেখা দ্বয়

পরস্পর সমান্তর হওয়ায়,

কখগ কোণ কঙচ কোণের সমান ; [১ম, ২৯।

আর খগঘ ও ঙচছ এই দুই কোণ প্রত্যেকে খকঘ কোণের সম্মুখীন হওয়াতে পরস্পর সমান ; [১ম, ৩৪।

অতএব কখগঘ ও কঙচছ সমান্তর ক্ষেত্র দ্বয় সমান কোণী।

আবার কখগ কোণ কঙচ কোণের সমান বলিয়া এবং খকগ ও ঙকচ ত্রিভুজের খকগ সাধারণ কোণ হওয়ায়,

এই দুইটী ত্রিভুজ সমান কোণী ;

এবং তজ্জন্য কখতে খগতে যে রূপ, কঙতে ঙচতে সেই রূপ : [৬ষ্ঠ, ৪।

আর সমান্তর ক্ষেত্রের সম্মুখীন বাহু গুলি পরস্পর সমান হওয়াতে, [১ম, ৩৪।

কখতে কঘতে যে রূপ, কঙতে কছতে সেই রূপ,

ও ঘগতে গখতে যে রূপ, ছচতে চঙতে সেই রূপ,

এবং গঘতে ঘকতে যে রূপ, চছতে ছকতে সেই রূপ ; [৫ম, ৭।

অতএব কখগঘ, কঙচছ সমান্তর ক্ষেত্র দ্বয়ের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী ;

এবং এজন্য তাহারা পরস্পর সদৃশ। [৬ষ্ঠ, সং ১।

এই কারণে, কখগঘ ও চজগট সমান্তর ক্ষেত্র দ্বয় পরস্পর সদৃশ ;

অতএব ঙছ ও জট এই দুই সমান্তর ক্ষেত্রের প্রত্যেকে খগ ক্ষেত্রের সদৃশ ;

আর যে যে সরল রৈখিক ক্ষেত্র অন্য এক সরল রৈখিক

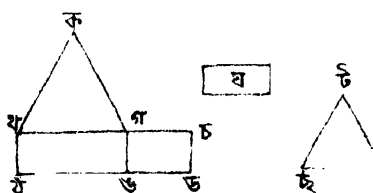
ক্ষেত্রের সদৃশ তাহারা পরস্পর সদৃশ। [৬ষ্ঠ, ২১।
সুতরাং ঙছ সমান্তর ক্ষেত্র, জট সমান্তর ক্ষেত্রের সদৃশ। অতএব কোন সমান্তর ক্ষেত্রের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—২৮। এই প্রতিজ্ঞার চিত্রে ঙচ এবং জট সংযুক্ত করিয়া প্রমাণ কর যে, তাহারা পরস্পর সমান্তর রেখা।

২৫ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ ও অন্য এক সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমান একটী সরল রৈখিক ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখগ নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ ও ঘ ক্ষেত্রের সমান একটী সরল রৈখিক ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখগ ত্রিভুজের সমান করিয়া খগ রেখার উপর খঙ সমান্তর ক্ষেত্র অঙ্কিত কর। [১ম, ৪৫, অনু।

গখঠ কোণের সমান একটী কোণবিশিষ্ট এবং ঘ ক্ষেত্রের সমান, গড সমান্তর ক্ষেত্র, গঙ রেখার উপর অঙ্কিত কর; [১ম, ৪৫, অনু।

অতএব খগ ও গচ এক রেখাস্থ এবং ঠঙ ও ঙড এক রেখাস্থ হইবে।

খগ রেখা ও গচ রেখার মধ্য সমানুপাতী ছজ রেখা কল্পনা কর, [৬ঠ, ১৩।

এবং কখগ ক্ষেত্রের সদৃশ ও এক রূপে স্থাপিত টছজ ক্ষেত্র ছজ রেখার উপর অঙ্কিত কর। [৬ঠ, ১৮।

টছজ সম্পাদ্য সরল রৈখিক ক্ষেত্র।

খগতে ছজতে যে রূপ, ছজতে গচতে সেই রূপ হওয়াতে, [অঙ্কন।

আর, তিন সরল রেখা সমানুপাতী হইলে, প্রথমে তৃতীয়ে যে রূপ, প্রথমের উপর অঙ্কিত ক্ষেত্রে দ্বিতীয়ের উপর তদ্রূপে অঙ্কিত ও তৎ সদৃশ ক্ষেত্রে সেই রূপ হইয়া থাকে বলিয়া, [৬ঠ, ২০, অনু।

খগতে গচতে যে রূপ, কখগ ক্ষেত্রে টছজক্ষেত্রে সেই রূপ:
আর খগতে গচতে যে রূপ, খঙ ক্ষেত্রে গড ক্ষেত্রে সেই রূপ; [৬ঠ, ১।

সুতরাং কখগ ক্ষেত্রে টছজ ক্ষেত্রে যে রূপ, খঙ সমান্তর ক্ষেত্রে ঙচ সমান্তর ক্ষেত্রে সেই রূপ, [৫ম, ১১।

ও কখগ সরল রৈখিক ক্ষেত্র খঙ সমান্তর ক্ষেত্রের সমান বলিয়া, [অঙ্কন।

টছজ ক্ষেত্র ঙচ সমান্তর ক্ষেত্রের সমান; [৫ম, ১৪।

আর ঙচ ক্ষেত্র ঘএর সমান; [অঙ্কন।

সুতরাং টছজ ক্ষেত্র ঘ ক্ষেত্রের সমান, [স্বতঃ ১।

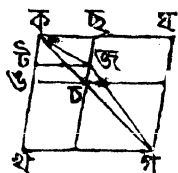
আর ইহা কখগএর সদৃশ। [অঙ্কন।

অতএব কখগ সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ ও ঘ ক্ষেত্রের সমান টছজ ক্ষেত্র অঙ্কিত হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—২১। কোন নির্দ্দিষ্ট সমচতুর্ভুজের সমান একটী নিয়মিত ষড়্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

২৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সদৃশ ও এক রূপে অঙ্কিত দুই সমান্তর ক্ষেত্রের যদি একটী সামান্য কোণ থাকে, তবে তাহাদের কর্ণ দ্বয় একই রেখাস্থ হইবে।

কখগঘ, কঙচছ দুই সদৃশ ও এক রূপে স্থাপিত সমান্তর ক্ষেত্রের ঘকখ যেন সামান্য কোণ; কখগঘ এবং কঙচছএর কর্ণ একই রেখাস্থ হইবে।

যদি না হয়, তবে খঘ ক্ষেত্রের কর্ণ ঙছ ক্ষেত্রের কর্ণ হইতে ভিন্ন রেখাস্থ হইয়া যেন কজগ হইল; জ বিন্দুতে কজগএর সহিত যেন চছ সংলগ্ন হইল; এবং জ বিন্দু দিয়া কঘএর বা খগএর সমান্তর জট রেখা টান; [১ম, ৩১।

তাহা হইলে কখগঘ ও কটজছ একই কর্ণ রেখার পরিতঃস্থ হওয়াতে পরস্পর সদৃশ হইবে; [৬ষ্ঠ, ২৪।

অতএব ঘকতে কখতে যে রূপ, ছকতে কটতে সেই রূপ; আর কখগঘ ও কঙচছ ক্ষেত্র সদৃশ হওয়ায়, [কল্পনা।

ঋকতে কখতে যে রূপ, ছকতে কঙতে সেই রূপ;

[৬ঠ, সং ১

অতএব ছকতে কটতে যে রূপ, ছকতে কঙতে সেই রূপ,

[৫ম, ১১

অর্থাৎ কট, কঙ প্রত্যেকের সহিত কছএর একই সম্বন্ধ,

অতএব কট রেখা কঙর সমান, [৫ম, ৯

অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর বৃহত্তরের সমান; কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব।

সুতরাং কখগঘ, কঙচছ ক্ষেত্র দ্বয়ের কর্ণ অবশ্যই এক রেখাস্থ হইবে।

অতএব সদৃশ ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

আঃ প্রঃ—৩০। সদৃশ ও এক রূপে অঙ্কিত দুই সমান্তর ক্ষেত্র একাকারে অঙ্কিত তাহাদের কর্ণ দ্বয়ের অনুপাতের দ্বিঘা অনুপাতী হইবে।

[২৭—২৯ প্রতিজ্ঞা। *]

৩০ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে অন্ত্য ও মধ্য অনুপাতি রূপে ছেদ করিতে হইবে।

কখ যেন নির্দ্দিষ্ট রেখা; ইহাকে অন্ত্য ও মধ্য অনুপাতি রূপে ছেদ করিতে হইবে।

---

* এই কএকটী প্রতিজ্ঞার বিশেষ ফলোপধায়কতা নাই বলিয়া, এ দেশের বা ইংলণ্ডের কোন প্রসিদ্ধ বিদ্যালয়ে এই গুলি পঠিত হয় না; এজন্য পরিত্যক্ত হইল।

কখকে এ রূপে ভাগ কর, যেন কখ ও খগএর অন্তর্গত আয়ত কগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হয়। [২য়, ১১।

পরে, কখ ও খগএর অন্তর্গত আয়ত কগএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান হওয়াতে, [অঙ্কন।

কখতে কগতে যে রূপ, কগতে গখতে সেই রূপ। [৫ম, ১৭।

অতএব কখ রেখা গ বিন্দুতে অন্ত্য ও মধ্য অনুপাতি রূপে ছেদিত হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

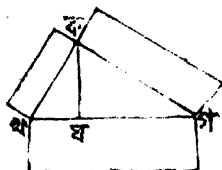
অঃ প্রঃ—৩১। প্রমাণ কর যে, দ্বিতীয় অধ্যায়ের ১১শ প্রতিজ্ঞার চিত্রে কখ রেখা যে রূপে বিভক্ত হইয়াছে, আর চারিটী রেখাও সেই রূপে বিভক্ত হইয়াছে।

৩১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সম কোণী ত্রিভুজের সম্মুখীন বাহুর উপর অঙ্কিত কোন সরল রৈখিক ক্ষেত্র সম কোণের পার্শ্বস্থ দুই বাহুর উপর তদ্রূপে অঙ্কিত ও তৎ সদৃশ ক্ষেত্র দ্বয়ের সমান।

কখগ সম কোণী ত্রিভুজের খকগ কোণ সম কোণ; খগএর উপর অঙ্কিত সরল রৈখিক ক্ষেত্র খক ও কগএর উপর তদ্রূপে অঙ্কিত ও তৎ সদৃশ ক্ষেত্র দ্বয়ের সমান হইবে।

কঘ লম্ব টান। [১ম, ১২।

পরে, কখগ ত্রিভুজের ক সম কোণ হইতে খগ ভূমির উপর কঘ লম্ব টানা হইয়াছে বলিয়া, কখঘ ও

কগঘ এই দুইটী ত্রিভুজ সমস্ত **কখগ** ত্রিভুজের ও পরস্পরের সদৃশ ; [৬ষ্ঠ, ৮।

আর **গখক** ও **কখঘ** ত্রিভুজ পরস্পর সদৃশ বলিয়া,

গখতে **খক**তে যে রূপ, **খক**তে **খঘ**তে সেই রূপ ;

[৬ষ্ঠ, সং ১।

এবং তিন সরল রেখা সমানুপাতী হইলে প্রথমে তৃতীয়ে যে অনুপাত, প্রথমের উপর অঙ্কিত ক্ষেত্রে দ্বিতীয়ের উপর তদ্রূপে অঙ্কিত ও তৎ সদৃশ ক্ষেত্রে সেই অনুপাত হইয়া থাকে ; [৬ষ্ঠ, ২০, অনু ২।

এই হেতু, **গখ**তে **খঘ**তে যে অনুপাত, **খগ**এর উপর অঙ্কিত ক্ষেত্রে, **খক**এর উপর তদ্রূপে অঙ্কিত ও তৎ সদৃশ ক্ষেত্রে সেই অনুপাত ;

এবং বিলোমে, **খঘ**তে **খগ**তে যে অনুপাত, **খক**এর উপরিস্থ ক্ষেত্রে **খগ**এর উপরিস্থ ক্ষেত্রে সেই অনুপাত ;

[৫ম, খ।

এই প্রকারে **গঘ**তে **গখ**তে যে অনুপাত, **গক**এর উপরিস্থ ক্ষেত্রে **গখ**এর উপরিস্থ ক্ষেত্রে সেই অনুপাত ;

অতএব একত্র কৃত **খঘ** ও **গঘ**এর **খগ**এর সহিত যে অনুপাত, **খক** ও **কগ**এর উপর অঙ্কিত একত্র কৃত ক্ষেত্র দ্বয়ের **খগ**এর উপরিস্থ ক্ষেত্রের সহিত সেই অনুপাত। [৫ম, ২৪।

আর একত্র কৃত **খঘ** ও **গঘ**, **খগ**এর সমান ;

সুতরাং **খগ**এর উপর অঙ্কিত ক্ষেত্র, **খক** এবং **কগ**এর উপর তদ্রূপে অঙ্কিত ও তৎ সদৃশ ক্ষেত্র দ্বয়ের সমান। [৫ম, ক।

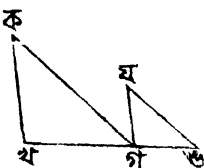
অতএব সম কোণী ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৩১। দুইটী নির্দ্দিষ্ট সদৃশ সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমষ্টির বা অন্তরের সমান ও উভয় ক্ষেত্রের সদৃশ আর একটী সরল রৈখিক ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

৩২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুইটী ত্রিভুজের মধ্যে একের দুই বাহু অন্যের দুই বাহুর সহিত সমানুপাতী হইলে, যদি সবর্গীয় বাহুগুলি সমান্তর করিয়া ত্রিভুজ দুইটীকে কোণে কোণে সংযুক্ত করা যায়, তবে অবশিষ্ট বাহুগুলি এক রেখাতে থাকিবে।

কখগ ত্রিভুজের খক ও কগ দুই বাহু যেন ঘগঙ ত্রিভুজের গঘ ও ঘঙ দুই বাহুর সহিত সমানুপাতী অর্থাৎ কখতে কগতে যে রূপ, ঘগতে ঘঙতে সেই রূপ; এবং কখ যেন ঘগএর সমান্তর ও কগ, ঘঙর সমান্তর; তাহা হইলে খগ, গঙ এক রেখাতে থাকিবে।

কখ রেখা ঘগ রেখার সমান্তর বলিয়া, [কল্পনা।
এবং কগ রেখা উহাদের উপর পতিত হওয়াতে,
খকগ কোণ তাহার একান্তর কগঘ কোণের সমান;
[১ম, ২৯।
এই কারণে, কগঘ কোণ গঘঙ কোণের সমান;
সুতরাং খকগ কোণ গঘঙ কোণের সমান; [স্বতঃ ১।

আর কখগ ত্রিভুজের ক কোণ ঘগঙ ত্রিভুজের ঘ কোণের সমান হওয়ায় এবং এই দুই কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী বলিয়া অর্থাৎ খকতে কগতে যে রূপ, গঘতে ঘঙতে সেই রূপ হওয়াতে. [কল্পনা।

কখগ ও ঘগঙ ত্রিভুজ সমান কোণী ; [৬ঠ, ৬।

অতএব কখগ কোণ ঘগঙ কোণের সমান ;

আর খকগ কোণ কগঘ কোণের সমান উপপন্ন হইয়াছে।

সুতরাং সমুদয় কগঙ কোণ কখগ ও খকগ এই দুই কোণের সমান ; [স্বতঃ ২।

এই দুই সমান রাশির প্রত্যেকের সহিত কগখ কোণ যোগ করিলে কগঙ ও কগখ কোণ একত্র যোগে কখগ, খকগ ও কগখ এই তিন কোণের সমান হইবে।

আর কখগ, খকগ ও কগখ কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান ; [১ম, ৩২।

অতএব কগঙ ও কগখ কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান।

এক্ষণে, খগ ও গঙ রেখা দ্বয় কগএর উভয় পার্শ্বে গ বিন্দুতে কগঙ ও কগখ কোণ উৎপন্ন করিতেছে ও এই দুই সন্নিহিত কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান ; সুতরাং খগ ও গঙ এক রেখাস্থ হইল।

অতএব দুইটী ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

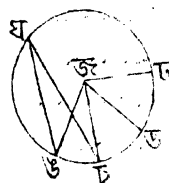
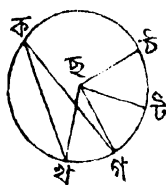
অঃ প্রঃ—৩৩। দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের দুই বাহু অন্যের দুই বাহুর সহিত সমানুপাতী হইলে, যদি ত্রিভুজ দ্বয়ে

কোণে কোণে এরূপে সংযুক্ত করা যায় যে, এক একটী সবর্গীয় বাহু সমান্তর ও আর এক একটী সবর্গীয় বাহু এক রেখাস্থ হয়, তবে দুইটী ত্রিভুজের অবশিষ্ট বাহু দ্বয় এক রেখাস্থ বা সমান্তর হইবে।

৩৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সমান সমান বৃত্তের কেন্দ্রস্থ বা পরিধিস্থ কোণ গুলির অনুপাত, সম্মুখীন চাপের অনুপাতানুসারে হইয়া থাকে; বৃত্তচ্ছেদক গুলিরও অনুপাত এই প্রকার হইবে।

কখগ ও ঘঙচ যেন সমান সমান দুই বৃত্ত এবং খছগ ও ঙজচ কেন্দ্রস্থ কোণ আর খকগ ও ঙঘচ পরিধিস্থ কোণ; তাহা হইলে খগ চাপে ঙচ চাপে যে রূপ; খছগ কোণে ঙজচ কোণে সেই রূপ এবং খকগ কোণে ঙঘচ কোণেও তদ্রূপ; আর বৃত্তচ্ছেদক খছগ ও ঙজচএর অনুপাত এই প্রকার হইবে।

গট, টঠ প্রভৃতি কতিপয় চাপ প্রত্যেকে খগএর সমান এবং চড, ডঢ প্রভৃতি কতকগুলি চাপ প্রত্যেকে ঙচএর সমান কল্পনা কর; এবং ছট, ছঠ, জড, জঢ সংযুক্ত কর।

পরে খগ, গট, টঠ চাপ পরস্পর সমান বলিয়া, [অং।
খছগ, গছট, টছঠ কোণ পরস্পর সমান; [৩য়, ২৭।

এই হেতু, খঠ চাপ খগএর যে গুণিত, খছঠ কোণ খছগ কোণের সেই গুণিত।

এই কারণে, ঙট চাপ ঙচএর যে গুণিত, ঙজট কোণ ঙজচ কোণের সেই গুণিত ;

আর খঠ চাপ ঙট চাপের সমান হইলে, খছঠ কোণ ঙজট কোণের সমান হইবে ; [৩য়, ২৭।

ও খঠ চাপ ঙট অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে খছঠ কোণ ঙজট কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে।

অতএব খগ ও ঙচ চাপ এবং খছগ ও ঙজচ কোণ এই চারি রাশির মধ্যে খগ চাপের ও খছগ কোণের কোন সমগুণিত খঠ চাপ ও খছঠ কোণ কল্পিত হইয়াছে ;

এবং ঙচ চাপের ও ঙজচ কোণের কোন সমগুণিত ঙট চাপ ও ঙজট কোণ কল্পিত হইয়াছে ;

আর এরূপ উপপন্ন হইয়াছে যে, খঠ চাপ ঙট চাপ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে খছঠ কোণ ঙজট কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে :

অতএব খগ চাপে ঙচ চাপে যে রূপ, খছগ কোণে ঙজচ কোণে সেই রূপ ; [৫ম, সং ৫।

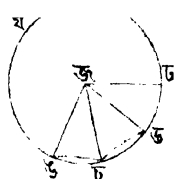
আর খছগ কোণে ঙজচ কোণে যে রূপ, খকগ কোণে ঙঘচ কোণে সেই রূপ ; [৫ম, ১৫।

কেননা, প্রথম দুই কোণ যথাক্রমে অন্য দুই কোণের দ্বিগুণ ; [৩য়, ২০।

সুতরাং খগ চাপে ঙচ চাপে যে রূপ, খছগ কোণে ঙজচ কোণে সেই রূপ এবং খকগ কোণে ঙঘচ কোণেও তদ্রূপ।

আবার খগ চাপে ঙচ চাপে যে রূপ, খছগ বৃত্ত-চ্ছেদকে ঙজচ বৃত্তচ্ছেদকে সেই রূপ হইবে।

খগ, গট, সংযুক্ত কর এবং খগ ও গট চাপে ভ ও ণ বিন্দু কল্পনা কর, ও খভ, ভগ, গণ, ণট সংযুক্ত কর।

পরে খছগ, গছট ত্রিভুজের খছ, ছগ এই দুই বাহু যথাক্রমে গছ, ছট বাহুর সমান হওয়ায়,
আর এই দুই দুই বাহুর অন্তর্গত কোণ গুলি পরস্পর সমান বলিয়া; [৩য়, ২৭।
খগ ভূমি গট ভূমির সমান এবং ছখগ ত্রিভুজ ছগট ত্রিভুজের সমান; [১ম, ৪।
আর খগ চাপ গট চাপের সমান হওয়াতে, [অঙ্কন।
সমুদয় পরিধি হইতে খগ, গট এই দুই সমান অংশ বিয়োগ করিলে, অবশিষ্ট পরিধি খণ্ড দ্বয় পরস্পর সমান হইবে; [স্বতঃ ৩।
এই হেতু, খভগ কোণ গণট কোণের সমান; [৩য়, ২০।
সুতরাং খভগ বৃত্তখণ্ড গণট বৃত্তখণ্ডের সদৃশ; [৩য়, সং ১১।

ও তাহারা খগ, গট এই দুই সমান সমান রেখার উপরিস্থ হইয়াছে;
এবং সমান সমান রেখার উপরিস্থ সদৃশ বৃত্তখণ্ড গুলি পরস্পর সমান হইয়া থাকে, [৩য়, ২৪।

অতএব **খভগ** বৃত্তখণ্ড **গণট** বৃত্তখণ্ডের সমান ;
আর **খছগ** ত্রিভুজ **গছট** ত্রিভুজের সমান উপপন্ন হইয়াছে ;
সুতরাং সমস্ত **খছগ**, বৃত্তচ্ছেদক সমস্ত **গছট** বৃত্তচ্ছেদকের সমান। [স্বতঃ ২।
এই কারণে, **টছঠ** বৃত্তচ্ছেদক **খছগ** ও **গছট** এই দুইএর প্রত্যেকের সমান।
এই রূপে উপপন্ন হইবে যে, ঙজচ, চজড, ডজঢ এই বৃত্তচ্ছেদক গুলি পরস্পর সমান।
অতএব **খঠ** চাপ **খগ**এর যে গুণিত, **খছঠ** বৃত্তচ্ছেদক **খছগ** বৃত্তচ্ছেদকের সেই গুণিত ;
এবং এই রূপে **ঙঢ** চাপ **ঙচ** চাপের যে গুণিত, **ঙজঢ** বৃত্তচ্ছেদক **ঙজচ** বৃত্তচ্ছেদকের সেই গুণিত ;
আর **খঠ** পরিধি খণ্ড **ঙঢ** পরিধি খণ্ডের সমান হইলে, **খছঠ** বৃত্তচ্ছেদক **ঙজঢ** বৃত্তচ্ছেদকের সমান হইবে ;
ও **খঠ** পরিধি খণ্ড **ঙঢ** অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, **খছঠ** বৃত্তচ্ছেদক **ঙজঢ** বৃত্তচ্ছেদক অপেক্ষা বৃহত্তর এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে।
অতএব **খগ** ও **ঙচ** চাপ এবং **খছগ** ও **ঙজচ** বৃত্তচ্ছেদক এই চারি রাশির মধ্যে **খগ** চাপ ও **খছগ** বৃত্তচ্ছেদকের কোন সমগুণিত **খঠ** চাপ ও **খছঠ** বৃত্তচ্ছেদক কল্পিত হইয়াছে এবং **ঙচ** চাপ ও **ঙজচ** বৃত্তচ্ছেদকের কোন সমগুণিত **ঙঢ** চাপ ও **ঙজঢ** বৃত্তচ্ছেদক কল্পিত হইয়াছে আর এরূপ প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, **খঠ** চাপ **ঙঢ** অপেক্ষা

বৃহত্তর হইলে, খছঠ বৃত্তচ্ছেদক ঙজচ বৃত্তচ্ছেদক অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে;

সুতরাং খগ চাপে ঙচ চাপে যে রূপ, খছগ বৃত্তচ্ছেদকে ঙজচ বৃত্তচ্ছেদকে সেই রূপ। [৫ম, সং ৫।

অতএব সমান সমান বৃত্তের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৩৪। সমান সমান দুই বৃত্ত পরস্পরকে এরূপে ছেদ করিয়াছে যে, একের কেন্দ্র অন্যের পরিধিস্থ হইয়াছে; প্রমাণ কর যে, উভয় বৃত্ত পরিধির এক এক খণ্ড অন্য এক এক খণ্ডের দ্বিগুণ।

খ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন ত্রিভুজের শীর্ষ কোণ যদি একটী সরল রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হয় এবং সেই রেখা যদি ভূমিকে ছেদ করে, তবে ত্রিভুজের দুই বাহুর অন্তর্গত আয়ত ভূমির দুই খণ্ডের অন্তর্গত আয়তের ও কোণ দ্বিখণ্ড কারক রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

কখগ ত্রিভুজের শীর্ষ কোণ যেন কঘ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইয়াছে; তাহা হইলে খক ও কগএর আয়ত খঘ ও ঘগএর অন্তর্গত আয়তের এবং কঘএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

ত্রিভুজের উপর কগখ বৃত্ত অঙ্কিত কর ; [৪র্থ, ৫।

এবং কঘকে বর্দ্ধিত কর ; তাহা হইলে, উহা যেন ঙ বিন্দুতে পরিধির সহিত সংলগ্ন হইল ,

ঙগ সংযুক্ত কর।

পরে, খকঘ কোণ ঙকগ কোণের সমান হওয়ায়, [কং।

আর কখঘ ও কঙগ কোণ এক বৃত্তখণ্ডস্থ বলিয়া পরস্পর সমান হওয়াতে, [৩য়, ২১।

খকঘ ও ঙকগ ত্রিভুজ সমান কোণী ; [১ম, ৩২।

অতএব খকতে কঘতে যে রূপ, ঙকতে কগতে সেই রূপ ;

[৬ঠ, ৪।

সুতরাং খক ও কগএর আয়ত ঙক ও কঘএর আয়তের সমান, [৬ঠ, ১৬।

অর্থাৎ ঙঘ ও ঘকএর আয়ত ও কঘএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ; [২য়, ৩।

আর ঙঘ ও ঘকএর আয়ত খঘ ও ঘগএর আয়তের সমান ;

[৩য়, ৩৫।

সুতরাং খক ও কগএর আয়ত খঘ ও ঘগএর আয়তের এবং কঘএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান।

অতএব কোন ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৩৫। খকগ ত্রিভুজের বহিস্থ গকঘ কোণ যদি কঙ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হয়, আর যদি কঙ রেখা

বর্দ্ধিত খগ ভূমিকে ঙ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, খঙ ও ঙগএর আয়ত, খক ও কগএর আয়ত এবং কঙ রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

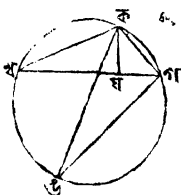
গ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন ত্রিভুজের শীর্ষ কোণ হইতে ভূমির উপর লম্ব টানিলে, ত্রিভুজের দুই বাহুর অন্তর্গত আয়ত, লম্ব রেখা ও ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত বৃত্তের ব্যাস এই দুইএর অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে।

খকগ ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ ক কোণ হইতে ভূমির উপর কঘ লম্ব টানিলে খক ও কগএর আয়ত, কঘ ও কখগ ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত বৃত্তের ব্যাস এই দুইএর অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে।

ত্রিভুজের উপর কগখ বৃত্ত অঙ্কিত কর; [৪থ, ৫।

কঙ ব্যাস টান ও ঙগ সংযুক্ত কর।

পরে খঘক সম কোণ, অর্দ্ধবৃত্তস্থ ঙগক সম কোণের সমান হওয়ায়, [৩য়, ৩১।

আর কখঘ ও কঙগ এই দুই কোণ এক বৃত্তখণ্ডস্থ বলিয়া পরস্পর সমান হওয়াতে, [৩য়, ২১।

কখঘ ও কঙগ ত্রিভুজ সমান কোণী; [১ম, ৩২।

অতএব খকতে কঘতে যে রূপ, ঙকতে কগতে সেই রূপ; [৬ষ্ঠ, ৪।

সুতরাং খক ও কগএর আয়ত, ঙক ও কঘএর আয়তের সমান। [৬ষ্ঠ, ১৬।

অতএব কোন ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

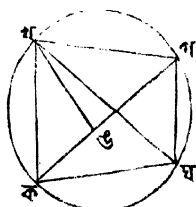
অঃ প্রঃ—৩৬। একটী ত্রিভুজের তিন বাহু ধারা বাহিক রূপে কোন সমান্তর শ্রেঢীর রাশি। যদি ক এবং খ, ত্রিভুজের বৃহত্তম এবং লঘুতম বাহু হয় আর ত্রিভুজের অন্তর্গত ও উপরি অঙ্কিত বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ যদি অ এবং ই হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ৬অই = ক × খ।

ঘ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

একটী বৃত্তের অন্তর্গত কোন চতুর্ভুজের দুই কর্ণের অন্তর্গত আয়ত ঐ ক্ষেত্রের সম্মুখীন দুই দুই বাহুর অন্তর্গত আয়তের সমান।

কখগঘ একটী বৃত্তের অন্তর্গত কোন চতুর্ভুজ; কগ, খঘ সংযুক্ত কর; তাহা হইলে কগ ও খঘএর আয়ত কখ ও গঘএর আয়ত এবং কঘ ও খগএর আয়ত এই দুইএর সমান হইবে।

ঘখগ কোণের সমান কখঙ কোণ কর; [১ম, ২৩।

এই দুই সমান কোণে ঙখঘ কোণ যোগ করিলে, সমস্ত কখঘ কোণ সমস্ত ঙখগ কোণের সমান হইবে; [স্বতঃ ২।

আর খঘক ও খগঙ কোণ এক বৃত্তখণ্ডস্থ হওয়ায়, পরস্পর সমান; [৩য়, ২১।

এই হেতু, কখঘ ও ঙখগ ত্রিভুজ সমান কোণী;

সুতরাং **কঘ**তে **ঘখ**তে যে রূপ, **ঙগ**তে **গখ**তে সেই রূপ,

[৬ষ্ঠ, ৪।

অতএব **কঘ** ও **গখ**এর আয়ত **ঘখ** ও **ঙগ**এর আয়তের সমান;

[৬ষ্ঠ, ১৬।

আবার **কখঙ** কোণ **ঘখগ** কোণের সমান হওয়ায়,

[অঙ্কন।

এবং **খকঙ** ও **খঘগ** এক বৃত্তখণ্ডস্থ বলিয়া পরস্পর সমান হওয়াতে,

[৩য়, ২১।

কখঙ ও **ঘখগ** ত্রিভুজ দ্বয় সমান কোণী;

সুতরাং **খক**তে **কঙ**তে যে রূপ, **খঘ**তে **ঘগ**তে সেই রূপ;

[৬ষ্ঠ, ৪।

অতএব **খক** ও **ঘগ**এর আয়ত, **কঙ** ও **খঘ**এর আয়তের সমান;

[৬ষ্ঠ, ১৬।

আর **কঘ**, **গখ**এর আয়ত **ঘখ**, **ঙগ**এর আয়তের সমান উপপন্ন হইয়াছে;

এই হেতু, **কঘ**, **গখ**এর আয়ত ও **খক**, **ঘগ**এর আয়ত একত্র যোগে **খঘ**, **ঙগ**এর আয়ত ও **খঘ**, **কঙ**র আয়তের সমান;

অর্থাৎ **খঘ**, **কগ**এর আয়তের সমান।

[২য়, ১।

অতএব একটী বৃত্তের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৩৭। কোন বৃত্তের অন্তর্গত একটী চতুর্ভুজের কর্ণ রেখা দ্বয় যদি পরস্পরকে লম্ব ভাবে ছেদ করে, তবে পরস্পর সম্মুখীন দুইটী দুইটী বাহুর অন্তর্গত আয়তের যোগ ফল চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের দ্বিগুণ হইবে।

৩৮। কোন দুই রেখার অন্তর্গত আয়ত তাহাদের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের মধ্য সমানুপাতী হইবে।

৩৯। কোন চতুর্ভুজের সম্মুখীন দুই কোণ হইতে তাহাদের অভিমুখীন কর্ণের উপর পাতিত দুইটী লম্ব রেখার পরিমাণ সমান; চতুর্ভুজের অভ্যন্তরীণ কোন বিন্দু হইতে এরূপে চারিটী রেখা টানিতে হইবে, যেন ক্ষেত্রটী চারি সমান সমান ত্রিভুজে বিভক্ত হয়।

৪০। কোন ত্রিভুজের একটী কোণ হইতে সম্মুখীন বাহুর মধ্য বিন্দু পর্য্যন্ত একটী রেখা টানিলে এবং আর একটী কোণ হইতে এই রেখার মধ্য বিন্দু দিয়া সম্মুখীন বাহু পর্য্যন্ত অন্য একটী রেখা টানিলে, দুইএতে একেতে যে অনুপাত, শেষোক্ত রেখার অংশদ্বয়েতেও সেই অনুপাত হইবে।

৪১। কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এরূপে একটী রেখা টানিতে হইবে, যেন আর দুইটী নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার উপর লম্ব টানিলে, প্রথমোক্ত বিন্দুর উভয় পার্শ্বস্থ লম্ব পর্য্যন্ত ঐ রেখার দুই খণ্ড পরস্পর সমান হয়।

৪২। কোন ত্রিভুজের কোণ সকল হইতে সম্মুখীন বাহু বা বর্দ্ধিত বাহু পর্য্যন্ত যদি সমান সমান তিনটী রেখা টানা যায় আর ত্রিভুজের অভ্যন্তরীণ কোন বিন্দু হইতে বাহু পর্য্যন্ত তাহাদের সমান্তর অন্য তিনটী রেখা টানা যায়, তবে শেষোক্ত রেখা ত্রয়ের সমষ্টি প্রথমোক্ত কোন একটী রেখার সমান হইবে।

৪৩। তিনটী বৃত্ত যদি পরস্পর স্পর্শ করে, আর উহাদের মধ্যে দুইটী যদি সমান হয়, তবে স্পর্শ বিন্দু ত্রয় সংযুক্ত করিয়া দিলে, যে ত্রিভুজ হইবে, তাহার শীর্ষ কোণ, কেন্দ্র তিনটীর সংযোগ দ্বারা উৎপন্ন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন একটী কোণের সমান হইবে।

৪৪। কখগ একটী সমবাহু ত্রিভুজ; কগ রেখাস্থ ও কোন এক বিন্দু; খগকে বর্দ্ধিত করিয়া তাহা হইতে গক ও গঙের সমান করিয়া গঘ ও গচ অংশ ছেদ কর। জ বিন্দুতে যেন কচ, ঘঙ রেখা দ্বয়ের পরস্পর সম্পাত হইল; প্রমাণ কর যে,

জগ : ঙগ : : কগ : কগ + ঙগ।

৪৫। কোন বৃত্তের অন্তর্গত একটী চতুর্ভুজের কগ, খঘ কর্ণ পরস্পর ঙ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে; প্রতিপন্ন কর যে,

কখ.খগ : কঘ.ঘগ : : খঙ : ঙঘ।

৪৬। একটী বর্গ ক্ষেত্র এ রূপে কোন সম কোণী ত্রিভুজের অন্তর্গত করা হইয়াছে যে, তাহার একটী বাহু ও ত্রিভুজের কর্ণ এক রেখাস্থ হইয়াছে। প্রমাণ কর যে, কর্ণের তিন অংশ ক্রমাগত সমানুপাতী হইবে।

৪৭। কখগ, কোন বৃত্তের অন্তর্গত ত্রিভুজ, যদি ক বিন্দু হইতে বৃত্ত স্পর্শক রেখা ও খ বিন্দু হইতে তাহার সমান্তর খঘ রেখা টানা যায়, আর এই রেখা যদি ঘ বিন্দুতে কগ বা বর্দ্ধিত কগ বাহুকে ছেদ করে, তাহা হইলে কখ রেখা কগ ও কঘএর মধ্য সমানুপাতী হইবে।

৪৮। পরস্পার বহিস্থ দুই বৃত্তের কেন্দ্র হইতে প্রত্যেকের এক একটী স্পর্শিনী টানিলে, যদি উহারা পরস্পার ছেদ করে, তবে উভয় বৃত্তের স্পর্শিনীর যে যে ভাগ দুই বৃত্তের বাহিরে থাকিবে, তাহাদের অংশ দ্বয়ের অন্তর্গত এক একটী আয়ত পরস্পার সমান হইবে।

৪৯। কোন বৃত্তের ব্যাসের দুই প্রান্ত ও পরিধিস্থ অন্য এক বিন্দু দিয়া এক একটী স্পর্শিনী টানিলে, তন্মধ্যে তৃতীয়টীর যে ভাগ অন্য দুইটীর মধ্যে থাকিবে, তাহা স্পর্শ বিন্দুতে এরূপে বিভক্ত হইবে যে, বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ তাহার দুই খণ্ডের মধ্য সমানুপাতী হইবে।

৫০। কোন বৃত্তের অন্তর্গত দুই জ্যা যদি পরস্পরকে এরূপে ছেদ করে যে, একের দুই খণ্ড যে অনুপাত বিশিষ্ট, অন্যের দুই খণ্ডও সেই অনুপাত বিশিষ্ট হয়, তাহা হইলে সবর্ণীয় খণ্ড দ্বয়ের অন্তর্গত কোণের দ্বিখণ্ডকারক রেখা, বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া যাইবে।

৫১। একটী ত্রিভুজকে কোন অর্দ্ধ বৃত্তের অন্তর্গত করিয়া, যদি ব্যাসের কোন বিন্দু হইতে একটী লম্ব রেখা টানা যায় ও তাহা যদি পরিধি ও ত্রিভুজের অন্য দুই বাহু ছেদ করে, তবে লম্বের তিন খণ্ড ক্রমাগত সমানুপাতী হইবে।

৫২। এক সমচতুর্ভুজ কোন ত্রিভুজের অন্তর্গত করিতে হইবে।

৫৩। যদি এক বৃত্ত পরিধির কোন বিন্দু দিয়া একটী স্পর্শিনী ও তথা হইতে কতকগুলি জ্যা টানা যায় এবং স্পর্শিনীর সমান্তর অন্য একটী জ্যা যদি পূর্ব্বোক্ত জ্যা গুলিকে ছেদ করে, তবে তাহাদের এক একটীর সম্বদয়ের ও সমান্তর রেখাদ্বয়ের মধ্যস্থিত অংশের অন্তর্গত আয়ত গুলি পরস্পর সমান হইবে।

৫৪। সদৃশ ত্রিভুজ দ্বয়ের সমান সমান এক একটী কোণ হইতে সবর্গীয় বাহুর সহিত সমান সমান কোণ করিয়া যদি এক একটী রেখা সম্মুখীন বাহু পর্য্যন্ত টানা যায়, তবে সম্মুখীন বাহু দ্বয় যে অনুপাত বিশিষ্ট, এই রেখা দ্বয়ও সেই অনুপাত বিশিষ্ট হইবে এবং সম্মুখীন বাহু দ্বয়কে সমানুপাতী রূপে ছেদ করিবে।

৫৫। ষষ্ঠ অধ্যায়ের ২য় প্রতিজ্ঞার প্রয়োগ দ্বারা প্রদর্শন করিতে হইবে যে, এক খণ্ড রজ্জু লইয়া কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এক নির্দ্দিষ্ট রেখার সমান্তর আর একটী রেখা টানা যায়।

৫৬। কোন ত্রিভুজের ক কোণ সম কোণ; যদি গ কোণকে দ্বিখণ্ড করিয়া গঘ রেখা টানা যায়, তবে প্রমাণ কর যে,

কখ : কগ : : খগ — কগ : কঘ।

৫৭। কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের একটী ব্যাসের দুই প্রান্ত হইতে কোন জ্যার উপর যদি দুইটী লম্ব টানা যায়, তবে দুইটী লম্ব কেন্দ্র হইতে সমদূরে জ্যার বা বর্দ্ধিত জ্যার সহিত সংলগ্ন হইবে।

৫৮। কোন নির্দ্দিষ্ট বর্গ ক্ষেত্রের সমান একটী সমবাহু ত্রি ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

৫৯। খকগ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের খক ও খগ বাহু পরস্পর সমান; খক বাহুস্থিত ঙ বিন্দু হইতে ঙচঘ সরল রেখা এরূপে টান, যেন তাহা ভূমির চ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড ও বর্দ্ধিত কগ বাহুর সহিত ঘ বিন্দুতে সংলগ্ন হয়। প্রমাণ কর যে, গঘ = কঙ।

৬০। কোন নির্দ্দিষ্ট বর্গ ক্ষেত্রের সমান এক নিয়মিত অষ্ট-ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

৬১। একই ভূমির উপর কোন নির্দ্দিষ্ট অনুপাতী দুই বাহু বিশিষ্ট যত গুলি বিষমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত হইতে পারে, তাহাদের শীর্ষ বিন্দু দ্বারা একটী বৃত্ত পরিধি অঙ্কিত হইবে।

৬২। ভূমির উপর একটী লম্ব টানিয়া কোন নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজকে দ্বিখণ্ড করিতে হইবে।

৬৩। ত্রিভুজের তিন কোণ হইতে সম্মুখীন বাহুত্রয়ের মধ্য বিন্দু পর্য্যন্ত তিন রেখা নির্দ্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজটী অঙ্কিত করিতে হইবে;

৬৪। এক বর্গক্ষেত্র কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তখণ্ডের অন্তর্গত করিতে হইবে।

৬৫। কতক গুলি রেখা যদি কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত পরিধি পর্য্যন্ত টানা যায় এবং যদি ঐ রেখা গুলিকে এরূপে বিভক্ত করা যায় যে, অংশ গুলি কোন নির্দ্দিষ্ট অনুপাতী হয়, তবে ছেদ বিন্দু গুলি দ্বারা আর একটী বৃত্ত পরিধি উৎপন্ন হইবে।

৬৬। দুই নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে, একটী ছেদ বিন্দু দিয়া এরূপে এক রেখা টানিতে হইবে, যেন তাহা উভয় বৃত্তকে ছেদ করে ও তাহার যে যে অংশ প্রত্যেক বৃত্তের জ্যা হইবে, তাহারা যেন কোন নির্দ্দিষ্ট অনুপাত বিশিষ্ট হয়।

৬৭। কোন নির্দ্দিষ্ট সমান্তর ক্ষেত্রের সদৃশ আর একটী সমান্তর ক্ষেত্র এক নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের অন্তর্গত করিতে হইবে।

৬৮। যদি কোন ত্রিভুজের শৃঙ্গ ও ভূমির এক এক প্রান্ত দিয়া এক একটী বৃত্ত এরূপে অঙ্কিত করা যায় যে, তাহারা ভূমির বা বর্দ্ধিত ভূমিস্থ কোন বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে, তবে ত্রিভুজের বাহু দ্বয় যে অনুপাত বিশিষ্ট, বৃত্ত দ্বয়ের ব্যাস গুলিও সেই অনুপাত বিশিষ্ট হইবে।

৬৯। দুই অসমান বৃত্তের কেন্দ্র ক ও খ; কপ ও খফ দুই সমান্তর ব্যাসার্দ্ধ। প্রতিপাদন কর যে, পফ রেখা টানিলে,

তাহা এমন এক অপরিবর্ত্তনীয় বিন্দু দিয়া যাইবে, দুই কেন্দ্র হইতে যাহার দূরত্বের অনুপাত দুই বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের অনুপাতের সমান হইবে।

ইহা হইতে দুই বৃত্তের সাধারণ স্পার্শিনী টানিবার উপায় স্থির কর।

৭০। দুই বৃত্তের এক পার্শ্বের সাধারণ স্পর্শিনী গঘঙ রেখা, কেন্দ্র সংযোজক কখ রেখাকে ঙ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে; চছজটঙ আর একটী রেখা দুই বৃত্তকে ছেদ করিতেছে। প্রতিপন্ন কর যে, ঙগ.ঙঘ = ঙচ.ঙট = ঙছ.ঙজ।

৭১। দুই নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে, এমন একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, স্পর্শ বিন্দু দ্বয় সংযোজক রেখা এক অপরিবর্ত্তনীয় বিন্দু দিয়া যাইবে।

৭২। কখগ ত্রিভুজের কগ বাহু = ২খগ: কগ বাহুকে বর্দ্ধিত কর এবং খগক ও তাহার সন্নিহিত কোণকে গঘ ও গঙ রেখা দ্বারা ক্রমে দ্বিখণ্ড করিয়া প্রমাণ কর যে, গখঘ, কগঘ, কখগ ও গঘঙ ত্রিভুজ গুলি ১, ২, ৩ ও ৪এর অনুপাতী।

৭৩। কোন নিয়মিত পঞ্চভুজের দুই কর্ণ রেখা যদি পরস্পর ছেদ করে, তবে তাহাদের বৃহত্তর অংশ গুলি প্রত্যেকে পঞ্চভুজের এক এক বাহুর সমান হইবে ও প্রত্যেক কর্ণ ছেদ বিন্দুতে অন্ত্য ও মধ্য অনুপাতী রূপে বিভক্ত হইবে।

৭৪। কোন বৃত্তের এক নির্দ্দিষ্ট চাপকে এরূপে দুই অংশে বিভক্ত করিতে হইবে, যেন তাহাদের জ্যা দুইটী, কোন নির্দ্দিষ্ট অনুপাতী হয়।

৭৫। প্রতিপাদন কর যে, কোন সমচতুর্ভুজের এক ভুজ ও কর্ণ রেখা পরস্পর দৃঢ় রাশি।

৭৬। কোন স্থূল কোণী ত্রিভুজের স্থূল কোণ হইতে ভূমি পর্য্যন্ত এরূপে এক রেখা টানিতে হইবে, যেন তাহা ভূমির দুই খণ্ডের মধ্য সমানুপাতী হয়।

৭৭। কোন ত্রিভুজের ক কোণ এক সম কোণ; গঘ রেখা দ্বারা গ কোণ দ্বিখণ্ড করিয়া প্রমাণ কর যে,

$$২কগ^{২} : কগ^{২} - কঘ^{২} :: কখ : কঘ।$$

৭৮। দুই বাহুর অনুপাত, অন্য এক বাহু ও তাহার সম্মুখীন কোণ নির্দ্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজটী অঙ্কিত করিতে হইবে।

৭৯। দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের একটী কোণ যদি অপরের একটী কোণের সমান হয় ও উভয় ত্রিভুজের আর এক একটী কোণ একত্র করিলে যদি দুই সম কোণের সমান হয়, তবে এই চারি কোণের সম্মুখীন বাহু গুলি সমানুপাতী হইবে।

৮০। কোন নির্দ্দিষ্ট কোণের দ্বিখণ্ডকারক রেখাস্থ কোন বিন্দু দিয়া একটী রেখা এরূপে টানিতে হইবে, যেন তাহা ঐ কোণের পার্শ্বস্থ দুই রেখার সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, ঐ বিন্দু দিয়া উল্লিখিত দুই রেখা পর্য্যন্ত যত রেখা টানা যাইতে পারে, তন্মধ্যে প্রথম রেখাটী ক্ষুদ্রতম ও ইহা দ্বারা যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে, তাহাও ক্ষুদ্রতম।

৮১। কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের অভ্যন্তরে সমান সমান ছয়টী বৃত্ত এরূপে অঙ্কিত করিতে হইবে, যেন তাহারা পরস্পরকে ও নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে; আর প্রতিপাদন করিতে হইবে যে, এই ছয়টী বৃত্তকে স্পর্শ করে, এমন একটী বৃত্ত যদি তাহাদের মধ্যস্থ ক্ষেত্রে অঙ্কিত করা যায়, তবে সেইটী ইহাদের প্রত্যেকের সমান হইবে।

৮২। কখগ একটী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির উপর কঘ লম্ব এবং কখ ও বর্দ্ধিত কগকে ছেদ করিয়া ঙঘচ রেখা টানিয়া প্রমাণ কর যে, কঘ : ঘঙ : : কখ + কচ : কখ − কচ।

৮৩। কোন বিন্দু হইতে চারি রেখা টানিলে যদি তাহারা অন্য এক রেখাকে লয় বিভাগানুসারে ভাগ করে, তবে অন্য কোন রেখাও প্রথমোক্ত চারি রেখা দ্বারা ছিন্ন হইলে, লয় বিভাগানুসারে বিভক্ত হইবে।

৮৪। কোন সমকোণী ত্রিভুজের খগ কর্ণের উপর কঘ লম্ব টানা হইয়াছে; যদি কখগ ত্রিভুজের অন্তর্গত বৃত্তের ব্যাস র হয় এবং কখঘ ও কগঘ ত্রিভুজের অন্তর্গত দুই বৃত্তের ব্যাস অ ও ই হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $র^২ = অ^২ + ই^২$।

৮৫। কোন বিষমবাহু ত্রিভুজের সমান একটী সমদ্বিবাহু

ত্রিভুজ এরূপে অঙ্কিত করিতে হইবে, যেন উভয়ের শৃঙ্গস্থ কোণ সমান হয়।

৮৬। কখগঘ একটী আয়ত ক্ষেত্র; গঘ বাহুতে ঙ বিন্দু কল্পনা কর ও কঙ সংযুক্ত কর এবং তাহার উপর খ বিন্দু হইতে খচ লম্ব টানিয়া প্রতিপন্ন কর যে, খচ ও ঙচএর অন্তর্গত আয়ত কখগঘ আয়তের সমান।

৮৭। কখগ কোন বৃত্তের অন্তর্গত ত্রিভুজ; খ ও গ বিন্দু দিয়া বৃত্তের দুই স্পর্শিনী টান এবং ক বিন্দু হইতে উহাদের সমান্তর কঘ ও কঙ রেখা ভূমি পর্য্যন্ত টানিয়া প্রমাণ কর যে, কঘ = কঙ এবং খঘ : গঙ : : কখ^2 : কগ^2।

৮৮। দুইটী বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিয়াছে; কখগঘঙ রেখা এই দুই বৃত্তকে ক, খ, ঘ, ঙ বিন্দুতে ও তাহাদের সামান্য জ্যাকে গ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে,
কখ : খগ : : ঙঘ : ঘগ এবং কঙ^2 : খঘ^2 : : কগ.গঙ : খগ.গঘ।

৮৯। কোন বৃত্তের অন্তর্গত একটী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের উভয় বাহুই যদি ভূমির দ্বিগুণ হয়, তাহা হইলে ৪তে ১৫তে যে অনুপাত, ব্যাসার্দ্ধের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রে ত্রিভুজের সমান দুই বাহুর একটীর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রে সেই অনুপাত হইবে।

৯০। কখগ ত্রিভুজের ক কোণ সম কোণ ও খ কোণ গ কোণের দ্বিগুণ; খ কোণকে দ্বিখণ্ড করিয়া খঘ রেখা টান এবং খগএর উপর কঙ, ঘচ লম্ব টানিয়া প্রতিপন্ন কর যে,

$$\frac{১}{\text{খঙ.ঘচ}} - \frac{১}{\text{কঙ.খচ}} = \frac{১}{\text{কঙ.খঙ}}$$

৯১। একটী সমচতুর্ভুজ কোন নির্দ্দিষ্ট নিয়মিত পঞ্চভুজের অন্তর্গত করিতে হইবে।

৯২। কোন ত্রিভুজের একটী বাহুর সমান্তর এক রেখা টানিয়া ত্রিভুজকে দ্বিখণ্ড করিতে হইবে।

৯৩। কোন সমকোণী ত্রিভুজের একটী বাহু অন্যের দ্বিগুণ: যদি শৃঙ্গ হইতে কর্ণের উপর লম্ব টানা যায়, তাহা হইলে কর্ণ রেখা ১ ও ৪এর অনুপাতী রূপে বিভক্ত হইবে।

৯৪। কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমান এবং কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণের সমান এক কোণ বিশিষ্ট একটী রম্বস অঙ্কিত করিতে হইবে।

৯৫। কোন সমচতুর্ভুজের কর্ণ রেখার ও এক বাহুর অন্তর নির্দ্দিষ্ট আছে; সমচতুর্ভুজটী অঙ্কিত করিতে হইবে।

৯৬। এমন একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহা এক নির্দ্দিষ্ট রেখা ও এক নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে এবং এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়।

৯৭। এমন একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহা দুই নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত ও এক নির্দ্দিষ্ট রেখাকে স্পর্শ করে।

৯৮। এমন একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহা দুই নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে ও এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়।

৯৯। এমন একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহা তিনটী নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে।

১০০। যদি তিনটী নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের দুইটী দুইটীর যুগ্ম যুগ্ম সাধারণ স্পর্শিনী টানা যায়, তবে ঐ যুগ্ম স্পর্শিনী গুলি বর্দ্ধিত হইলে যে যে বিন্দুতে সংলগ্ন হইবে, তাহারা এক রেখাস্থ হইবে।

ষষ্ঠ অধ্যায়।

ব্যাখ্যা ও পরিশিষ্ট।

ইউক্লিড রাশি সকলের সম্বন্ধ নির্ণয় করিবার জন্য পঞ্চম অধ্যায়ে যে অনুপাত ও সমানুপাতের বিধি প্রকটন করিয়াছেন, সদৃশ ও বিসদৃশ সরল রৈখিক ক্ষেত্র সকলের ও তাহাদিগের বাহু গুলির পরস্পর সম্বন্ধ স্থির করিবার জন্য ষষ্ঠ অধ্যায়ে সেই বিধি প্রয়োগ করিয়াছেন।

৬ষ্ঠ, সং ১। কোন কোন টীকাকার লিখিয়াছেন যে, সদৃশ ক্ষেত্রের কোণ গুলি পরস্পর সমান ও বাহুগুলি সমানুপাতী, এই উভয় বিধ বাক্য প্রয়োগের আবশ্যকতা নাই; কেননা, ত্রিভুজের কোণ গুলি সমান হইলে বাহু গুলি সমানুপাতী ও বাহু গুলি সমানুপাতী হইলে, কোণ গুলি পরস্পর সমান হইবে। ইউক্লিড ইহা ষষ্ঠ অধ্যায়ের ৪র্থ ও ৫ম প্রতিজ্ঞায় প্রমাণ করিয়াছেন; কিন্তু অন্যান্য সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশতার লক্ষণ লিখিতে হইলে, কোণ গুলির সমতা ও বাহু গুলির সমানুপাতিত্ব, এই দুইটী গুণেরই উল্লেখ আবশ্যক; কেননা একটী উল্লেখ করিলে অপরটী সপ্রমাণ হয় না; যথা,—কোন আয়ত ও সমচতুর্ভুজ ক্ষেত্রের কোণ গুলি পরস্পর সমান কিন্তু বাহুগুলি সমানুপাতী নহে; আবার কোন রম্বসের ও সমচতুর্ভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী কিন্তু কোণ গুলি পরস্পর সমান নহে।

সং ২। ইউক্লিড এই সংজ্ঞা ব্যতীত অন্য কোন স্থানে বিবৃত্ত ভাবাপন্ন ক্ষেত্রের নাম উল্লেখ করেন নাই; এজন্য কোন কোন টীকাকার দ্বিতীয় সংজ্ঞাটী এইরূপে লিখিয়াছেন; যথা,—

দুইটী ক্ষেত্রের মধ্যে একের দুইটী বাহু যদি অন্যের দুই বাহুর সহিত এরূপে সমানুপাতী হয়, যে প্রথম ক্ষেত্রের একটী বাহুতে দ্বিতীয় ক্ষেত্রের একটী বাহুতে যে অনুপাত, দ্বিতীয় ক্ষেত্রের অবশিষ্ট বাহুতে প্রথম ক্ষেত্রের অবশিষ্ট বাহুতে সেই অনুপাত, তবে এরূপ বলিতে হইবে যে, প্রথমের দুই বাহু দ্বিতীয়ের দুই বাহুর সহিত বিবৃত্ত ভাবে সমানুপাতী। (ষষ্ঠ অধ্যায়ের ১৪শ ও ১৫শ প্রতিজ্ঞায় এই সংজ্ঞার প্রয়োগ হইয়াছে।)

সং ৩। ইহার আনুষঙ্গিক এই সংজ্ঞাটী লেখা যাইতে পারে ;—

কোন সরল রেখা লয় বিভাগানুসারে বিভক্ত হইয়াছে বলিলে বুঝিতে হইবে যে, উহা তিন অংশে এরূপে বিভক্ত হইয়াছে যে, পূর্ণ রেখাতে এক দিকের অংশেতে যে অনুপাত, অপর দিকের অংশেতে মধ্য অংশেতে সেই অনুপাত।

সং ৪। উন্নতি ও লম্ব এই দুইটী একার্থ শব্দ। কেহ কেহ উন্নতির পরিবর্ত্তে লম্ব শব্দ ব্যবহার করিয়াছেন। সম্রাট্ জগন্নাথ পণ্ডিত স্বকৃত রেখাগণিতে উন্নতির পরিবর্ত্তে ক্ষেত্রলম্ব শব্দ প্রয়োগ করিয়াছেন: ইউক্লিডের এই সংজ্ঞা কেবল ত্রিভুজ সম্বন্ধে প্রকৃত রূপে প্রয়োগ হইতে পারে ; কেননা, অন্য কোন সরল রৈখিক ক্ষেত্রের এমন কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু নাই, যাহাকে শৃঙ্গ বলা যায়। সমান্তর ক্ষেত্রের ভূমির সম্মুখীন বাহুর যে কোন বিন্দু হইতে ভূমি পর্য্যন্ত অঙ্কিত লম্বকে উন্নতি বলিয়া থাকে।

৬ষ্ঠ, ২। এই প্রতিজ্ঞা যত প্রকার হইতে পারে, সেই গুলি ভিন্ন ভিন্ন তিনটী চিত্র দ্বারা প্রতিপাদিত হইয়াছে।

প্রথম চিত্রে সমান্তর রেখাটী শৃঙ্গ ও ভূমির মধ্যে ত্রিভুজের দুই বাহুকে ছেদ করিয়াছে ;

দ্বিতীয় চিত্রে ভূমির নিম্নভাগে বর্দ্ধিত ভুজ দ্বয়কে ও তৃতীয় চিত্রে শৃঙ্গের অপর পার্শ্বে বর্দ্ধিত ভুজ দ্বয়কে ছেদ করিয়াছে।

প্রতিজ্ঞায় লিখিত হইয়াছে যে, ত্রিভুজের দুই বাহু সমানুপাতী রূপে ছেদিত হইলে, ছেদ বিন্দু দ্বয় সংযোজক রেখা ভূমির

সমান্তর হইবে; যদি কঘ, ঘগএর দ্বিগুণ হয় এবং গঙ, ঙকএর দ্বিগুণ হয়, তাহা হইলেও বাহু দ্বয় সমানুপাতী রূপে ছেদিত হইবে, কিন্তু ঘঙ, খগএর সমান্তর হইবে না। অতএব শৃঙ্গ হইতে ছেদ বিন্দু দ্বয় পর্য্যন্ত বাহুর দুই খণ্ড সমানুপাতের পূর্ব্ব-বর্ত্তী বা পরবর্ত্তী রাশি হইবে এরূপ লিখিলে, এই প্রতিজ্ঞায় আর কোন দোষ থাকে না।

৬ঠ, ক। এই প্রতিজ্ঞা সিমসন সাহেবের লিখিত। যদি কখগ ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু হয়, তবে দ্বিখণ্ডকারক রেখা ভূমিকে ছেদ না করিয়া তাহার সমান্তর হইবে।

৬ঠ, ৪। সদৃশ ত্রিভুজ সম্বন্ধীয় এইটী প্রথম প্রতিজ্ঞা; ৬ঠ অধ্যায়ের অনেক গুলি প্রতিজ্ঞাতেই ইহার উপযোগিতা দৃষ্ট হইবে। যদি কখ ও কগ বাহু হইতে ঘগ ও ঘঙর সমান অংশ ছেদ করিয়া ছেদ বিন্দুদ্বয় সংযুক্ত করা যায়, তবে দ্বিতীয় প্রতিজ্ঞার সাহায্যে অনায়াসে এই প্রতিজ্ঞার উপপত্তি করা যাইতে পারে।

৬ঠ, ৫। ষষ্ঠ অধ্যায়ের পঞ্চম প্রতিজ্ঞা চতুর্থের বিপরীত: প্রথম অধ্যায়ের অষ্টম প্রতিজ্ঞার সহিত ইহার সাদৃশ্য আছে। যদি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে সমানুপাতী না হইয়া অন্য রূপে সমানুপাতী হয়, যথা,—কখতে খগতে যে রূপ ঘঙতে ঙচতে সেইরূপ ও খগতে গকতে যে রূপ, ঘচতে ঙগতে সেই রূপ এবং কখতে কগতে যে রূপ, ঘচতে ঙচতে সেই রূপ; তাহা হইলে, কখগ, ঘঙচ দুই ত্রিভুজ যে নিশ্চয়ই সমান কোণ বিশিষ্ট হইবে, এরূপ বলা যাইতে পারে না; অতএব এই প্রতিজ্ঞার ত্রিভুজ দ্বয়ের বাহু গুলি যথাক্রমে সমানুপাতী এরূপ বলা আবশ্যক ছিল; কিন্তু ইউক্লিড তাহা বলেন নাই।

৬ঠ ৬। এইটী সদৃশ ত্রিভুজ সম্বন্ধীয় তৃতীয় প্রতিজ্ঞা। প্রথম অধ্যায়ের ৪থ প্রতিজ্ঞার সহিত ইহার সাদৃশ্য আছে।

৬ঠ, ৭। ইহা সদৃশ ত্রিভুজ সম্বন্ধীয় চতুর্থ প্রতিজ্ঞা। ৬ঠ প্রতিজ্ঞার ন্যায় ইহারও অসম্পূর্ণতা দোষ দৃষ্ট হয়; এক একটী কোণের পার্শ্বস্থ বাহু দ্বয় এরূপে সমানুপাতী হওয়া আবশ্যক, যেন সমান সমান কোণের সম্মুখীন বাহু সকল সবর্গীয়

হয়; তাহা না হইলে ত্রিভুজ দ্বয় যে পরস্পর সমান কোণ বিশিষ্ট হইবে, এমন বলা যায় না।

৬ঠ, ৮। এই প্রতিজ্ঞার উপপত্তিতে লিখিত হইয়াছে যে, ঘখক ও ঘকগ এই দুই ত্রিভুজ প্রত্যেকে কখগ ত্রিভুজের সদৃশ হওয়াতে পরস্পর সদৃশ। এই বাক্যটীর সার্থকতা সম্পূর্ণরূপে হৃদয়ঙ্গম করিবার জন্য ষষ্ঠ অধ্যায়ের ২১এর প্রতিজ্ঞা বিদ্যার্থী-দিগের পাঠ করা আবশ্যক কিন্তু তাহা না করিয়াও অনায়াসে প্রতিপাদন করা যাইতে পারে যে ঐ ত্রিভুজ দুইটী সদৃশ। কেননা সহজেই প্রতীত হইবে যে, তাহারা পরস্পর সমান কোণ বিশিষ্ট; অতএব সদৃশ। [৬ঠ, ৪।

এই প্রতিজ্ঞার অনুমানে সপ্রমাণ হইয়াছে যে, কঘ লম্ব খঘ ও ঘগএর মধ্য সমানুপাতী।

দ্বিতীয় অধ্যায়ের ১৪শ প্রতিজ্ঞাতে এই সিদ্ধান্ত ভিন্ন রূপে ও ভিন্ন আকারে প্রতিপন্ন হইয়াছে।

৬ঠ, ৯। বিদ্যার্থীদিগের স্মরণ করিয়া রাখা আবশ্যক যে পঞ্চম অধ্যায়ের ১ম সংজ্ঞায় ইউক্লিড যে অর্থে অংশ শব্দ প্রয়োগ করিয়াছেন, এস্থলেও সেই অর্থ গ্রহণ করিতে হইবে।

৬ঠ, ১১। এই প্রতিজ্ঞা ষষ্ঠ অধ্যায়ের ১২শ প্রতিজ্ঞার অন্তর্গত বলা যাইতে পারে; কেননা তাহাতে সমানুপাতের দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশি সমান হইলেই এই প্রতিজ্ঞার উদ্দেশ্য সিদ্ধ হইবে।

৬ঠ, ১৩। এই প্রতিজ্ঞার আনুষঙ্গিক নিম্ন লিখিত বিষয় গুলি বিদ্যার্থীদিগের শিক্ষা করা আবশ্যক;—

(১) দুই রেখার সমষ্টির অর্দ্ধেককে তাহাদের সমান্তর মধ্য বলে।

(২) তিন রেখা ক্রমাগত সমানুপাতী হইলে, মধ্য রেখাকে ১ম ও ২য়ের সমগুণ মধ্য বলে।

(৩) তিন রেখা লয় সমানুপাতী হইলে দ্বিতীয়কে লয় মধ্য বলে; ইহাদের মধ্যে ১ম ও ৩য়ের সমষ্টির এবং ২য়ের অন্তর্গত আয়ত, ১ম ও ৩য়ের দ্বিগুণিত আয়তের সমান হইয়া থাকে।

৬ঠ, ১৫। ষষ্ঠ অধ্যায়ের ১৪শ প্রতিজ্ঞার চিত্রে ঘচ, চঙ, ঙছ

সংযুক্ত করিয়া দিলেই এই প্রতিজ্ঞার চিত্র অঙ্কিত হইবে এবং তাহা হইতে ইহা সহজেই সপ্রমাণ হইবে; কেননা ত্রিভুজ গুলি এক ভূমি ও এক উন্নতি বিশিষ্ট সমান্তর ক্ষেত্র সকলের অৰ্দ্ধেক হইয়া থাকে।

৬ষ্ঠ, ১৭। এই প্রতিজ্ঞা ১৬শ প্রতিজ্ঞার অন্তর্গত বলিলে বলা যায়; বীজগণিতের দ্বারা এই দুইটী প্রতিজ্ঞা এই রূপে প্রমাণ করা যায়; যথা,—

$$ক : খ : : গ : ঘ ; অথবা \frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ} \therefore \frac{ক}{খ} \times খঘ = \frac{গ}{ঘ} \times খঘ,$$

অথবা কঘ = খগ ; খ = গ হইলে, কঘ = $খ^2$।

$$আবার\ কঘ = খগ\ হইলে,\ কঘ \div খঘ = খগ \div খঘ \therefore \frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ};$$

অথবা ক : খ : : গ : ঘ ; খ = গ হইলে, ক : খ : : খ : ঘ।

৬ষ্ঠ, ১৮। এই প্রতিজ্ঞা সংক্রান্ত নিম্ন লিখিত সংজ্ঞাটি জানিয়া রাখা আবশ্যক;—

এক বা সমান্তর দুই রেখার উপর সদৃশ ক্ষেত্র দ্বয় অঙ্কিত হইলে যদি তাহাদের সবর্গীয় বাহু গুলি যথাক্রমে সমান্তর হয়, তবে ক্ষেত্র দুইটী এক রূপে স্থাপিত বলিতে হইবে।

ত্রিভুজের দুই বাহুর উপর অঙ্কিত সদৃশ ক্ষেত্র দ্বয় এক রূপে স্থাপিত বলিলে বুঝিতে হইবে যে, ঐ দুই বাহুকে যদি স্থানান্তরে সমান্তর করিয়া অঙ্কিত করা যায় তবে ক্ষেত্র গুলির বাহু সকল পূৰ্ব্বোক্ত রূপে সমান্তর হইবে।

৬ষ্ঠ, ২১। এই প্রতিজ্ঞা সিদ্ধ করিবার জন্য তিনটী ত্রিভুজ অঙ্কিত হইয়াছে; কিন্তু প্রতিজ্ঞাটী ব্যাপক হওয়াতে ত্রিভুজের পরিবর্ত্তে অন্য কোন বহুভুজ অঙ্কিত করিয়া ইহা সিদ্ধ করা আবশ্যক।

৬ষ্ঠ, ২২। এই প্রতিজ্ঞার দ্বিতীয়াংশের উপপত্তি স্থলে লিখিত হইয়াছে যে ধদ ও ঢজ ক্ষেত্র পরস্পর সমান আর তাহারা সদৃশ ও এক রূপে স্থাপিত বলিয়া তদ রেখা ছজএর সমান।

সমান ও সদৃশ ক্ষেত্রদ্বয় এক রূপে স্থাপিত হইলেই যে

তাহাদের দুইটী ভূমি পরস্পর সমান হয়, তাহা পূর্ব্বে সপ্রমাণ হয় নাই অতএব এ স্থলে তাহা প্রতিপন্ন করা যাইতেছে।

যদি তদ, ছজএর সমান না হয় তবে উহা যেন ছজ অপেক্ষা বৃহত্তর হইল।

পরে, ধদ ও ঢজ সদৃশ ক্ষেত্র হওয়াতে, তদতে তধতে যে রূপ, ছজতে ছঢতে সেই রূপ ;

আর তদ, ছজ অপেক্ষা বৃহত্তর ; অতএব তধ, ছঢ অপেক্ষা বৃহত্তর (৫ম, ১৪) ; এই হেতু দতধ ত্রিভুজ জছঢ ত্রিভুজ অপেক্ষা বৃহত্তর ; (১ম, ৪ ; স্বতঃ ৯)। আবার ধদ ও ঢজ ক্ষেত্র পরস্পর সমান ও সদৃশ হওয়াতে, দতধ ত্রিভুজ জছঢ ত্রিভুজের সমান (৬ঠ, ২০) ; সুতরাং এরূপ হওয়া অসম্ভব, অতএব তদ রেখা ছজএর সমান।

৬ঠ, ২৩। এই প্রতিজ্ঞার চিত্রে খঘ ও ছঙ সংযুক্ত করিলে সপ্রমাণ হইতে পারে যে, ত্রিভুজ দ্বয়ের এক একটী কোণ সমান হইলে তাহারা বাহু গুলির অনুপাতের সম্মিলিত অনুপাত বিশিষ্ট হইবে।

৬ঠ, ২৪—২৬। ষষ্ঠ অধ্যায়ের ২৪ ও ২৬এর প্রতিজ্ঞা পরস্পর বিপরীত ; অতএব ২৫শের প্রতিজ্ঞা তন্মধ্যে থাকাতে যথা স্থানে লিখিত হয় নাই এরূপ বলা যাইতে পারে।

৬ঠ, ৩১। প্রথম অধ্যায়ের ৪৭এর প্রতিজ্ঞা এই সাধারণ প্রতিজ্ঞার একটী বিশেষ প্রকরণ মাত্র।

৬ঠ, ৩২। এই প্রতিজ্ঞার বিশেষ আবশ্যকতা দৃষ্ট হয় না আর ইহার উদ্দেশ্য অসম্পূর্ণ ; কেননা ঙঘকে চ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি করিয়া যদি ঘচকে ঘঙর সমান এবং চগ সংযুক্ত করা যায়, তাহা হইলে গঘঙ ত্রিভুজের দুই বাহুর ন্যায় চগঘ ত্রিভুজেরও গঘ এবং ঘচ বাহু কখগ ত্রিভুজের কখ ও কগ বাহুর সহিত সমানুপাতী হইবে ও সবর্গীয় বাহু গুলি পরস্পর সমান্তর হইবে ; কিন্তু অবশিষ্ট খগ বাহু অবশিষ্ট চগ বাহুর সহিত এক রেখাস্থ হইবে না। অতএব এই প্রতিজ্ঞাতে উল্লেখ করিতে হইবে যে, ত্রিভুজ দ্বয়ের ভূমি দুইটী, সমান্তর উভয় রেখার এক দিকে স্থাপিত করিতে হইবে।

৬ষ্ঠ, ৩৩। ইউক্লিড এ পর্য্যন্ত কোন স্থলে দুই সম কো
অপেক্ষা বৃহত্তর কোণের উল্লেখ করেন নাই ও তদ্বিষয়ে কিছুই
লেখেন নাই; এই প্রতিজ্ঞাতে তাহা প্রথম ব্যবহৃত হইল।

আবার এই প্রতিজ্ঞাতে পরিধি খণ্ড দ্বারা কোণ পরিমা
করিবার প্রথার সূত্রপাত হইল।

৬ষ্ঠ, খ—ঘ। খ, গ, ঘ এই তিন প্রতিজ্ঞা ইউক্লিডের রচি
নহে সিমসন সাহেব এই গুলি লিখিয়া দিয়াছেন. আলেক
জাণ্ডিয়া নগরের বিখ্যাত গণিতবেত্তা টলেমি স্বকৃত "আল্
মেজেষ্ট্" বা "বৃহৎ বিন্যাস" নামক গ্রন্থে ঘ প্রতিজ্ঞা লিখিয়া
ছিলেন।

১১শ অধ্যায়।

সংজ্ঞা।

১। যাহার দৈর্ঘ্য বিস্তার ও বেধ আছে, তাহাকে ন ক্ষেত্র বলে।

২। ঘন ক্ষেত্রের সীমার নাম পৃষ্ঠ বা তল।

৩। একটী সরল রেখা কোন সমতলস্থিত যে যে াখার সহিত সংলগ্ন হইতে পারে, যদি তাহা উহাদের ত্যেকের সহিত সম কোণ উৎপন্ন করে, তবে উহা সম- লের লম্ব হইবে বা তাহার সহিত সম কোণ উৎপন্ন রিবে।

৪। দুই সমতল পরস্পর ছেদ করিলে, তাহাদের াধারণ ছেদজ রেখার উপর এক সমতলে যদি কতকগুলি ম্ব রেখা টানা যায় ও ঐ সকল রেখা যদি অন্য সমতলের াম্ব হয়, তবে একটী সমতল অন্যটীর লম্ব হইবে।

৫। একটী সমতলের সহিত কোন সরল রেখা সংলগ্ন ইলে যদি রেখাস্থ কোন বিন্দু হইতে সমতলের উপর াম্ব পাত করা যায় এবং সমতলস্থ দুই সম্পাত বিন্দু যোগ রিয়া দেওয়া যায়, তবে এই যোজক রেখার ও প্রথমোক্ত

রেখার অন্তর্গত সূক্ষ্ম কোণকে সমতলের উপর প্রথম রেখার অবনতি বলে।

৬। দুই সমতল পরস্পর ছেদ করিলে তাহাদের সাধারণ ছেদজ রেখার উপর একই বিন্দু হইতে এক একটী করিয়া দুই সমতল দিয়া দুইটী লম্ব টানিলে, এই লম্ব দ্বয়ের মধ্যে যে সূক্ষ্ম কোণ উৎপন্ন হয় তাহাকে এক সমতলের উপর অপর সমতলের অবনতি বলে।

৭। দুই সমতলের পূর্ব্বোক্তরূপ অবনতি কোণ অন্য দুই সমতলের অবনতি কোণের সমান হইলে, প্রথম দুই সমতল অন্য দুই সমতলের একাবনত বা সমাবনত বলে।

৮। যে সকল সমতলকে বর্দ্ধিত করিলেও পরস্পর সংলগ্ন হয় না তাহাদিগকে সমান্তর সমতল বলে।

৯। ভিন্ন ভিন্ন সমতলস্থ দুইএর অধিক সামতলিক কোণ একবিন্দুতে সম্মিলিত হইলে যে কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাকে ঘনকোণ বলে।

১০। সমান সমান, সমসংখ্যক ও সদৃশ সমতল গুলি দ্বারা পরিবেষ্টিত ক্ষেত্র সকল পরস্পর সমান ও সদৃশ হইয়া থাকে। (পরিশিষ্ট দেখ।)

১১। যে সকল ঘনক্ষেত্র সমসংখ্যক সদৃশ সমতল দ্বারা পরিবেষ্টিত ও যাহাদিগের ঘনকোণ গুলি যথাক্রমে পরস্পর সমান, সেই সকল ঘনক্ষেত্র পরস্পর সদৃশ।

১২। কোন সমতলের উপর স্থাপিত ও তাহার ঊর্দ্ধস্থিত কোন এক বিন্দুতে মিলিত অন্য কতিপয় সমতল দ্বারা উৎপন্ন ঘনক্ষেত্রের নাম সূচি।

১৩। যে ঘনক্ষেত্রর সীমাস্থ সমতল সকলের মধ্যে যে দুইটী সম্মুখীন, তাহারা পরস্পর সমান, সদৃশ ও সমান্তর হইলে এবং অপর সমতল গুলি প্রত্যেকে সমান্তর ক্ষেত্র হইলে, তাহাকে ছেদিত ঘনক্ষেত্র বা প্রিজম্ * বলে।

১৪। ব্যাসকে স্থির রাখিয়া তাহার চতুর্দ্দিক দিয়া অর্দ্ধবৃত্তকে ভ্রমিত করিলে যে ঘনক্ষেত্র উৎপন্ন হয়, তাহার নাম বর্ত্তুল।

১৫। যে স্থির রেখার চতুর্দ্দিক দিয়া অর্দ্ধবৃত্ত ভ্রমিত হয়, তাহার নাম বর্ত্তুল শলাকা।

১৬। যে বিন্দু ঐ অর্দ্ধবৃত্তের কেন্দ্র, তাহাই বর্ত্তুলের কেন্দ্র।

১৭। বর্ত্তুলের কেন্দ্রদিয়া উভয়দিকে পৃষ্ঠদেশ পর্য্যন্ত বিস্তৃত সরল রেখাকে উহার ব্যাস বলে।

১৮। কোন সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের পার্শ্ববর্ত্তী দুই বাহুর একটীকে স্থির রাখিয়া তাহার চতুর্দ্দিক দিয়া ত্রিভুজটীকে ঘূর্ণিত করিলে যে ঘনক্ষেত্র উৎপন্ন হয়, তাহাকে বৃত্তসূচী বলে।

স্থির ভাবাপন্ন বাহুটী সমকোণের পার্শ্বস্থ অন্য বাহুর মান হইলে বৃত্তসূচীকে সমকোণী বৃত্তসূচী, ক্ষুদ্রতর

---

* Gr. *Prisma*; from *Prim* to cut, to saw.

যস্য স্থূল পদার্থস্য পার্শ্বদ্বয় ধরাতলং সমানং সমানান্তরঞ্চ বর্ত্তি এবং তদিতর পার্শ্ব ধরাতলানি সমানান্তর চতুর্ভুজ রূপাণি বর্ত্তন্তি তৎ ছেদিত ঘনক্ষেত্রং ভবতি।

যোগধ্যান কৃতা ক্ষেত্রতত্ত্ব দীপিকা।

হইলে স্থূলকোণী বৃত্তসূচী এবং বৃহত্তর হইলে সূক্ষ্মকোণী বৃত্তসূচী বলে।

১৯। যে স্থির ভাবাপন্ন রেখাকে ত্রিভুজটী পরিবেষ্টন করে, তাহার নাম বৃত্তসূচী শালাকা।

২০। সমকোণের পার্শ্বস্থ ঘূর্ণিত বাহু দ্বারা যে বৃত্ত উৎপন্ন হয়, তাহাকে বৃত্তসূচীর ভূমি বা তল বলে।

২১। কোন সমকোণী সমান্তর ক্ষেত্রের একটী বাহু স্থির রাখিয়া তাহার চতুর্দ্দিক দিয়া ক্ষেত্রটীকে ঘুরাইলে যে ঘনক্ষেত্র উৎপন্ন হয়, তাহার নাম স্তম্ভ।

২২। যে স্থির রেখাকে সমান্তর ক্ষেত্রটী পরিবেষ্টন করে, তাহার নাম স্তম্ভ শলাকা।

২৩। সমান্তর ক্ষেত্রের ঘূর্ণমান দুই সম্মুখীন বাহুদ্বারা যে দুই বৃত্ত উৎপন্ন হয়, তাহাদিগকে স্তম্ভের ভূমি বা তল বলে।

২৪। যে সকল বৃত্তসূচীর শলাকা ও ভূমির ব্যাস সমানুপাতী, তাহাদিগকে সদৃশ বৃত্তসূচী এবং যে সকল স্তম্ভের শলাকা ও ভূমির ব্যাস সমানুপাতী, তাহাদিগকে সদৃশ স্তম্ভ বলে।

২৫। যে ঘনক্ষেত্র ছয়টী সমান চতুর্ভুজদ্বারা পরিবেষ্টিত তাহাকে সমচতুর্ভুজিক ঘনক্ষেত্র বলে।

২৬। যে ঘনক্ষেত্র চারিটী সমান সমবাহু ত্রিভুজ দ্বারা পরিবেষ্টিত তাহাকে চতুর্ভূমিক * ঘনক্ষেত্র বলে।

---

* Tetrahedron, from the Gr. *tetra* four, and *edra* a ba

২৭। যে ঘনক্ষেত্র আটটী সমান সমবাহু ত্রিভুজ দ্বারা পরিবেষ্টিত তাহাকে অষ্টভুমিক ঘনক্ষেত্র বলে।

২৮। যে ঘনক্ষেত্র বারটী সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চভুজ দ্বারা পরিবেষ্টিত তাহাকে দ্বাদশ ভুমিক ঘনক্ষেত্র বলে।

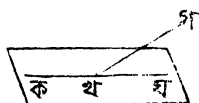
২৯। যে ঘনক্ষেত্র কুড়িটী সমবাহু ত্রিভুজ দ্বারা পরিবেষ্টিত তাহাকে বিংশতি ভুমিক ঘনক্ষেত্র বলে।

(ক) যে ঘনক্ষেত্র এরূপ ছয় চতুর্ভুজ দ্বারা পরিবেষ্টিত, যে তাহাদের মধ্যে সম্মুখীন দুইটী দুইটী চতুর্ভুজ সমান্তর, তাহাকে সমান্তর ভুমিক ঘনক্ষেত্র বলে।

১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন সরল রেখার এক অংশ একটী সমতলে ও অন্য অংশ তাহাকে ছাড়িয়া বাহিরে থাকিতে পারে না।

যদি সম্ভব হয়, তবে কখগ রেখার কখ অংশ একটী সমতলে ও খগ অংশ যেন তাহার বাহিরে অবস্থিত হইল।

পরে, কখ সরল রেখা এই সমতলে অবস্থিত হইয়াছে বলিয়া, উহাকে ঐ সমতলে বর্দ্ধিত করিতে পারা যায়; ঘ বিন্দু পর্য্যন্ত যেন ইহা বর্দ্ধিত হইল।

এক্ষণে যে কোন একটী সমতল লও; এবং উহাকে কঘ রেখার সহিত মিলিত করিয়া যতক্ষণ না উহা গ বিন্দুর সহিত সংলগ্ন হয় ততক্ষণ কঘএর চতুর্দ্দিক দিয়া ঘুরাইতে থাক।

পরে, খ ও গ বিন্দু এই সমতলস্থ হওয়াতে,
খগ রেখা ইহাতে থাকিবে; [১ম, সং ৭।
সুতরাং কখগ ও কখঘ এই দুই সরল রেখার এক এক খণ্ড কখ মিলিত হইয়া একই সমতলে অবস্থিত হইল; কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব। [১ম, ১১, অনু।
অতএব এক সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞা—১। প্রতিপন্ন করিতে হইবে যে অসংখ্য সমতল কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা দিয়া যাইতে পারে।

২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে এক সমতলে থাকিবে; আর তিন সরল রেখা পরস্পর সংলগ্ন হইলে এক সমতলে থাকিবে।

কখ ও গঘ সরল রেখা যেন পরস্পর ঙ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে; তাহা হইলে কখ ও গঘ এক সমতলে থাকিবে; আর ঙগ, গখ, ও খঙ এই তিনটী সরল রেখা পরস্পর সংলগ্ন হইয়াছে; ইহারাও এক সমতলে থাকিবে।

ঙখ রেখার সহিত একটী সমতল সম্মিলিত কর এবং এই সমতলকে বা আবশ্যক হইলে, ইহাকে বর্দ্ধিত করিয়া, যতক্ষণ না ইহা গ বিন্দু সংস্পর্শ করে, ততক্ষণ ঙখএর চতুর্দ্দিক দিয়া ঘুরাইতে থাক।

পরে ঙ ও গ বিন্দু এই সমতলস্থ হইয়াছে বলিয়া, ঙগ রেখা ইহাতে থাকিবে; [১ম, সং ৭।
এই কারণে, খগও এই সমতলে থাকিবে;
আর ঙখ যে ইহাতে আছে, তাহা কল্পিত হইয়াছে।
সুতরাং ঙগ, গখ ও খঙ এই তিন সরল রেখা এক সমতলস্থ হইয়াছে;
আর ঙখ ও ঙগ যে সমতলে আছে কখ ও গঘ সেই সমতলে থাকিবে; [১১শ, ১।
সুতরাং কখ ও গঘ এক সমতলে থাকিবে।
অতএব দুই সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অাঃ প্রঃ—২। কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে এক নির্দ্দিষ্ট সমতল পর্য্যন্ত সমান সমান দুইটী সরল রেখা টানিলে তাহারা সমতলের উপর সমাবনত হইবে।

৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই সমতল পরস্পর কর্ত্তন করিলে তাহাদের সাধারণ ছেদ, একটী সরল রেখা হইবে।

কখ ও খগ দুই সমতল যেন পরস্পর ছেদ করিয়াছে এবং খঘ যেন তাহাদের সাধারণ ছেদজ; খঘ একটী সরল রেখা হইবে।

যদি না হয়, খ হইতে ঘ পর্য্যন্ত কখ সমতলে খঙঘ সরল রেখা এবং খগ সমতলে খচঘ সরল রেখা টান; [স্বীঃ ১।

তাহা হইলে খঙঘ ও খচঘ এই দুই সরল রেখার এক এক দিকের প্রান্তদ্বয় মিলিত হওয়াতে,

তাহারা মধ্যস্থ স্থান পরিবেষ্টন করিয়াছে;

কিন্তু এরূপ পরিবেষ্টন করা অসম্ভব। [স্বতঃ ১০।

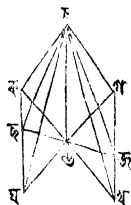
সুতরাং সমতল দ্বয়ের সাধারণ ছেদজ খঘ এক সরল রেখা ব্যতীত কিছুই হইতে পারে না।

অতএব দুই সমতল ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৩। দুই সমতলের একাধিক ছেদজ রেখা হইতে পারে না।

৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই সরল সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে ছেদজ বিন্দুতে অন্য এক সরল রেখা দণ্ডায়মান হইয়া যদি উভয়ের সহিত সমকোণ করে, তবে প্রথমোক্ত দুই সরল রেখা যে সমতলে থাকিবে, দণ্ডায়মান সরল রেখা তাহার সহিতও সমকোণ করিবে।

কখ ও গঘএর ছেদজ বিন্দু ঙতে, ঙচ সরল রেখা দণ্ডায়মান হইয়া যেন উভয়ের সহিত সম কোণ করিয়াছে; তাহা হইলে কখ ও গঘ যে সমতলে থাকিবে, ঙচ সরল রেখা, তাহার সহিতও সম কোণ করিবে।

কঙ, ঙখ, গঙ ও ঙঘ এই চারি রেখা পরস্পর সমান কর; কঘ ও গখ সংযুক্ত কর; কখ ও গঘ যে সমতলস্থ হইয়াছে, ঙ বিন্দু দিয়া তাহাতে এক সরল রেখা টান; উহা যেন কঘকে ছ বিন্দুতে ও গখকে জ বিন্দুতে ছেদ করিল; এবং ঙচ রেখার চ বিন্দু হইতে চক, চছ, চঘ, চগ, চজ ও চখ রেখা টান।

পরে, কঙ ও ঙঘ দুই বাহু খঙ ও ঙগ দুই বাহুর সহিত যথাক্রমে সমান হওয়াতে, [অঙ্কন।

এবং তাহাদের অন্তর্গত কঙঘ ও গঙখ কোণ পরস্পর সমান বলিয়া, [১ম, ১৫।

কঘ ভূমি খগ ভূমির সমান এবং ঘকঙ কোণ ঙখগ কোণের সমান; [১ম, ৪।

ও কঙছ কোণ খঙজ কোণের সমান হওয়াতে, [১ম, ১৫।

কঙছ ও খঙজ ত্রিভুজ দ্বয়ের একের দুই কোণ যথাক্রমে অন্যের দুই কোণের সমান;

এবং সমান সমান কোণের সংলগ্ন ঙক ও ঙখ বাহু

পরস্পর সমান হওয়ায়, [অঙ্কন
ঙছ, ঙজএর সমান ও কছ, খজএর সমান। [১ম, ২৬
আবার ঙক, ঙখএর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন
এবং ঙচ সাধারণ বাহু তাহাদের উভয়ের সহিত স
কোণ করিয়াছে বলিয়া, [কল্পনা
কচ ভূমি খচ ভূমির সমান। [১ম, ৪
এই কারণে, গচ, ঘচএর সমান ;
আর প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, ঘক ও কচ বাহু ক্রমে গ
ও খচ বাহুর সমান,
ও ঘচ ভূমি গচ ভূমির সমান ;
এই হেতু ঘকচ কোণ গখচ কোণের সমান। [১ম, ৮
পুনরায়, প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, চক ও কছ দুই ভু
ক্রমে চখ ও খজ দুই ভুজের সমান,
এবং চকছ কোণ চখজ কোণের সমান ;
অতএব চছ ভূমি চজ ভূমির সমান। [১ম, ৪
পরিশেষে, ছঙ, জঙর সমান প্রতিপন্ন হইয়াছে বলিয়া
ও ঙচ রেখা, চঙছ ও চঙজ এই দুই ত্রিভুজের সাধার
বাহু হওয়াতে,
আর চছ ভূমি চজ ভূমির সমান উপপন্ন হওয়ায়,
চঙছ কোণ চঙজ কোণের সমান ; [১ম, ৮।
অতএব এই দুইটী কোণের প্রত্যেকেই সম কোণ।
[১ম, সং ১০।

এইরূপে উপপন্ন হইবে যে, কখ ও গঘ যে সমতলস্থ হই-
য়াছে, তাহাতে অঙ্কিত যত গুলি রেখা ঙচএর সহিত

সংলগ্ন হইবে প্রত্যেকের সহিত ঙচ সম কোণ করিবে।

সুতরাং ঙচ রেখা কখ ও গঘএর আধার সমতলের সহিত সম কোণ করিয়াছে।

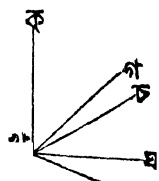
অতএব দুই সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৪। কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে এক সমতল পর্য্যন্ত যতগুলি রেখা টানা যাইতে পারে, তন্মধ্যে সমতলের উপর যেটী লম্ব হইবে, সেইটী সর্ব্বাপেক্ষা ক্ষুদ্রতম।

৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

তিন সরল রেখা যদি এক বিন্দুতে সংলগ্ন হয় এবং ইহাদের প্রত্যেকের সহিত সমকোণ করিয়া যদি ঐ বিন্দুতে অন্য এক সরল রেখা দণ্ডায়মান হয়, তবে প্রথমোক্ত তিন রেখা একই সমতলে থাকিবে।

খগ, খঘ ও খঙ এই তিন সরল রেখা যেন খ বিন্দুতে সংলগ্ন হইয়াছে এবং তাহাদের প্রত্যেকের সহিত সম কোণ করিয়া এই বিন্দুতে খক রেখা দণ্ডায়মান হইয়াছে; তাহা হইলে খগ, খঘ ও খঙ এক সমতলে থাকিবে।

যদি না থাকে, তবে খঘ ও খঙ এক সমতলে ও খগ যেন তাহার বাহিরে অবস্থিত হইল; খক ও খগ রেখা দ্বয়ের সহিত সম্পূর্ণ রূপে মিলিত হয় এরূপ এক সমতল কল্পনা কর; তাহা হইলে এই সমতলের এবং খঘ ও খঙ রেখা দ্বয়ের আধার সমতলের পরস্পর সম্পাতদ্বারা একটী সরল রেখা

উৎপন্ন হইবে ; [১১শ, ৩।

খচ যেন সেই সম্পাত রেখা।

তাহা হইলে কখ ও খগ যে সমতলস্থ, কখ, খগ ও খচ এই তিন রেখা সেই সমতলস্থ বলিতে হইবে।

এক্ষণে খঘ ও খঙ এই উভয়ের সহিত খক রেখা সমকোণ করাতে, [কল্পনা।

তাহাদের আধার সমতলের সহিত উহা সম কোণ করিবে [১১শ, ৪

ও তন্নিমিত্ত ঐ সমতলে যে যে রেখার সহিত উহা সংলগ্ন হইবে তাহাদের প্রত্যেকের সহিত সম কোণ করিবে ; [১১শ, সং ৩

তাহা হইলে খচ রেখা এই সমতলে থাকাতে ও কখএর সহিত সংলগ্ন হওয়াতে,

কখচ কোণ এক সম কোণ হইবে ;

কিন্তু কল্পিত হইয়াছে যে কখগ এক সম কোণ।

এই হেতু কখগ কোণ কখচ কোণের সমান ; [স্বতঃ ১১

এবং তাহারা এক সমতলস্থিত ; অতএব এরূপ হওয়া অসম্ভব। [স্বতঃ ৯

এই হেতু খঘ ও খঙ যে সমতলে আছে, খগ রেখা তাহার বাহিরে থাকিতে পারে না।

সুতরাং খগ, খঘ, খঙ এই তিন রেখা একই সমতলে থাকিবে।

অতএব তিন সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহা উপপাদ্য।

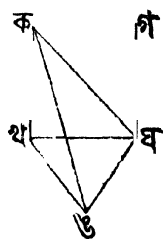
অঃ প্রঃ—৫। প্রতিপন্ন কর যে এক বিন্দুতে সংলগ্ন তিন রেখা পরস্পর লম্ব ভাবাপন্ন হইলে তাহাদের প্রত্যেকের সহিত সম কোণ করিয়া অন্য একটী রেখা টানা যায় না।

৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই সরল রেখা কোন সমতলের সহিত সম কোণ করিলে পরস্পর সমান্তর হইবে।

কখ ও গঘ এই দুই সরল রেখা যেন একই সমতলের সহিত সম কোণ করিতেছে; তাহা হইলে, কখ ও গঘ পরস্পর সমান্তর হইবে।

তাহারা যেন খ ও ঘ বিন্দুতে সমতলে সংলগ্ন হইল; খঘ সংযুক্ত কর; এবং খঘএর সহিত সম কোণ করিয়া এই সমতলে ঘঙ রেখা টান; [১ম, ১১। ঘঙকে কখএর সমান কর; [১ম, ৩। এবং খঙ, কঙ ও কঘ সংযুক্ত কর।

ক গ খ ঘ ঙ

পরে, কখ রেখা সমতলের লম্ব হওয়াতে, [কল্পনা। উহা সমতলস্থিত যে যে রেখার সহিত সংলগ্ন হইয়াছে, তাহাদের প্রত্যেকের সহিত সম কোণ করিবে।

[১১শ, সং ৩।

অতএব এখানে খঘ ও খঙ উভয়ের সহিত কখ সংলগ্ন হওয়াতে;

কখঘ কোণ ও কখঙ কোণ প্রত্যেকে এক এক সম কোণ।

এই কারণে, গঘখ কোণ ও গঘঙ কোণ প্রত্যেকে এক এক সম কোণ।

আর কখ, ঙঘএর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন।
এবং কখঘ ও ঙঘখ ত্রিভুজ দ্বয়ের খঘ সাধারণ ভুজ হইয়াছে বলিয়া,
কখ ও খঘ দুই বাহু যথাক্রমে ঙঘ ও ঘখ দুই বাহুর সমান;
আর কখঘ ও ঙঘখ কোণ প্রত্যেকে সম কোণ হওয়াতে পরস্পর সমান; [স্বতঃ ১১।
এই হেতু কঘ ভূমি ঙখ ভূমির সমান। [১ম, ৪।

আবার, কখ রেখা ঙঘএর সমান বলিয়া, [কল্পনা।
ও খঙ রেখা ঘকএর সমান প্রতিপন্ন হওয়াতে,
কখ ও খঙ দুই বাহু যথাক্রমে ঙঘ ও ঘক দুই বাহুর সমান;
আর কঙ রেখা, কখঙ ও ঙঘক ত্রিভুজ দ্বয়ের সাধারণ ভূমি;
অতএব কখঙ কোণ ঙঘক কোণের সমান। [১ম, ৮।
এই দুই কোণের মধ্যে কখঙ এক সম কোণ,
সুতরাং ঙঘক কোণ এক সম কোণ,
অর্থাৎ ঙঘ রেখা কঘএর সহিত সম কোণ করিতেছে;
আর ঙঘ রেখা খঘ ও গঘ এই উভয়ের সহিত সম কোণ করিয়াছে,
অতএব খঘ, কঘ ও গঘ এই তিন রেখা যে বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে, তথায় ঘঙ দণ্ডায়মান হইয়া প্রত্যেকের সহিত সম কোণ করিতেছে;

এই হেতু ঐ তিন রেখা একই সমতলে থাকিবে; [১১শ, ৫।
আর খঘ ও ঘক যে সমতলে আছে, কখও সেই সমতলে আছে; [১১শ, ২।
অতএব কখ, খঘ ও গঘ একই সমতলস্থ হইয়াছে;
এবং কখঘ ও খঘগ এই উভয় কোণই সম কোণ;
সুতরাং কখ ও গঘ পরস্পর সমান্তর। [১ম, ২৮।
অতএব দুই সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

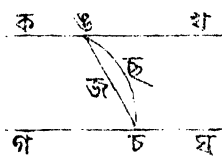
অঃ প্রঃ—৬। প্রতিপন্ন কর যে, সমকোণী সমান্তর ভূমিক ঘন ক্ষেত্রের দুইটী দুইটী সম্মুখীন অশ্রি পরস্পর সমান্তর হইবে।

৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই সমান্তর সরল রেখার মধ্যে যদি একটীর কোন বিন্দু অন্যের কোন বিন্দুর সহিত সংযুক্ত করা যায় তবে সমান্তর দুই রেখা ও বিন্দু দ্বয় সংযোজক সরল রেখা, একই সমতলে থাকিবে।

কখ ও গঘ যেন দুই সমান্তর সরল রেখা; তন্মধ্যে একটীতে ঙ বিন্দু ও অন্যটী-তে চ বিন্দু কল্পনা কর;

ক ঙ খ
ছ
জ
গ চ ঘ

তাঁহা হইলে সমান্তর রেখা দ্বয় যে সমতলস্থ ঙ ও চ সংযোজক সরল রেখাও সেই সমতলে থাকিবে।

যদি না থাকে, তবে যেন উহা ঙছচএর ন্যায় সমতলের বাহিরে অবস্থিত হইল। কখ ও গঘ সমান্তর রেখা দ্বয়ের আধার কখগঘ সমতলে ঙ হইতে চ পর্য্যন্ত ঙজচ রেখা টান।

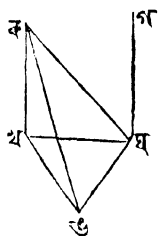
পরে, ঙছচও একটী সরল রেখা হওয়াতে,
ঙছচ ও ঙজচ এই দুই সরল রেখা একটী ক্ষেত্র পরিবেষ্টন করিতেছে;
কিন্তু এরূপ পরিবেষ্টন করা অসম্ভব; [স্বতঃ ১০।
অতএব ঙ ও চ সংযোজক রেখা কখ ও গঘ সমান্তর রেখা দ্বয়ের আধার সমতলের বাহিরে থাকিতে পারে না;
সুতরাং উহা ঐ সমতলেই থাকিবে।
অতএব দুই সমান্তর ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৭। দুই সমান্তর সরল রেখার আধার সমতল ব্যতীত অন্য কোন সমতল উহাদের একটীর সহিত মিলিত করিলে, তাহা অন্য রেখার সমান্তর হইবে।

৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই সমান্তর সরল রেখার মধ্যে যদি একটী কোন সমতলের সহিত সম কোণ করে, তবে অন্যটীও সেই সমতলের সহিত সম কোণ করিবে।

কখ ও গঘ যেন দুই সমান্তর সরল রেখা; তন্মধ্যে কখ যেন কোন সমতলের সহিত সম কোণ করিয়াছে; গঘও ঐ সমতলের সহিত সম কোণ করিবে।

কখ ও গঘ যেন খ ও ঘ বিন্দুতে সমতলের সহিত সংলগ্ন হইল ; খঘ সংযুক্ত কর ; তাহা হইলে কখ, গঘ ও খঘ একই সমতলস্থ হইবে। [১১শ, ৭।

যে সমতলের সহিত কখ সম কোণ করিয়াছে, খঘএর সহিত সমকোণ করিয়া সেই সমতলে ঘঙ রেখা টান ; [১ম, ১১।
ঘঙকে কখ এর সমান কর ; [১ম, ৩।
এবং খঙ, কঙ ও কঘ সংযুক্ত কর।

পরে, কখ রেখা সমতলের সহিত সম কোণ করাতে, [কল্পনা।
সমতলস্থ যে যে রেখা ইহাকে সংস্পর্শ করিতেছে তাহাদের প্রত্যেকের সহিত ইহা সম কোণ করিবে ; [১১শ, সং ৩।
এই হেতু কখঘ ও কখঙ উভয়েই এক এক সমকোণ ;
আর, কখ ও গঘ সমান্তর রেখা দ্বয়ের সহিত খঘ রেখা সংলগ্ন হওরাতে,
কখঘ ও গঘখ কোণ দ্বয় একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান ; [১ম, ২৯।
তন্মধ্যে কখঘ কোণ এক সম কোণ ; [কল্পনা।
অতএব গঘখ কোণ এক সম কোণ, অর্থাৎ গঘ রেখা খঘএর লম্ব।

আবার, কখ রেখা ঙঘএর সমান বলিয়া, [অঙ্কন।

এবং কখঘ ও ঙঘখ ত্রিভুজের খঘ সামান্য বাহু হওয়াতে,
কখ ও খঘ বাহু দ্বয় যথাক্রমে ঙঘ ও ঘখ বাহু দ্বয়ের সমান;
আর কখঘ ও ঙঘখ উভয়েই এক এক সম কোণ হওয়াতে পরস্পর সমান; [স্বতঃ ১১।
অতএব কঘ ভুমি ঙখ ভুমির সমান। [১ম, ৪।

পুনরায়, কখ রেখা ঙঘএর সমান বলিয়া, [অঙ্কন।
এবং খঙ, ঘকএর সমান প্রতিপন্ন হইয়াতে,
কখ ও খঙ দুই বাহু যথাক্রমে ঙঘ ও ঘক দুই বাহুর সমান;
আর কঙ রেখা কখঙ ও ঙঘক ত্রিভুজ দ্বয়ের সাধারণ ভুমি;
এই হেতু কখঙ কোণ কঘঙ কোণের সমান; [১ম, ৮।
তন্মধ্যে কখঙ কোণ ও এক সম কোণ;
অতএব কঘঙ কোণ এক সম কোণ, অর্থাৎ ঙঘ রেখা কঘএর লম্ব;

আবার ঙঘ রেখা খঘএরও লম্ব বলিয়া, [অঙ্কন।
ঙঘ রেখা খঘ ও ঘকএর আধার সমতলের লম্ব হইল;
[১১শ, ৪।
এবং উহা ঐ সমতলস্থ যে যে রেখার সহিত সংলগ্ন হইবে, প্রত্যেকের সহিত সম কোণ করিবে। [১১, সং ৩।
গঘ রেখা খঘ ও ঘকএর আধার সমতলে স্থাপিত হইয়াছে, কেননা কখ ও গঘ সমান্তর রেখা দ্বয় যে সমতলস্থ

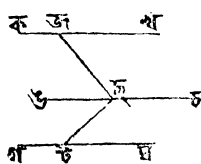
ঐ তিন রেখাই সেই সমতলে থাকিবে ;
অতএব ঙঘ রেখা, গঘএর সহিত সম কোণ করিয়াছে,
অর্থাৎ গঘ, ঙঘএর সহিত সম কোণ করিয়াছে ;
আবার উপপন্ন হইয়াছে যে, গঘ, খঘএর সহিত সম কোণ করিয়াছে ,
অতএব গঘ রেখা ঘ বিন্দুতে খঘ ও ঙঘ এই উভয় রেখার সহিত সম কোণ করিয়াছে ;
এজন্য ইহা খঘ ও ঙঘএর আধার সমতলের সহিত সম কোণ করিবে, [১১শ, ৪।
অর্থাৎ কখ রেখা যে সমতলের সহিত সম কোণ করিয়াছে, গঘও সেই সম তলের সহিত সমকোণ করিবে।
অতএব দুই সমান্তর সরল রেখার মধ্যে ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৮। ছেদিত ঘনক্ষেত্রের অগ্রি গুলি পরস্পর সমান্তর।

৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই সরল রেখা প্রত্যেকে ভিন্ন সমতলস্থিত অন্য এক সরল রেখার সমান্তর হইলে, পরস্পর সমান্তর হইবে।

. কখ ও গঘ প্রত্যেকেই যেন ভিন্ন সমতলস্থ ঙচ রেখার সমান্তর হইয়াছে ; তাহা হইলে কখ রেখা গঘএর সমান্তর হইবে।

ঙচ রেখায় ছ বিন্দু কল্পনা কর; কখ ও ঙচএর আধার সমতলে ঙচএর সহিত সম কোণ করিয়া ছ বিন্দু হইতে ছজ রেখা টান; এবং ঙচ এবং গঘএর আধার সমতলে ঙচএর সহিত সম কোণ করিয়া ছ বিন্দু হইতে ছট রেখা টান। [১ম, ১১।

পরে, ঙচ রেখা ছজ ও ছট এই উভয়ের সহিত সম কোণ করিয়াছে বলিয়া, [অঙ্কন।

ঙচ এই দুই রেখার আধার জছট সমতলের সহিত সম কোণ করিবে; [১১শ, ৪।

আর কখ রেখা ঙচএর সমান্তর; [কল্পনা।

অতএব কখ রেখা জছট সমতলের সহিত সম কোণ করিয়াছে। [১১শ, ৮।

এই কারণে, গয রেখা জছট সমতলের সহিত সম কোণ করিয়াছে।

অতএব কখ ও গঘ প্রত্যেকেই জছট সমতলের সহিত সম কোণ করিয়াছে;

আবার দুই সরল রেখা কোন সমতলের সহিত সম কোণ করিলে পরস্পর সমান্তর হয়; [১১শ, ৬

সুতরাং কখ রেখা গঘএর সমান্তর।

অতএব দুই সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য

অঃ প্রঃ—৯। সমান্তর দুই রেখার সমান্তর একটী সমতল এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া অঙ্কিত করিতে হইবে।

১০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

পরস্পর সংলগ্ন রেখা দ্বয় যথাক্রমে ভিন্ন সমতলস্থ আর দুইটী পরস্পর সংলগ্ন রেখার সমান্তর হইলে প্রথম দুইটী রেখার অন্তর্গত কোণ, অন্য দুইটীর অন্তর্গত কোণের সমান হইবে।

কখ ও খগ পরস্পর সংলগ্ন রেখা দ্বয় যথাক্রমে যেন ভিন্ন সমতলস্থ ঘঙ ও ঙচ আর দুইটী সংলগ্ন রেখা দ্বয়ের সমান্তর হইয়াছে; তাহা হইলে, কখগ কোণ ঘঙচ কোণের সমান হইবে।

খক, খগ, ঙঘ ও ঙচ এই কয়টী রেখা পরস্পর সমান করিয়া লও এবং কঘ, খঙ, গচ, কগ ও ঘচ সংযুক্ত কর।

পরে, কখ রেখা ঘঙর সমান ও সমান্তর হওয়াতে,

কঘ, খঙর সমান ও সমান্তর। [১ম, ৩৩।

এই কারণে গচ, খঙর সমান ও সমান্তর;

অতএব কঘ ও গচ প্রত্যেকে খঙর সমান ও সমান্তর;

এই হেতু, কঘ রেখা গচএর সমান্তর, [১১শ, ৯।

আর কঘ, গচএর সমান; [স্বতঃ ১।

অতএব কগ, ঘচএর সমান ও সমান্তর। [১ম, ৩৩।

আবার কখ ও খগ যথাক্রমে ঘঙ ও ঙচএর সমান হওয়াতে,

আর কগ ভূমি ঘচ ভূমির সমান বলিয়া,

কখগ কোণ ঘঙচ কোণের সমান। [১ম, ৮

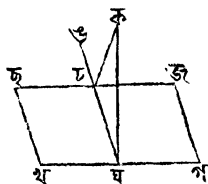
অতএব পরস্পর সংলগ্ন রেখা দ্বয় ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—১০। বিভিন্ন সমতলস্থ পরস্পর সমান ও সমান্তর তিন রেখার উভয় দিকের প্রান্ত বিন্দু গুলি পরস্পর সংযুক্ত করিলে, যে ত্রিভুজ দ্বয় হইবে তাহারা পরস্পর সমান ও তাহাদের দুইটী আধার সমতল পরস্পর সমান্তর হইবে।

১১ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দ্দিষ্ট সমতলের বহিস্থ এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে তাহার উপর একটী লম্ব পাত করিতে হইবে।

ক যেন খজ সমতলের বহিস্থ কোন বিন্দু; ক হইতে খজ সমতলের উপর একটী লম্ব পাত করিতে হইবে।

খজ সমতলে খগ সরল রেখা টান, এবং ক বিন্দু হইতে খগ রেখার উপর কঘ লম্ব টান। [১ম, ১২। তাহা হইলে যদি কঘ রেখা সমতলেরও লম্ব হয়, তবে

সম্পাদ্য লম্ব টানা হইল। যদি তাহা না হয়, তবে খগএর সহিত সমকোণ করিয়া খজ সমতলে ঘঙ রেখা টান, [১ম, ১১।

এবং ক বিন্দু হইতে ঘঙ রেখার উপর কচ লম্ব টান ;

[১ম, ১২।

কচ সম্পাদ্য লম্ব।

চ বিন্দু দিয়া খগএর সমান্তর ছজ রেখা টান।

[১ম, ৩১।

পরে, ঙঘ ও ঘক এই উভয় রেখার সহিত খগ সম কোণ করিয়াছে বলিয়া, [অঙ্কন।

খগ রেখা ঙঘ ও ঘকএর আধার সমতলের সহিত সম কোণ করিবে ; [১১শ, ৪।

আর ছজ রেখা খগএর সমান্তর বলিয়া, [অঙ্কন।

ছজও, ঙঘ এবং ঘকএর আধার সমতলের সহিত সম কোণ করিবে ; [১১শ, ৮।

অতএব ঐ সমতলস্থ যে যে রেখার সহিত ছজ সংলগ্ন হইবে, তাহাদের প্রত্যেকের সহিত উহা সম কোণ করিবে ;

[১১শ, সং ৩।

এখানে কচ রেখা এই সমতলস্থ হইয়াছে ও ছজএর সহিত সংলগ্ন হইয়াছে ; এই হেতু ছজ রেখা কচএর সহিত সম কোণ করিয়াছে, অর্থাৎ কচ রেখা ছজএর সহিত সম কোণ করিয়াছে।

আর কচ রেখা ঘঙর সহিতও সম কোণ করিয়াছে ; [অং।

অতএব ঘঙ ও ছজ, এই উভয় রেখার সহিত তাহাদের ছেদজ বিন্দুতে কচ রেখা সম কোণ করিতেছে ;

সুতরাং কচ রেখা ঘঙ ও ছজএর আধার সমতলের অর্থাৎ খজ সমতলের লম্ব হইয়াছে। [১১শ, ৪।

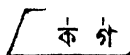
সুতরাং খজ সমতলের বহিস্থ ক বিন্দু হইতে উহার উপর কচ লম্ব পাতিত হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য

অঃ প্রঃ—১১। ঊর্দ্ধস্থিত কোন বিন্দু হইতে কোন সমতল পর্য্যন্ত সমান সমান দুইটী রেখা টানিতে হইবে।

১২ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দ্দিষ্ট সমতলের সহিত সম কোন করিয়া এক সরল রেখা সমতলস্থ এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে উত্তোলন করিতে হইবে।

ক যেন নির্দ্দিষ্ট সমতলস্থিত নির্দ্দিষ্ট বিন্দু; ক হইতে ঐ সমতলের সহিত সম কোণ করিয়া একটী রেখা উত্তোলন করিতে হইবে।

সমতলের বাহিরে খ বিন্দু কল্পনা করিয়া, তথা হইতে সমতলের উপর খগ লম্ব পাত কর; [১১শ, ১১।

এবং ক বিন্দু হইতে গখএর সমান্তর কঘ রেখা টান, [১ম, ৩১।

কঘ সম্পাদ্য লম্ব।

কঘ ও গখ পরস্পর সমান্তর হওয়াতে, [অঙ্কন।

এবং তন্মধ্যে একটী অর্থাৎ গখ রেখা নির্দ্দিষ্ট সমতলের সহিত সম কোণ করিয়াছে বলিয়া, [অঙ্কন।

অন্য রেখাটীও অর্থাৎ কঘ, সমতলের সহিত সম কোণ করিবে। [১১শ, ৮।

সুতরাং কোন নির্দ্দিষ্ট সমতলের এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে তাহার উপর একটী লম্ব উত্তোলন করা হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

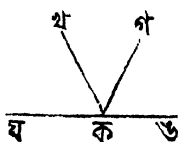
অঃ প্রঃ—১২। কোন সমতলে তিনটী বিন্দু নির্দ্দিষ্ট আছে; ঐ সমতলের ঊর্দ্ধে এমন এক বিন্দু স্থির করিতে হইবে, যেন তাহা নির্দ্দিষ্ট তিনটী বিন্দু হইতে সমদূরবর্ত্তী হয়।

১৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন সমতলস্থিত এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ সমতলের উপর ও এক দিকে দুইটী লম্ব উত্তোলন করা যাইতে পারে না; আর সমতলের বহিস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ সমতলের উপর একাধিক লম্ব পাত করা যায় না।

যদি সম্ভব হয়, তবে কোন সমতলের ক বিন্দু হইতে উহার একদিকে যেন কখ ও কগ দুইটী লম্ব উত্তোলিত হইল।

কখ ও কগএর সহিত মিলিত হয় এরূপ একটী সমতল কল্পনা করিলে তাহার ও নির্দ্দিষ্ট সমতলের সাধারণ ছেদজ একটী সরল রেখা হইবে;

খ গ
ঘ ক ঙ

[১১শ, ৩।

ঘঙ যেন সেই ছেদজ রেখা।

তাহা হইলে, কখ, কগ ও ঘকঙ এই তিন সরল রেখা

একই সমতলস্থ হইয়াছে ;

আর গক রেখা নির্দ্দিষ্ট সমতলের সহিত সম কোণ করাতে,

ঐ সমতলের যে যে রেখার সহিত উহা সংলগ্ন হইবে, প্রত্যেকের সহিত সম কোণ করিবে ; [১১শ, সং ৩।

এখানে ঘকঙ রেখা ঐ সমতলে আছে ও গকএর সহিত সংলগ্ন হইয়াছে ;

অতএব গকঙ কোণ এক সম কোণ।

এই কারণে, খকঙ কোণ এক সম কোণ।

অতএব গকঙ কোণ খকঙ কোণের সমান, [স্বতঃ ১১।

আর উহারা উভয়েই এক সমতলস্থ হইয়াছে ;

অতএব এরূপ হওয়া অসম্ভব। [স্বতঃ ৯।

অনন্তর, নির্দ্দিষ্ট সমতলের বহিস্থ কোন বিন্দু হইতে তাহার উপর একাধিক লম্ব পাত করা যায় না ;

কেননা, এরূপ দুই লম্ব টানিলে, তাহারা পরস্পর সমান্তর হইবে ; [১১শ, ৬।

সুতরাং এপ্রকার দুই লম্ব পাত করা অসাধ্য।

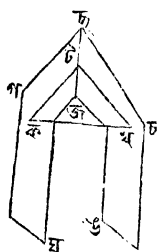
অতএব কোন সমতলস্থিত ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—১৩। একটী সরল রেখা ও তাহার বহিস্থ কোন বিন্দু উভয়েই একাধিক সমতলে থাকিতে পারে না।

১৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

একই সরল রেখা দুই সমতলের লম্ব হইলে, সেই দুই সমতল পরস্পর সমান্তর হইবে।

কখ রেখা যেন গঘ ও ঙচ এই দুই সমতলের লম্ব হইল; এই দুই সমতল পরস্পর সমান্তর হইবে।

যদি সমান্তর না হয়, তবে বর্দ্ধিত করিলে অবশ্যই তাহারা সংলগ্ন হইবে; তাহারা যেন সংলগ্ন হইল, তাহা হইলে তাহাদের ছেদ একটী সরল রেখা হইবে;

ছজ যেন সেই সরল রেখা; ইহাতে ট বিন্দু কল্পনা কর, এবং টক ও টখ সংযুক্ত কর।

পরে, কখ রেখা, ঙচএর লম্ব হওয়াতে, [কল্পনা
ঙচ সমতলস্থিত খট রেখারও লম্ব হইবে; [১১শ, সং ৩।
এই হেতু কখট কোণ এক সম কোণ।
এই কারণে, খকট কোণও এক সম কোণ।
অতএব টকখ ত্রিভুজের কখট ও খকট এই দুই কোণ দুই সম কোণের সমান;
কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব। [১ম, ১৭।
সুতরাং গঘ ও ঙচ সমতল দ্বয় বর্দ্ধিত হইলেও পরস্পর সংলগ্ন হইবে না,

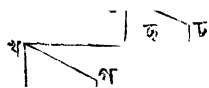
অর্থাৎ তাহারা পরস্পর সমান্তর। [১১শ, সং ৮।
অতএব একই সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—১৪। যে যে সমতল অন্য এক সমতলের সমান্তর তাহারা পরস্পর সমান্তর।

১৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

পরস্পর সংযুক্ত দুই রেখা যথাক্রমে যদি ভিন্ন সমতলস্থিত পরস্পর সংযুক্ত অন্য দুই রেখার সমান্তর হয়, তবে প্রথম দুই রেখার আধার সমতল অন্য দুই রেখার আধার সমতলের সমান্তর হইবে।

পরস্পর সংযুক্ত কখ ও খগ রেখা যথাক্রমে যেন ভিন্ন সমতলস্থিত ঘঙ ও ঙচ রেখার সমান্তর হইয়াছে; তাহা হইলে কখ ও খগএর আধার সমতল, ঘঙ ও ঙচএর আধার সমতলের সমান্তর হইবে

খ বিন্দু হইতে ঙঘ ও ঙচএর আধার সমতলের উপর খছ লম্ব পাত কর, [১১শ, ১১।

উহা যেন ছ বিন্দুতে ঐ সমতলের সহিত সংলগ্ন হইল; ছ বিন্দু দিয়া ঙঘএর সমান্তর ছজ এবং ঙচএর সমান্তর ছট রেখা টান।
[১ম, ৩১।

পরে, খছ রেখা ঘঙ ও ঙচএর আধার সমতলের লম্ব হওয়াতে, [অঙ্কন।
উহা ঐ সমতলস্থ যে যে রেখার সহিত সংলগ্ন হইবে তাহাদের প্রত্যেকের সহিত সম কোণ করিবে ;
[১১শ, সং ৩।
এখানে ছজ ও ছট ঐ সমতলস্থ ও খছ লম্বের সহিত সংলগ্ন হইয়াছে ; এই হেতু, খছজ ও খছট উভয়েই এক এক সম কোণ।

এক্ষণে, খক রেখা ঙঘএর সমান্তর হওয়াতে, [কল্পনা।
আর ছজ রেখা ঙঘএর সমান্তর বলিয়া, [অঙ্কন।
খক রেখা ছজএর সমান্তর ; [১১শ, ৯।
অতএব কখছ কোণ ও খছজ কোণ একত্র যোগে দুই সমকোণের সমান ; [১ম, ২৯।
এবং তন্মধ্যে খছজ কোণ যে এক সম কোণ, তাহা উপপন্ন হইয়াছে ;
অতএব কখছ কোণ এক সম কোণ।
এই রূপে উপপন্ন হইবে যে, গখছ কোণও এক সম কোণ।

পরে, খক ও খগএর সম্পাত বিন্দুতে উভয়ের সহিত সম কোণ করিয়া খছ রেখা দণ্ডায়মান হওয়াতে, উহা খক ও খগএর আধার সমতলের লম্ব হইবে ; [১১শ, ৪।
এবং ছখ রেখা ঙঘ ও ঙচএর আধার সমতলের লম্ব হইয়াছে ; [অঙ্কন।
আর একই সরল রেখা দুই সমতলের লম্ব হইলে সেই দুই সমতল পরস্পর সমান্তর হয় ; [১১শ, ১৪।

সুতরাং কখ ও খগএর আধার সমতল ঘঙ ও ঙচএর আধার সমতলের সমান্তর।
অতএব পরস্পর সংযুক্ত ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—১৫। দুই নির্দ্দিষ্ট কোণের আধার সমতল দ্বয় যদি পরস্পর সমান্তর হয় ও কোণ দুইটীর পার্শ্বস্থ এক এক বাহু যদি পরস্পর সমান্তর হয়, তবে অবশিষ্ট এক এক বাহুও পরস্পর সমান্তর হইবে।

১৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

পরস্পর সমান্তর দুই সমতল অন্য কোন সমতল দ্বারা ছেদিত হইলে, ছেদজ রেখা দ্বয় পরস্পর সমান্তর হইবে।

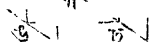
পরস্পর সমান্তর কখ ও গঘ সমতল যেন ঙচজছ সমতল দ্বারা ছেদিত হইয়াছে এবং ঙচ ও ছজ যেন দুই ছেদজ রেখা; ঙচ ও ছজ পরস্পর সমান্তর হইবে।

যদি সমান্তর না হয়, তবে ঙচ ও ছজ বর্দ্ধিত হইলে চ ও জএর দিকে কিম্বা ঙ ও ছএর দিকে সংলগ্ন হইবে তাহারা বর্দ্ধিত হইয়া যেন চ ও জএর দিকে ট বিন্দুতে মিলিত হইল।

পরে, ঙচট রেখা কখ সমতলে থাকায়,
ঙচটএর প্রত্যেক বিন্দু এই সমতলে থাকিবে; [১১শ, ১।

এই হেতু ট বিন্দু এই সমতল-
স্থিত হইয়াছে।

এই কারণে, ট বিন্দু গঘ সমতল-
স্থিত হইবে।

অতএব কখ ও গঘ সমতল দ্বয়
বর্দ্ধিত হইলে সংলগ্ন হইবে;

কিন্তু তাহারা পরস্পর সমান্তর কল্পিত হওয়াতে সংলগ্ন হইতে পারে না।

অতএব ঙচ ও ছজ বর্দ্ধিত হইলে চ ও জএর দিকে মিলিত হইবে না।

এইরূপে সপ্রমাণ হইবে যে, ঐ দুই রেখা ঙ ও ছএর দিকে মিলিত হইবে না;

আর এক সমতলস্থ দুই সরল রেখা উভয়দিকে উত্তরোত্তর বর্দ্ধিত হইয়া কখনই মিলিত না হইলে পরস্পর সমান্তর হইয়া থাকে;

সুতরাং ঙচ রেখা ছজএর সমান্তর।

অতএব পরস্পর সমান্তর ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—১৬। দুই সমান্তর সরল রেখা কোন সমান্তর সমতল দ্বয়ের দ্বারা ছেদিত হইলে, তাহাদের মধ্যবর্ত্তী সরল রেখা দুইটীর অংশ দ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

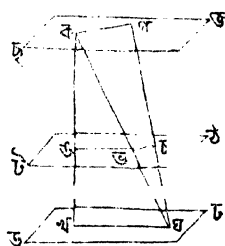
১৭। পরস্পর সমান্তর দুই সমতল অন্য কোন সমতল দ্বারা ছেদিত হইলে, ছেদক সমতল সমান্তর সমতল দ্বয়ের উপর সমাবনত হইবে।

১৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যদি দুই সরল রেখা কতিপয় সমান্তর সমতল দ্বারা ছেদিত হয়, তবে উভয়ে একই অনুপাতী রূপে ছেদিত হইবে।

কখ ও গঘ দুই সরল রেখা যেন ছজ, টঠ ও ডচ এই কতিপয় সমান্তর সমতল দ্বারা ক, ঙ ও খ এবং গ চ ও ঘ বিন্দুতে ছেদিত হইল; কঙতে ঙখতে যেরূপ গচতে চঘতে সেই রূপ হইবে।

কগ, খঘ ও কঘ সংযুক্ত কর; কঘ যেন ভ বিন্দুতে টঠ সমতলের সহিত সংলগ্ন হইল; ঙভ ও ভচ সংযুক্ত কর।

পরে, টঠ ও ডচ সমান্তর সমতল দ্বয় ঙখঘভ সমতল দ্বারা ছেদিত হওয়াতে, ঙভ ও খঘ ছেদজ রেখা দ্বয়, পরস্পর সমান্তর; [১১শ, ১৬

এবং ছজ ও টঠ সমান্তর সমতল দ্বয় কভচগ সমতলে দ্বারা ছেদিত হওয়াতে, কগ ও ভচ ছেদজ রেখা দ্বয় পরস্পর সমান্তর; [১১শ, ১৬

আর, ঙভ রেখা কখঘ ত্রিভুজের খঘ বাহুর সমান্ত হওয়াতে,

কঙতে ঙখতে যে রূপ, কভতে ভঘতে সেই রূপ। [৬ষ্ঠ, ২

আবার, ভচ রেখা কঘগ ত্রিভুজের কগ বাহুর সমান্তর বলিয়া,

কভতে ভঘতে যে রূপ, গচতে চঘতে সেই রূপ; [৬ঠ, ২।

এবং প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, কভতে ভঘতে যে রূপ, কঙতে ঙখতে সেই রূপ;

সুতরাং কঙতে ঙখতে যে রূপ, গচতে চঘতে সেই রূপ। [৫ম, ১১।

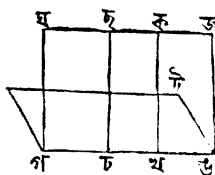
অতএব যদি দুই সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—১৮। দুই সরল রেখা চারিটী সমান্তর সমতল দ্বারা ছেদিত হইলে, প্রথম ও দ্বিতীয় সমতলের মধ্যবর্ত্তী খণ্ড দ্বয়ের পরস্পর যে অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থ সমতলের মধ্যবর্ত্তী খণ্ড দ্বয়েরও পরস্পর সেই অনুপাত হইবে।

১৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

এক সরল রেখা কোন সমতলের সহিত সম কোণ করিলে যত গুলি সমতল ঐ রেখার সহিত মিলিত হইবে, তাহারা প্রত্যেকে প্রথম সমতলের সহিত সম কোণ করিবে।

কখ সরল রেখা যেন গট সমতলের সহিত সম কোণ করিতেছে; যত গুলি সমতল কখএর সহিত মিলিত হইতে পারে, তাহারা প্রত্যেকে গট সমতলের সহিত সম কোণ করিবে।

ঘঙ সমতল যেন কখ রেখার সহিত মিলিত হইল; আর ঘঙ ও গট সমতল দ্বয়ের সাধারণ ছেদজ রেখা যেন গঙ; [১১শ, ৩।
গঙতে চ বিন্দু কল্পনা কর;

এবং ঘঙ সমতলে গঙর সহিত সম কোণ করিয়া চ বিন্
হইতে চছ রেখা টান। [১ম, ১১

পরে, গট সমতলের সহিত কখ রেখা সম কোণ করাতে
যে সকল রেখা এই সমতলে থাকিয়া উহার সহিত সংল
হইবে, তাহারা প্রত্যেকে উহার সহিত সম কোণ করিবে
[১১শ, সং ৩

গঙ ঐ সমতলে থাকিয়া কখএর সহিত সংল
হইতেছে;

অতএব কখগ কোণ এক সম কোণ;

আর ছচখ কোণও এক সম কোণ; [অঙ্কন

এই হেতু ছচ রেখা কখএর সমান্তর; [১ম, ২৮

এবং কখ রেখা গট সমতলের সহিত সম কোণ করাতে,
[কল্পনা

চছ রেখাও গট সমতলের সহিত সম কোণ করিতেছে;
[১১শ, ৮

আর দুই সমতল পরস্পর ছেদ করিলে, তাহাদের সাধার
ছেদজ রেখার উপর এক সমতলে অঙ্কিত লম্ব গুলি যদি
অন্য সমতলের লম্ব হয়, তবে সমতল দুইটী পরস্পর

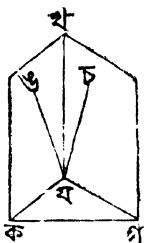
লম্বভাবাপন্ন হয়; [১১শ, সং ৪।
এবং প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, দুইটী সমতলের সাধারণ ছেদজ গঙর উপর চছ লম্ব ঘঙ সমতলে অঙ্কিত হইয়া গট সমতলের সহিত সম কোণ করিতেছে;
সুতরাং ঘঙ সমতল গট সমতলের সহিত সম কোণ করিবে।
এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে যে, অন্য কোন সমতলকে কখএর সহিত মিলিত করিলে তাহাও গট সমতলের উপর লম্ব হইবে।
অতএব এক সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—১৯। এরূপ এক সমতল অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহা পরস্পর লম্ব ভাবাপন্ন দুই সমতলের প্রত্যেকের উপর লম্ব ভাবে থাকে।

১৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

পরস্পর সংলগ্ন দুই সমতল যদি অন্য এক সমতলের উপর লম্ব ভাবে থাকে, তবে প্রথম দুই সমতলের ছেদজ রেখা তৃতীয় সমতলের লম্ব হইবে।

খক ও খগ পরস্পর সংলগ্ন দুই সমতল যেন অন্য এক সমতলের উপর লম্ব ভাবে অবস্থিত হইয়াছে ও খঘ যেন খক ও খগএর সাধারণ ছেদজ রেখা; খঘ রেখা তৃতীয় সমতলের লম্ব হইবে।

যদি না হয়, তবে খক ও তৃতীয় সমতলের সাধারণ ছেদজ কঘএর সহিত সম কোণ করিয়া কখ সমতলে ঘ বিন্দু হইতে ঘঙ রেখা টান; [১ম, ১১।
আর খগ ও তৃতীয় সমতলের সাধারণ ছেদজ ঘগএর সহিত সম কোণ করিয়া খগ সমতলে ঘ বিন্দু হইতে ঘচ রেখা টান। [১ম, ১১

পরে, খক সমতল তৃতীয় সমতলের লম্ব হওয়াতে [কল্পনা।
ও তাহাদের সাধারণ ছেদজ কঘএর সহিত সম কোণ করিয়া, কখ সমতলে, ঘঙ রেখা টানা হইয়াছে বলিয়া [অঙ্কন
ঘঙ রেখা তৃতীয় সমতলের লম্ব হইয়াছে। [১১শ, সং ৪

এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে যে, ঘচ রেখাও তৃতীয় সমতলের লম্ব হইয়াছে।

অতএব ঘ বিন্দু হইতে তৃতীয় সমতলের উপর তাহার এক দিকে দুইটী লম্ব উত্তোলিত হইল,
কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব। [১১শ, ১৩
এই হেতু কখ ও খগএর সাধারণ ছেদজ ঘখ ব্যতীত অন্য কোন রেখা তৃতীয় সমতলের সহিত সম কোণ করিয়া অঙ্কিত করা যাইতে পারে না;
সুতরাং খঘ রেখা তৃতীয় সমতলের লম্ব হইবে।

অতএব পরস্পর সংলগ্ন ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

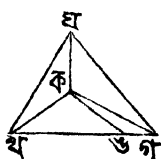
অঃ প্রঃ—২০। বিভিন্ন সমতলস্থ দুই রেখার উপর একটী লম্ব টানিতে হইবে।

২০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যদি কোন একটী ঘন কোণ তিনটী সামতলিক কোণ দ্বারা উৎপন্ন হয়, তবে ইহাদের মধ্যে যে দুইটীকে লও, তাহারা একত্র যোগে তৃতীয় কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

ক ঘন কোণ যেন খকগ, গকঘ ও ঘকখ এই তিনটী সামতলিক কোণ দ্বারা উৎপন্ন হইয়াছে; ইহাদের মধ্যে যে দুইটীকে লও, তাহারা একত্র যোগে তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

খকগ, গকঘ ও ঘকখ এই তিন কোণ যদি পরস্পর সমান হয়, তাহা হইলে স্বতই বোধ হইবে যে, ইহাদের মধ্যে যে কোন দুইটীকে লও, তাহারা একত্র যোগে তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

যদি ইহারা পরস্পর সমান না হয়, তবে খকগ কোণ যেন অন্য দুইএর কোনটী অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নহে ও ইহাদের মধ্যে খকঘ অপেক্ষা বৃহত্তর। খক ও কগএর আধার সমতলে খক রেখার ক বিন্দুতে খকঘ কোণের সমান খকঙ কোণ কর; [১ম,২৩।

কঙ রেখাকে কঘএর সমান কর ; [১ম, ৩।
ঙ বিন্দু দিয়া খঙগ রেখা টান ; ইহা যেন কখ ও কগ রেখাকে খ ও গ বিন্দুতে ছেদ করিল ;
এবং ঘখ, ঘগ সংযুক্ত কর।

পরে, কঘ রেখা কঙর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন।
এবং কখ রেখা খকঘ ও খকঙ এই দুই ত্রিভুজের সাধারণ বাহু বলিয়া,
খক ও কঘ বাহু দ্বয় যথাক্রমে খক ও কঙ বাহু দ্বয়ের সমান;
আর খকঘ কোণ খকঙ কোণের সমান ; [অঙ্কন।
এই হেতু, খঘ ভূমি খঙ ভূমির সমান। [১ম, ৪।
আর খঘ ও ঘগ একত্র যোগে খগ অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে, ও তন্মধ্যে একটী অর্থাৎ খঘ, খঙর সমান প্রতিপন্ন হইয়াছে বলিয়া,
অন্যটী অর্থাৎ ঘগ, অবশিষ্ট ঙগ আপক্ষা বৃহত্তর হইবে।
[স্বতঃ ৫।

পুনরায়, কঘ রেখা কঙর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন
এবং কগ রেখা কগঘ ও কঙগ ত্রিভুজ দ্বয়ের সাধারণ বাহু বলিয়া,
আর ঘগ ভূমি ঙগ ভূমি অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়ায়,
ঘকগ কোণ ঙকগ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ; [১ম, ২৫।
আর খকঘ কোণ খকঙ কোণের সমান ; [অঙ্কন।
সুতরাং খকঘ ও ঘকগ একত্র যোগে খকঙ ও ঙকগ অর্থাৎ খকগ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ;

আবার খকগ কোণ খকঘ অথবা ঘকগ এই দুইএর কোনটী অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নহে;

সুতরাং খকগ কোণ এবং অন্য দুইটী কোণের কোন একটী কোণ একত্র যোগে তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর।

অতএব যদি কোন একটী ঘন কোণ ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—১১। যদি কোন একটী ঘন কোণ কতিপয় সামতলিক কোণ দ্বারা উৎপন্ন হয়, তবে ইহাদের মধ্যে প্রত্যেকেই অন্য গুলির যোগফল অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

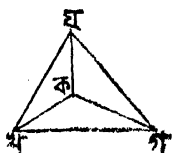
২১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

প্রত্যেক ঘন কোণ যে সকল সামতলিক কোণ দ্বারা উৎপন্ন হয়, তাহাদের সমষ্টি চারি সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

প্রথমত, ক ঘন কোণ যেন খকগ, গকঘ ও ঘকখ এই তিন সামতলিক কোণ দ্বারা উৎপন্ন হইল; এই তিন কোণের সমষ্টি চারি সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

কখ, কগ, কঘ সরল রেখাতে খ, গ, ঘ বিন্দু কল্পনা কর এবং খগ, গঘ ও ঘখ সংযুক্ত কর।

ঘ ক খ গ

পরে, খ ঘন কোণ গখক, কখঘ, ও

ঘখগ এই তিন সামতলিক কোণ দ্বারা উৎপন্ন হইয়াছে বলিয়া, ইহাদের দুইটীর সমষ্টি তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। [১১শ, ২০।

এই হেতু গখক ও কখঘএর সমষ্টি ঘখগ অপেক্ষা বৃহত্তর।

এই কারণে, খগক ও কগঘ কোণ দ্বয়ের সমষ্টি, খগঘ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর,

এবং গঘক ও কঘখএর সমষ্টি গঘখ অপেক্ষা বৃহত্তর।

অতএব গখক, কখঘ, খগক, কগঘ, গঘক ও কঘখ এই ছয় কোণ একত্র যোগে ঘখগ, ঘগখ ও খঘগ এই তিন কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ;

কিন্তু ঘখগ, ঘগখ ও খঘগ এই তিন কোণ দুই সম কোণের সমান। [১ম, ৩২।

অতএব গখক, কখঘ, খগক, কগঘ, গঘক ও কঘখ এই ছয় কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

আবার, কখগ, কগঘ, ও কঘখ এই ত্রিভুজ গুলির প্রত্যেকের তিনটী তিনটী কোণের সমষ্টি দুই সম কোণের সমান বলিয়া, [১ম, ৩২।

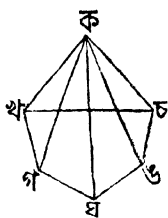
ইহাদের সমস্ত কোণ গুলির অর্থাৎ গখক, খকগ, কগখ, কগঘ, গঘক, গকঘ, কঘখ, ঘখক ও ঘকখ এই নয় কোণের সমষ্টি ছয় সম কোণের সমান ;

আর এই নয়টীর মধ্যে গখক, কগখ, কগঘ, গঘক, কঘখ, ঘখক এই ছয়টী কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ;

সুতরাং অবশিষ্ট খকগ, গকঘ ও ঘকখ এই তিন কোণ

অর্থাৎ ক ঘন কোণের উৎপাদক তিনটী সামতলিক কোণ একত্র যোগে চারি সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

অনন্তর ক ঘন কোণ খকগ, গকঘ, ঘকঙ, ঙকচ, চকখ প্রভৃতি কতিপয় সামতলিক কোণ দ্বারা উৎপন্ন হইলে, তাহাদের সমষ্টি চারি সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

কোণ গুলি যে সকল সমতলস্থ হইয়াছে, সেই সমতল গুলি যেন অন্য এক সমতল দ্বারা ছেদিত হইল এবং খগ, গঘ, ঘঙ, ঙচ, চখ যেন এই সকল সমতলের ও কল্পিত সমতলের ছেদজ রেখা।

পরে খ ঘন কোণ গখক, গখচ ও চখক সামতলিক কোণ দ্বারা উৎপন্ন বলিয়া, তন্মধ্যে যে দুইটীকে লও, তাহারা তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে; [১১শ, ২০। এই হেতু, গখক ও কখচ কোণ একত্র যোগে চখগ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

এই কারণে, গ, ঘ, ঙ, চ এই কএকটী বিন্দুতে যে তিনটী তিনটী সামতলিক কোণ হইয়াছে, তন্মধ্যে যে দুইটী দুইটী কোণ, সাধারণ ক শৃঙ্গ বিশিষ্ট পৃষ্ঠ ত্রিভুজগুলির ভূমি সংলগ্ন, তাহারা একত্র যোগে তত্তদ্বিন্দুস্থ তৃতীয় কোণ অর্থাৎ খগঘঙচ বহুভুজের কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

এই হেতু, ত্রিভুজ গুলির ভূমি সংলগ্ন সমস্ত কোণের যোগ ফল বহুভুজের কোণ গুলির যোগফল অপেক্ষা বৃহত্তর।

এক্ষণে, ত্রিভুজ সকলের কোণ গুলির সমষ্টি, ত্রিভুজ গুলির বা বহুভুজের বাহু গুলির দ্বিগুণ সংখ্যক সম কোণের সমান; [১ম, ৩২।

আর বহুভুজের কোণ গুলির সমষ্টি তাহার বাহু সংখ্যার দ্বিগুণিত চতুরূন সম কোণের সমান; [১ম, ৩২ অনু ১।

এই হেতু ত্রিভুজ সকলের কোণ সমষ্টি বহুভুজের কোণ গুলির ও চারি সম কোণের সমষ্টির সমান; [স্বতঃ১।

কিন্তু প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, ত্রিভুজ সকলের ভূমি সংলগ্ন কোণ গুলির সমষ্টি বহুভুজের কোণ সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর;

সুতরাং ত্রিভুজ সকলের অবশিষ্ট কোণ গুলি, অর্থাৎ ক ঘন কোণ উৎপাদক শৃঙ্গস্থ যাবতীয় কোণ, একত্র যোগে চারি সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

অতএব প্রত্যেক ঘন কোণ ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—২২। যদি এই প্রতিজ্ঞার দ্বিতীয় প্রকরণের চিত্রে খগঘঙচ বহুভুজের কোন একটী কোণ দুই সম কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তাহা হইলে, প্রতিপন্ন কর যে, প্রতিজ্ঞাটী সিদ্ধ হইতে পারে না।

২৩। কোন ছেদিত ঘন ক্ষেত্র দুইটী সমান্তর সমতল দ্বারা কর্ত্তিত হইলে যে দুইটী বহুভুজ উৎপন্ন হয়, তাহারা পরস্পর সমান।

২৪। দুই নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে ভিন্ন সমতলস্থ কোন নির্দ্দিষ্ট রেখার একই বিন্দুর উপর সমান সমান দুইটী সরল রেখা টানিতে হইবে।

২৫। দুই সমান্তর রেখার এক একটীর সহিত এক এক সমতল মিলিত হইয়া যদি পরস্পরকে ছেদ করে তবে তাহাদের ছেদজ রেখা, উভয় সমান্তর রেখার সমান্তর হইবে।

২৬। এমন একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যেন তাহা দুই নির্দ্দিষ্ট সমতল স্পর্শ করে এবং এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়।

২৭। যদি কোন সরল রেখা এক সমতলের লম্ব হয়, তবে তাহার প্রতিকৃতি অন্য কোন সমতলে অঙ্কিত হইলে তাহা এই দুই সমতলের সাধারণ ছেদজ রেখার লম্ব হইবে।

২৮। দুই প্রাচীর মিলিত হইয়া একটী কোণ উৎপন্ন করিয়াছে; এই দুই প্রাচীরে দুইটী বিন্দু লইয়া তাহাদের ক্ষুদ্রতম দূরত্ব স্থির কর।

২৯। সমান্তর রেখা সকল সমান্তর সমতল গুলিকে ছেদ করিলে যে সকল কোণ উৎপন্ন হয়, তাহারা পরস্পর সমান।

৩০। যদি দুই সরল রেখা পরস্পর সমান্তর হয়, তবে তাহাদের প্রতিকৃতি দ্বয় কোন এক সমতলে অঙ্কিত হইলে তাহারাও পরস্পর সমান্তর হইবে।

৩১। যদি সমান্তর দুই সমতলে এক একটী বিন্দু কল্পনা করা যায় ও উভয় বিন্দু হইতে দুইটী করিয়া চারিটী রেখা এরূপে টানা যায় যে, তাহারা সমান্তর সমতল দ্বয়ের উপর লম্বভাবে দণ্ডায়মান কোন সমতলের উপর সমাবনত হয়, তাহা হইলে রেখা গুলির মধ্যে প্রথম ও তৃতীয় সমান্তর হইলে দ্বিতীয় ও চতুর্থও সমান্তর হইবে।

৩২। কোন নির্দ্দিষ্ট রেখার সহিত মিলিত করিয়া অন্য এক নির্দ্দিষ্ট রেখার সমান্তর একটী সমতল অঙ্কিত করিতে হইবে।

৩৩। কোন ছেদিত ঘন ক্ষেত্র দুইটী সমান্তর সমতল দ্বারা কর্ত্তিত হইলে যে দুইটী বহুভুজ উৎপন্ন হইবে, তাহারা পরস্পর সদৃশ।

৩৪। কোন সমতলের বহিস্থ এক বিন্দু হইতে সমতলের উপর একটী লম্ব ও সমতলস্থ কোন নির্দ্দিষ্ট রেখার উপর আর একটী লম্ব পাত করিলে লম্ব দুইটীর অপর প্রান্ত যোজক রেখা নির্দ্দিষ্ট রেখার সহিত সম কোণ করিবে।

৩৫। কখ, কগ ও কঘ এই তিনটী রেখা পরস্পরের সহিত সম কোণ করিতেছে; গঘএর উপর কঙ লম্ব পাত করিয়া খঙ সংযুক্ত করিলে, খঙ রেখা গঘএর লম্ব হইবে।

৩৬। যদি কোন সমতলের বহিস্থ ক ও খ দুইটী বিন্দু হইতে উহার উপর কম, খন দুইটী লম্ব পাত করা যায় এবং ক বিন্দু দিয়া কখএর উপর লম্বভাবে এক সমতল স্থাপন করা যায়, তবে ইহার ও নির্দ্দিষ্ট সমতলের ছেদক রেখা মন রেখার সহিত সম কোণ করিবে।

৩৭। অসীম স্থানে ক, খ, গ, ঘ, চারিটী বিন্দু এরূপে স্থাপিত আছে যে, কখ সংযুক্ত করিলে গঘএর সহিত সম কোণ করে ও কগ, খঘ এর সহিত সম কোণ করে; প্রতিপন্ন কর যে, কঘ ও খগ পরস্পর সম কোণ করিবে।

৩৮। পরস্পর সংলগ্ন দুই সমতলের একটীর কোন বিন্দু হইতে অপর সমতলের উপর এবং নির্দ্দিষ্ট দুই সমতলের সাধারণ ছেদজ রেখার উপর এক একটী লম্ব টানিলে, এই দুই লম্বের আধার সমতল, প্রথম দুই সমতলের ছেদজ রেখার উপর লম্বভাবে থাকিবে।

৩৯। দুই নির্দ্দিষ্ট সমতলের উপর কোন বিন্দু হইতে এক একটী লম্ব পাত করিলে, লম্ব দ্বয়ের অন্তর্গত সূক্ষ্ম কোণ সমতল দ্বয়ের পরস্পর অবনতির সমান হইবে।

৪০। যদি তিন সমান্তর সরল রেখা সমান্তর সমতল সকল দ্বারা ছেদিত হয় ও ছেদ বিন্দু গুলি সংযুক্ত করা যায়, তবে তদ্দ্বারা উৎপন্ন ক্ষেত্র সকল পরস্পর সমান ও সদৃশ হইবে।

৪১। কোন সমতলের ঊর্দ্ধস্থিত ক একটী নির্দ্দিষ্ট বিন্দু;

কখ রেখা সমতলের লম্ব আর সমতলস্থিত সমান সমান খগ, খঘ, ও খঙ তিনটী রেখা; যদি কগ, কঘ ও কঙ সংযুক্ত করা যায়, তবে তাহারা পরস্পর সমান হইবে।

৪২। দুই সমান্তর সরল রেখার মধ্যে কোন সমতলের উপর একটীর অবনতি সেই সমতলের উপর অন্যটীর অবনতির সমান হইবে।

৪৩। কখগ ত্রিভুজের ক ও খ বিন্দু হইতে সম্মুখীন বাহু দ্বয়ের উপর দুইটী লম্ব টানিলে, যদি তাহারা ঘ বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে ও ঘ হইতে ত্রিভুজের আধার সমতলের উপর একটী লম্ব উত্তোলন করা যায় এবং এই লম্ব রেখায় যথেচ্ছক্রমে ঙ বিন্দু কল্পনা করা যায়, তবে ঙ হইতে ত্রিভুজের তিন কোণিক বিন্দু পর্য্যন্ত তিনটী রেখা ঐ সকল বিন্দুর উপর দিয়া অঙ্কিত ও ত্রিভুজের বাহুগুলির সমান্তর রেখা ত্রয়ের লম্ব হইবে।

৪৪। বিভিন্ন সমতলস্থিত তিন রেখা এক বিন্দুতে সংলগ্ন হইয়া একটী ঘন কোণ উৎপন্ন করিয়াছে; যদি ঐ বিন্দু হইতে ঘন কোণের ভিতর আর একটী রেখা টানা যায়, তবে ইহা প্রথমোক্ত তিন রেখার সহিত যে তিনটী কোণ উৎপন্ন করিবে, তাহাদের সমষ্টি ঘন কোণ পরিবেষ্টক তিনটী সামতলিক কোণের সমষ্টির অর্দ্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

৪৫। যদি ক ঘন কোণ খকগ, খকঘ ও গকঘ সামতলিক কোণের সম্মিলনে উৎপন্ন হয়, তবে কখগ ও কগঘ; কগঘ ও কঘখ এবং কঘখ ও কখগ এই দুইটী দুইটী সমতলের মধ্যস্থ কোণ সকল যে যে সমতল দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে, তাহাদের পরস্পর সম্পাত দ্বারা একটী সরল রেখা উৎপন্ন হইবে।

৪৬। সমকোণী সমান্তর ভূমিক ঘনক্ষেত্র যে যে সমান্তর ক্ষেত্র দ্বারা পরিবেষ্টিত, তাহাদের প্রত্যেকের কর্ণের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ গুলির সমষ্টি, সমান্তর ভূমিক ঘনক্ষেত্রের কর্ণের উপর সমচতুর্ভুজের চতুর্গুণ হইবে।

৪৭। কোন সরল রেখা দুই ভাগে বিভক্ত হইলে, সমস্ত রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজিক ঘনক্ষেত্র, দুই অংশের উপর সমচতুর্ভুজিক ঘন ক্ষেত্রের এবং সমস্ত রেখার ও দুই অংশের

অন্তর্গত ত্রিগুণিত সমকোণী সমান্তরভূমিক ঘনক্ষেত্রের সমান হইবে।

৪৮। সমকোণী সমান্তরভূমিক ঘনক্ষেত্রের শলাকার গাত্র দিয়া যত গুলি সমতল অঙ্কিত হইতে পারে, তাহাদের প্রত্যেক দ্বারা ঘনক্ষেত্র দ্বিখণ্ডিত হইবে।

৪৯। ছেদিত ঘনক্ষেত্রের উন্নতির পরিমাণ ও ভূমির ক্ষেত্র ফল জানা আছে, উহার ঘন ফল স্থির করিতে হইবে।

৫০। কোন ছেদিত ঘনক্ষেত্রের ভূমি একটী বহুভুজ; ভূমির সমান্তর একটী সমতল দ্বারা ঘনক্ষেত্রকে কর্ত্তন করিলে ছেদজ বহুভুজ, ভূমির সদৃশ হইবে।

১১শ অধ্যায়

ব্যাখ্যা ও পরিশিষ্ট।

ইউক্লিড প্রথম ছয় অধ্যায়ে একই সমতলে অঙ্কিত নানাবিধ সরল রৈখিক ক্ষেত্র ও বৃত্তের বিষয় লিখিয়াছেন এবং তাহাদের পরস্পর সম্বন্ধ নির্ণয় করিয়াছেন। একাদশ অধ্যায়ে বিভিন্ন সমতলস্থ রেখা ও ক্ষেত্র সম্বন্ধীয় এবং ঘন কোণ ও সমান্তর ঘনক্ষেত্রের প্রকৃতি বিষয়ক কতক গুলি প্রতিজ্ঞা লিখিয়াছেন। মধ্যের চারি অধ্যায়ে পাটীগণিত সম্বন্ধীয় কতিপয় নিয়ম ও প্রতিজ্ঞা প্রকটিত করিয়াছেন। ৭ম অধ্যায়ে কোন দুই রাশির সাধারণ ভাজক ও গুণিত স্থির করিবার উপায়; অষ্টমে ক্রমাগত সমানুপাতী ও মধ্যসমানুপাতী রাশিদিগের পরস্পর সম্বন্ধ; নবমে বর্গ, ঘন ও যৌগিক রাশি প্রভৃতির বিষয় এবং দশমে দৃঢ় রাশি ও করণীর প্রকৃতি নির্ণয় করিয়াছেন। এক্ষণে কোন বিদ্যালয়ে ইউক্লিড প্রণীত এই চারি অধ্যায় পঠিত হয় না; এজন্য উপেক্ষিত হইল।

একাদশ অধ্যায়ে উল্লিখিত বিভিন্ন সমতলস্থিত রেখা ও ক্ষেত্র সকলের অনুকৃতি গুলি চিত্রিত করিতে গেলে, এক সমতলে অঙ্কিত করিতে হয়; কিন্তু এরূপ করিলে ঐ সকল চিত্র বিদ্যার্থীদিগের সহজে বোধ গম্য হয় না। এজন্য কাষ্ঠিকা দ্বারা রেখা ও ক্ষেত্র সকলের প্রতিকৃতি করিয়া প্রতিজ্ঞা গুলির মর্ম্ম ও প্রমাণ বুঝিয়া লওয়া আবশ্যক।

কোন সমতলে এক বা দুই বিন্দু নির্দ্দিষ্ট থাকিলে সমতলের অবস্থিতি জানা যায় না; কিন্তু ভিন্ন রেখাস্থ তিনটী বিন্দু নির্দ্দিষ্ট থাকিলে, তাহাদের আধার সমতলের অবস্থিতি নির্ণীত হইতে পারে, যেহেতু, একটী সমতলকে কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দুর

চতুর্দ্দিক দিয়া কুলাল চক্রের ন্যায় অথবা ঊর্দ্ধাধো দিক দিয়া রথ-চক্রের ন্যায় ঘূর্ণিত করা যাইতে পারে; যদি দুইটী বিন্দু নির্দ্দিষ্ট থাকে, তবে সমতল উহাদের বা উহাদের যোজক রেখার চতুর্দ্দিক দিয়া কেবল ঊর্দ্ধাধোভাবে ঘূর্ণিত হইতে পারে, অন্য প্রকারে পারে না; অতএব দুই বিন্দু নির্দ্দিষ্ট থাকিলে, একটী সমতলকে ভিন্ন ভিন্ন রূপে উহাদের বা উহাদের যোজক রেখার সহিত মিলিত করিয়া স্থাপিত করা যাইতে পারে। এজন্য সমতলস্থ দুই বিন্দু অথবা একটী রেখা নির্দ্দিষ্ট থাকিলেও কোন সমতলের অবস্থিতি নির্দ্দিষ্ট হইল এরূপ বলা যায় না। কিন্তু যদি বিভিন্ন রেখাস্থ তিনটী বিন্দু নির্দ্দিষ্ট থাকে, তবে তাহাদের সহিত মিলিত করিয়া একটী সমতলকে তাহাদের কোন দিক দিয়া কোন প্রকারেই ঘূর্ণিত করিতে পারা যায় না; তাহা হইলে সমতলের অবস্থিতি নির্দ্দিষ্ট আছে, এরূপ বলা যাইতে পারে।

১ম সং। বিদ্যার্থীদিগের স্মরণ করিয়া রাখা আবশ্যক যে, ইউক্লিডের লিখিত ঘনক্ষেত্র গুলি দৈর্ঘ, প্রস্থ ও বেধ বিশিষ্ট, সমতল দ্বারা পরিবেষ্টিত, শূন্য গর্ভ স্থান মাত্র; অতএব একটী ঘনক্ষেত্র আর একটী দ্বারা বিদ্ধ ও ছেদিত হইতে পারে।

৫ম সং। কোন সরল রেখা এক সমতলকে সংস্পর্শ করিয়া ঐ সমতলস্থিত যে যে রেখার সহিত সংলগ্ন হইবে, তাহাদের প্রত্যেকের সহিত ভিন্ন ভিন্ন কোণ উৎপন্ন করিবে। অতএব কোন রেখার এক সমতলের উপর অবনতি জানিতে হইলে সমতলস্থ এক নির্দ্দিষ্ট রেখার ও প্রথমোক্ত রেখার অবনতির পরিমাণ স্থির করা আবশ্যক; তাহা না হইলে কোন সমতলের উপর এক রেখার অবনতি জানা যায় না। সেই নির্দ্দিষ্ট রেখা কোন্‌টী, তাহা মূল সংজ্ঞাতে লিখিত হইয়াছে। এই নির্দ্দিষ্ট রেখার ও প্রস্তাবিত রেখার অবনতি যে অন্য সকল অবনতি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, ইহা সহজেই বোধ হইবে।

বিভিন্ন সমতলস্থিত যে দুই রেখা সংস্পৃষ্ট না হয়, তাহাদের পরস্পর অবনতির পরিমাণ স্থির করিতে হইলে, কোন এক বিন্দু হইতে তাহাদের প্রত্যেকের সমান্তর এক একটী

রেখা টানিতে হয়; এই দুই রেখার অন্তর্গত কোণের পরিমাণ যত, প্রথমোক্ত দুই রেখার অবনতিও তত।

৯ম সং। যাহার দৈর্ঘ্য, বিস্তার ও বেধ আছে ও যাহা স্থান পরিবেষ্টন করে, এরূপ ক্ষেত্রের নামের পূর্ব্বে ঘন শব্দ প্রয়োগ হইয়া থাকে। কিন্তু ঘন কোণ স্থান পরিবেষ্টন করে না বলিয়া এখানে ঘন শব্দের অন্যার্থ করিতে হইবে; এজন্য ঘন কোণ বলিলে, কোন ঘনক্ষেত্রের কোণ, ইহাই বুঝিতে হইবে।

যদি কোন ঘন কোণ তিনটী সামতলিক কোণের অন্তর্গত হয়, তবে কোন দুইটী সমতলের অবস্থান নির্দ্দিষ্ট হইলে, তৃতীয় সমতলেরও অবস্থান নির্ণীত হইবে; এজন্য তিনটী সমতলের দ্বারা একটীমাত্র ঘন কোণ উৎপন্ন হইতে পারে। কিন্তু কোন ঘন কোণ যদি তিনের অধিক সামতলিক কোণের অন্তর্গত হয়, তবে কোন একটী সমতলের অবস্থান নির্দ্দিষ্ট হইলে অন্য গুলির অবস্থান নির্দিষ্ট হইতে পারে না; এজন্য উহাদে দ্বারা পরস্পার অসমান অসংখ্য ঘন কোণ উৎপন্ন হইতে পারে।

১০ম সং। যে সকল সমতল দ্বারা ঘনক্ষেত্র গুলি পরিবেষ্টিত হয়, তাহারা যদি একাকারে অঙ্কিত না হয়, তবে ঘনক্ষেত্র গুলি সমান হইতে পারে না; যথা—দুইটী সমান ভূমি বিশিষ্ট সূচিকে ভূমিতে ভূমিতে সংলগ্ন করিয়া একবার শৃঙ্গস্থ কোণ দ্বয়কে পরস্পার সম্মুখীন ভাবে ও অন্যবার একটী শৃঙ্গস্থ কোণকে অন্যের অভ্যন্তরে স্থাপন করিলে, যে দুইটী ঘনক্ষেত্র হয়, তাহারা পরস্পার সমান হইতে পারে না।

১৪শ সং। বর্ত্তুল, সূচি বা স্তম্ভের উৎপত্তির প্রকার অবলম্বন করিয়া এই সকল ঘনক্ষেত্রের সংজ্ঞা লিখিত হইয়াছে। ইউক্লিড জ্যামিতিক ক্ষেত্রের সংজ্ঞা লিখিবার জন্য সর্ব্বাগ্রে এই স্থলে গতি বিশেষের উল্লেখ করিয়াছেন; এই গতি কত বেগে হইয়াছে, তাহা জানিবার আবশ্যক নাই; কেবল কোন দিকে ও কিরূপে গতি হইতেছে, তাহা জানিলেই ক্ষেত্রের অবয়ব হৃদয়ঙ্গম হইবে।

২৬শ সং। কেহ কেহ চারিটী যে কোন ত্রিভুজাকার সমতল দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রকে চতুর্ভূমিক ঘনক্ষেত্র বলেন ও ইউক্লিড লিখিত সংজ্ঞানুযায়ী ক্ষেত্রকে নিয়মিত চতুর্ভূমিক ঘনক্ষেত্র বলিয়া থাকেন।

এই কএকটী অতিরিক্ত সংজ্ঞা বিদ্যার্থীদিগের জানিয়া রাখা আবশ্যক ;—

(১) যে সকল সমতল দ্বারা কোন ঘনক্ষেত্র পরিবেষ্টিত হয়, তাহাদের মধ্যে সন্নিহিত দুইটী দুইটী সমতলের পরস্পর সম্পাতে যে রেখা গুলি উৎপন্ন হয়, তাহাদের নাম অশ্রি।

(২) যে সমান্তর ভূমিক ঘনক্ষেত্রের অশ্রি গুলি ভূমির উপর লম্ব ভাবে দণ্ডায়মান থাকে, তাহাকে সমকোণী সমান্তর ভূমিক ঘনক্ষেত্র বলে।

(৩) যদি একটী সরল রেখা ও এক সমতল এরূপে অবস্থিত হয় যে, তাহাদিগকে উত্তরোত্তর বৃদ্ধি করিলেও পরস্পর সংলগ্ন হয় না, তবে ঐ সরল রেখাকে সমতলের সমান্তর বলা যায়।

(৪) যদি ভিন্ন সমতলস্থ দুই সরল রেখা এরূপে অবস্থিত হয় যে, তাহাদিগকে সংলগ্ন করিতে পারা যায় না, তবে কোন বিন্দু হইতে ঐ দুইএর প্রত্যেকের সমান্তর এক একটী রেখা টানিলে যে কোণ উৎপন্ন হয়, তাহা প্রথমোক্ত দুই রেখার অবনতি বা কোণের পরিমাপক।

(৫) কোন সমতলাভিমুখে অবনত এক সরল রেখার দুই প্রান্ত হইতে ঐ সমতলের উপর লম্ব পাত করিলে, লম্ব দ্বয়ের মধ্যস্থ সমতলে অঙ্কিত রেখাকে সমতলের উপর প্রথমোক্ত রেখার প্রতিকৃতি বলে ; ইহা স্পষ্টই বোধ হইবে যে, এক সমতলের উপর কোন সরল রেখার অবনতি ও তাহার প্রতিকৃতির উপর অবনতি পরস্পর সমান। যদি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা সমতলের সমান্তর হয়, তবে উহার সামতলিক প্রতিকৃতি উহার সমান হইবে, সমান্তর না হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে ও নির্দ্দিষ্ট রেখাকে কর্ণ স্বরূপ লইয়া একটী সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত করিলে সেই ত্রিভুজের ভূমির সমান হইবে।

যেমন কোন রেখার দৈর্ঘের পরিমাণ আর একটী নির্দ্দিষ্ট রেখা দ্বারা হইয়া থাকে ও সরল রৈখিক ক্ষেত্রের পরিমাণ আর একটী নির্দ্দিষ্ট সামতলিক ক্ষেত্র দ্বারা হয়, সেইরূপ ঘনক্ষেত্রের পরিমাণ আর একটী নির্দ্দিষ্ট ঘনক্ষেত্র দ্বারা স্থির হইতে পারে; যথা,—যদি কোন ঘনক্ষেত্রের দৈর্ঘ ৫ অঙ্গুলি, প্রস্থ ৪ অঙ্গুলি ও বেধ ৩ অঙ্গুলি হয়, তবে দেখিতে হইবে, যে ঐ ক্ষেত্রে ১ অঙ্গুলি দীর্ঘ প্রস্থ ও বেধ বিশিষ্ট কয়টী ঘনক্ষেত্র আছে; চিত্র অঙ্কিত করিলেই দেখা যাইবে যে, তাহাতে এইরূপ ৬০টী ঘনক্ষেত্র আছে; দীর্ঘ, প্রস্থ, ও বেধ জ্ঞাপক সংখ্যা গুলিকে ধারাবাহিক গুণ করিলেই এই ফল পাওয়া যায়, যথা, ৫ × ৪ × ৩ = ৬০; অর্থাৎ ক্ষেত্রের ঘন ফল ৬০ ঘন অঙ্গুলি। ছেদিত ঘনক্ষেত্রের ন পরিমাণ স্থির করিতে হইলে, দুইটী ভূমির মধ্যে কোন এক-র বর্গ পরিমাণকে উন্নতির রৈখিক পরিমাণ দিয়া গুণ করি-লই হইবে। সমান্তরভূমিক ঘনক্ষেত্র, ছেদিত ঘনক্ষেত্রের প্রকার ভেদ মাত্র; অতএব তাহার ঘন ফল সেইরূপেই স্থির হইয়া থাকে। সূচির ঘন ফল তাহার সমান ভূমি ও সমান উন্নতি বিশিষ্ট ছেদিত ঘনক্ষেত্রের এক তৃতীয়াংশ।

৬ঠ–প্র। এই প্রতিজ্ঞার চিত্রে যদি খ বিন্দু হইতে ঙঘ রেখার উপর খচ লম্ব টানা যায় ও কচ সংযুক্ত করা যায়, তাহা হইলে কচ রেখা ঙঘএর লম্ব হইবে এবং কঙঘ ও খঙঘ সমতল য়ের পরস্পর অবনতি কচখ কোণ দ্বারা পরিমিত হইবে।

১৯শ–প্র। যদি তিনটী সমতল পরস্পরকে ছেদ করে ও তন্মধ্যে প্রথমটী দ্বিতীয়ের উপর লম্ব ভাবে ও দ্বিতীয়টী তৃতী-য়ের উপর লম্ব ভাবে থাকে, তাহা হইলে প্রথমটী তৃতীয়ের উপর ম্ব ভাবে অবস্থিত হইবে আর দুই দুই সমতলের ছেদজ রেখা গুলি পরস্পরের লম্ব হইবে।

১১শ অধ্যায়ের শেষের ১১টী মূল প্রতিজ্ঞা একণে কোন বিদ্যালয়ে পঠিত হয় না, এজন্য পরিত্যক্ত হইল।

১২শ অধ্যায়।

উপপ্রতিজ্ঞা।

দুই অসমান রাশির মধ্যে যদি বৃহত্তর হইতে তাহার অর্দ্ধেক অপেক্ষা অধিক বিয়োগ করা যায় ও অবশিষ্ট হইতে তাহার অর্দ্ধেক অপেক্ষা অধিক বিয়োগ করা যায় এবং উত্তরোত্তর এইরূপ বিয়োগ করা যায়, তবে অবশেষে এরূপ রাশি অবশিষ্ট থাকিবে যে, তাহা প্রথমোক্ত দুই রাশির মধ্যে ক্ষুদ্রতর অপেক্ষা ন্যূন হইবে। (১০ম অধ্যায়—১ম প্রতিজ্ঞা।)

কখ ও গ এই দুই অসমান রাশির মধ্যে যেন কখ বৃহত্তর; যদি কখ হইতে তাহার অর্দ্ধেক অপেক্ষা অধিক বিয়োগ করা যায় ও অবশিষ্ট হইতে তাহার অর্দ্ধেক অপেক্ষা অধিক ও উত্তরোত্তর এই প্রকারে বিয়োগ করা যায়, তবে অবশেষে এরূপ রাশি অবশিষ্ট থাকিবে যে, তাহা গ অপেক্ষা ন্যূন হইবে।

গএর এমন একটী গুণিত কল্পনা করা যাইতে পারে যে, তাহা কখ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

গএর এবম্বিধ গুণিত ঘঙ রাশি যেন কখ অপেক্ষা বৃহত্তর হইল; প্রত্যেকে গএর সমান হয়, এরূপ করিয়া ঘঙকে ঘচ, চছ, ছঙ এই কয় অংশে ভাগ কর।

ক ট জ খ গ ঘ চ ছ ঙ

কখ হইতে তাহার অর্দ্ধেক অপেক্ষা অধিক খজ বিয়োগ কর ও অবশিষ্ট কজ হইতে তাহার অর্দ্ধেক অপেক্ষা অধিক জট বিয়োগ কর এবং ঘঙ যত ভাগে বিভক্ত হইয়াছে, কখ যে পর্য্যন্ত না তত ভাগে বিভক্ত হয়, সেই পর্য্যন্ত এই রূপে বিয়োগ করিতে থাক; তাহা করিলে যেন, কট, টজ, জখ এই গুলি কখএর এক একটী ভাগ হইল এবং ঘচ, চছ, ছঙ এই গুলি ঘঙর এক একটী ভাগ।

পরে, ঘঙ রাশি কখ অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে,

ও ঘঙর বিয়োজক ছঙ, ঘঙর অর্দ্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর নয় বলিয়া,

এবং কখএর বিয়োজক খজ রাশি কখএর অর্দ্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে,

একের অবশিষ্ট ঘছ, অন্যের অবশিষ্ট কজ অপেক্ষা বৃহত্তর;

আবার, ঘছ রাশি কজ অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে,

ও ছচ রাশি ঘছএর অর্দ্ধ অপেক্ষা বৃহত্তর নহে; কিন্তু জট রাশি কজএর অর্দ্ধ অপেক্ষা বৃহত্তর বলিয়া,
অবশিষ্ট ঘচ অবশিষ্ট কট অপেক্ষা বৃহত্তর।

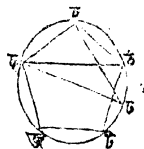
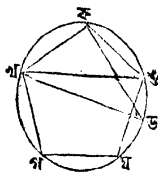
এক্ষণে ঘচ রাশি গএর সমান হওয়ায়,
গ রাশি কট অপেক্ষা বৃহত্তর,
অর্থাৎ কট রাশি গ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

এই রূপে ঠিক অর্দ্ধেক করিয়া বিয়োগ করিলে উপপত্তিও এই রূপ হইবে।

১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

ভিন্ন ভিন্ন বৃত্তের অন্তর্গত সদৃশ বহুভুজ গুলির অনুপাত ব্যাসের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ গুলির অনুপাতানুসারে হইয়া থাকে।

কখগঘঙ ও চছজটঠ যেন দুই বৃত্ত এবং তাহাদের অন্তর্গত কখগঘঙ ও চছজটঠ যেন দুই সদৃশ বহুভুজ; বৃত্ত দ্বয়ের খড ও ছঢ এক একটী ব্যাস; তাহা হইলে কখগঘঙ বহুভুজে চছজটঠ বহুভুজে যে অনুপাত, খডএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজে ছঢএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজে সেই অনুপাত হইবে।

কড, খঙ, চঢ, ছঠ সংযুক্ত কর। পরে, বহুভুজ দুইটী সদৃশ হওয়াতে, খকঙ কোণ ছচঠ কোণের

সমান; এবং খকতে কঙতে যে রূপ, ছচতে চঠতে সেই রূপ; [৬ষ্ঠ, সং ১।

এই হেতু খকঙ ও ছচঠ এই দুই ত্রিভুজ পরস্পর সমান কোণী; [৬ষ্ঠ, ৬।

অতএব কঙখ কোণ চঠছ কোণের সমান;

আর কঙখ কোণ কডখ কোণের ও চঠছ কোণ চঢছ কোণের সমান; [৩য়, ২১।

এই হেতু কডখ কোণ চঢছ কোণের সমান;

এবং খকড সম কোণ ছচঢ সম কোণের সমান; [৩য়, ৩১।

অতএব কডখ ও চঢছ ত্রিভুজ দ্বয়ের অবশিষ্ট কোণ গুলি পরস্পর সমান ও ত্রিভুজ দুইটী সমান কোণী;

এজন্য খকতে খডতে যে রূপ, ছচতে ছঢতে সেই রূপ; [৬ষ্ঠ, ৮।

এবং একান্তরে, খকতে ছচতে যে রূপ, খডতে ছঢতে সেই রূপ; [৫ম, ১৬।

অতএব খকএর ছচএর সহিত অনুপাতের দ্বিঘাত, খডএর ছঢএর সহিত অনুপাতের দ্বিঘাতের সমান।

[৫ম, সং ১০; ৫ম, ২২।

আবার কখগঘঙ বহুভুজের চছজটঠ বহুভুজের সহিত

অনুপাত, খকএর ছুচএর সহিত অনুপাতের দ্বিঘাত বলিয়া, [৬ঠ, ২০।

এবং খডএর উপর সমচতুর্ভুজের ছুটএর উপর সমচতুর্ভুজের সহিত অনুপাত খডএর ছুটর সহিত অনুপাতের দ্বিঘাত হওয়াতে, [৬ঠ, ২০।

কখগঘঙ বহুভুজে চছজটঠ বহুভুজে যে রূপ, খডএর উপর সমচতুর্ভুজে ছুটএর উপর সমচতুর্ভুজে সেই রূপ।

[৫ম, ১১।

অতএব ভিন্ন ভিন্ন ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞা—১। সদৃশ বহুভুজ সকলের অনুপাত তাহাদের অন্তর্গত বৃত্তের ব্যাসের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ গুলির অনুপাতানুসারে হইয়া থাকে।

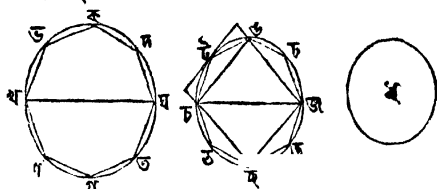
২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

বৃত্ত সকলের অনুপাত তাহাদের ব্যাসের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ গুলির অনুপাতানুসারে হইয়া থাকে।

কখগঘ ও ঙচছজ যেন দুই বৃত্ত এবং খঘ ও চজ তাহাদের ব্যাস; খঘএর উপর সমচতুর্ভুজে চজএর উপর সমচতুর্ভুজে যে অনুপাত, কখগঘ বৃত্তে ঙচছজ বৃত্তে সেই অনুপাত হইবে।

যদি না হয়, তবে অবশ্যই খঘএর উপর সমচতুর্ভুজে চজএর উপর সমচতুর্ভুজে যে অনুপাত, কখগঘ বৃত্তে

ঙচছজ বৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর কোন ক্ষেত্রে সেই অনুপাত হইবে।

প্রথমত, একটী চতুর্ভুজে অন্য চতুর্ভুজে যে অনুপাত, কখগঘ বৃত্তে ঙচছজ বৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধ ক্ষেত্রে যেন সেই অনুপাত হইল।

ঙচছজ সমচতুর্ভুজ ঙচছজ বৃত্তের অন্তর্গত কর।

[৪র্থ, ৬।

এই সমচতুর্ভুজ ঙচছজ বৃত্তের অর্দ্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে;

কারণ ঙ, চ, ছ ও জ বিন্দু দিয়া বৃত্তের স্পর্শিনী টানিলে যে সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত হইবে, ঙচছজ সমচতুর্ভুজ তাহার অর্দ্ধেক;

আর বৃত্তের উপর অঙ্কিত এই সমচতুর্ভুজ বৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর;

এই হেতু ঙচছজ চতুর্ভুজ বৃত্তের অর্দ্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর।

ট, ঠ, ড ও ঢ বিন্দুতে ঙচ, চছ, ছজ ও জঙ চাপ দ্বিখণ্ড কর;

এবং ঙট, টচ, চঠ, ঠছ, ছড, ডজ, জঢ ও ঢঙ সংযুক্ত কর; তাহা হইলে ঙটচ, চঠছ, ছডজ ও জঢঙ এই কএকটীর প্রত্যেক ত্রিভুজ, যে বৃত্ত খণ্ডের অন্তর্গত

হইয়াছে, তাহার অৰ্দ্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ;
কেননা ঙ ও চ বিন্দু দিয়া পরস্পর সমান্তর দুই রেখা ও ট বিন্দু দিয়া স্পর্শিনী টানিলে যে সমান্তর ক্ষেত্র হইবে, তাহা চটঙ ত্রিভুজের দ্বিগুণ হইবে, এবং এই সমান্তর ক্ষেত্র চটঙ বৃত্তখণ্ড অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে ঙটচ ত্রিভুজ বৃত্তখণ্ডের অৰ্দ্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।
এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে যে, অন্য অন্য ত্রিভুজ গুলি বৃত্ত-খণ্ড সকলের অৰ্দ্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর ;
অতএব এই সকল ত্রিভুজের সমষ্টি, সমস্ত বৃত্তখণ্ডের সমষ্টির অৰ্দ্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর।

আবার ঙট, টচ ইত্যাদি চাপ দ্বিখণ্ড করিয়া ত্রিভুজ সকল অঙ্কিত করিলে, এই ত্রিভুজ গুলি একত্র যোগে, যে যে বৃত্তখণ্ডের অন্তর্গত হইয়াছে, তাহাদের সমষ্টির অৰ্দ্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

এই রূপ প্রক্রিয়া দ্বারা ও প্রতিপাদিত উপপ্রতিজ্ঞা অনুসারে, যদি ত্রিভুজ সকল ক্রমাগত বিয়োগ করা যায়, তবে পরিশেষে এপ্রকার কতিপয় বৃত্তখণ্ড অবশিষ্ট থাকিবে, যাহাদের সমষ্টি ঙচছজ বৃত্তের ও ধ ক্ষেত্রের অন্তর অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

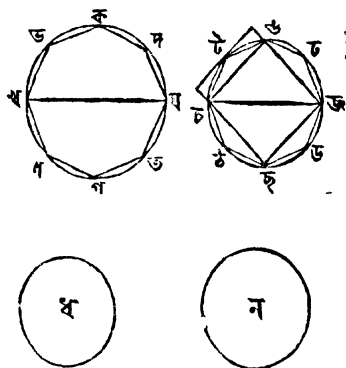
ঙট, টচ, চঠ, ঠছ, ছড, ডজ, জঢ ও ঢঙ যেন উক্ত রূপ অবশিষ্ট কতিপয় বৃত্তখণ্ড, অর্থাৎ ইহাদের সমষ্টি ঙচছজ বৃত্তের ও ধ ক্ষেত্রের অন্তর অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ;
অতএব বৃত্তের অবশিষ্ট অংশ, অর্থাৎ ঙটচঠছডজঢ বহু-ভুজ, ধ ক্ষেত্র অপেক্ষা বৃহত্তর।

ঙটচঠছডজঢ বহুভুজের সদৃশ কভখণগতঘদ বহু-ভুজ কখগঘ বৃত্তের অন্তর্গত কর ;
তাহা হইলে কভখণগতঘদ বহুভুজে ঙটচঠছডজঢ বহু-ভুজে যে রূপ, খঘএর উপর সমচতুর্ভুজে চজএর উপর সমচতুর্ভুজে সেই রূপ, [১২শ, ১।
অর্থাৎ কখগঘ বৃত্তে ধ ক্ষেত্রে সেই রূপ ; [কং ; ৫ম, ১১।
আর কভখণগতঘদ বহুভুজ কখগঘ বৃত্তের অন্তর্গত হইয়াছে বলিয়া উহা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর,
অতএব ঙটচঠছডজঢ বহুভুজ ধ ক্ষেত্র অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ;
কিন্তু পূর্ব্বে উপপন্ন হইয়াছে যে, ইহা ধ অপেক্ষা বৃহত্তর ;
অতএব এরূপ হওয়া অসম্ভব ;
অর্থাৎ খঘএর উপর সমচতুর্ভুজে চজএর উপর সমতুর্ভুজে যে অনুপাত, কখগঘ বৃত্তে ঙচছজ বৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোন ক্ষেত্রে সেই অনুপাত হইতে পারে না।

এই রূপে উপপন্ন হইবে যে, চজএর উপর সমচতুর্ভুজে খঘএর উপর সমচতুর্ভুজে যে অনুপাত, ঙচছজ বৃত্তে কখগঘ বৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোন ক্ষেত্রে সেই অনুপাত হইতে পারে না।

আবার খঘএর উপর সমচতুর্ভুজে চজএর উপর সম-চতুর্ভুজে যে অনুপাত, কখগঘ বৃত্তে ঙচছজ বৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর কোন ক্ষেত্রে সেই অনুপাত হইতে পারে না।
যদি এরূপ সম্ভব হয়, তাহা হইলে সমচতুর্ভুজ দ্বয়ে পরস্পর যে অনুপাত, কখগঘ বৃত্তে ঙচছজ বৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর ন ক্ষেত্রে যেন সেই অনুপাত হইল ;

তাহা হইলে বিলোমে, চজএর উপর সমচতুর্ভুজে খঘএর উপর সমচতুর্ভুজে যে অনুপাত, ন ক্ষেত্রে কখগঘ বৃত্তে সেই অনুপাত;

আর ন ক্ষেত্র ঙচছজ বৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে, ন ক্ষেত্রে কখগঘ বৃত্তে যে অনুপাত, ঙচছজ বৃত্তে কখগঘ বৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোন ক্ষেত্রে সেই অনুপাত। [৫ম, ১৪।

এই হেতু চজএর উপর সমচতুর্ভুজে খঘএর উপর সমচতুর্ভুজে যে অনুপাত, ঙচছজ বৃত্তে কখগঘ বৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোন ক্ষেত্রে সেই অনুপাত;

কিন্তু এরূপ হওয়া যে অসম্ভব, তাহা পূর্ব্বে প্রতিপন্ন হইয়াছে।

অতএব খঘএর উপর সমচতুর্ভুজে চজএর উপর সমচতুর্ভুজে যে অনুপাত, কখগঘ বৃত্তে ঙচছজ বৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর কোন ক্ষেত্রে সেই অনুপাত হইতে পারে না;

আর পূর্ব্বে সপ্রমাণ হইয়াছে যে, খঘএর উপর সমচতুর্ভুজে চজএর উপর সমচতুর্ভুজে যে অনুপাত, কখগঘ বৃত্তে ঙচছজ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোন ক্ষেত্রে সেই অনুপাত হইতে পারে না;

সুতরাং খঘএর উপর সমচতুর্ভুজে চজএর উপর সমচতুর্ভুজে যে অনুপাত, কখগঘ বৃত্তে ঙচছজ বৃত্তে সেই অনুপাত।

অতএব বৃত্ত সকলের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—২। এমন একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার ক্ষেত্রফল কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সহিত কোন নির্দ্দিষ্ট অনুপাত বিশিষ্ট হয়।

৩। ঐককেন্দ্রিক কতকগুলি বৃত্ত অঙ্কিত করিয়া একটী নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে কতিপয় সমান সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

৪। কোন বৃত্তের ক্ষেত্রফল ও ব্যাসার্দ্ধ জানা আছে; এই বৃত্তের অষ্টগুণ অন্য এক বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ স্থির করিতে হইবে।

৫। কোন বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ জানা আছে; এই বৃত্তের তিন গুণ ও ঐককেন্দ্রিক আর একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

৬। এক নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে এমন কতিপয় অংশে বিভক্ত করিতে হইবে, যেন প্রত্যেক অংশের পরিমিতি বৃত্ত পরিধির সমান হয়।

৭। কখগ সমকোণী ত্রিভুজের কগ কর্ণের উপর কচখছগ অর্দ্ধ বৃত্ত এবং কখ ও খগ বাহুর উপর কঘখ ও খঙগ অর্দ্ধ বৃত্ত দ্বয় অঙ্কিত হইয়াছে; প্রমাণ কর যে, কচখঘ ও খছগঙ অর্দ্ধ চন্দ্রাকৃতি ক্ষেত্র দ্বয় একত্র যোগে কখগ ত্রিভুজের সমান হইবে।

৮। কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের কখ ও ঘগ ব্যাস পরস্পরের সহিত সমকোণ করিয়াছে; ঘথ অথবা থক ব্যাসার্দ্ধ বিশিষ্ট এক বৃত্তের কঙখ পরিধি খণ্ড; প্রমাণ কর যে, কঘখগ অর্দ্ধ চন্দ্রাকৃতি ক্ষেত্র = কঘগ ত্রিভুজ।

৯। এক অর্দ্ধবৃত্তের ব্যাসকে দুই ভাগে বিভক্ত করিয়া যদি তাহাদের উপর আর দুইটী অর্দ্ধবৃত্ত প্রথমোক্ত ক্ষেত্রের অভ্যন্তরে অঙ্কিত করা যায়, তবে তিনটী অর্দ্ধবৃত্তের পরিধির মধ্যস্থিত ক্ষেত্র, ব্যাসের দুই খণ্ডের মধ্য সমানুপাতী রেখার উপর অঙ্কিত বৃত্তের সমান হইবে।

১০। কোন বর্ত্তুল এক সমতল দ্বারা ছেদিত হইলে, প্রত্যেক ছেদজ বৃত্ত ক্ষেত্র হইবে।

১১। একটী বৃত্ত অন্য এক বৃত্তকে অন্তরে স্পর্শ করিলে ক্ষুদ্র বৃত্তের বহিস্থ অর্দ্ধচন্দ্রাকৃতি ক্ষেত্র যেন এই বৃত্তের দ্বিগুণ হইল; দুই বৃত্তের ব্যাসের অনুপাত স্থির কর।

১২। এক বৃত্তের ব্যাসের কোন দুই খণ্ডকে ব্যাস স্বরূপ লইয়া আর এক একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, যেন বৃহৎ বৃত্তের অবশিষ্ট অংশ ঐ দুইটী ক্ষুদ্র বৃত্তের মধ্যে একটীর সমান হইল; ব্যাসের দুই খণ্ডের অনুপাত স্থির করিতে হইবে।

১৩। কোন বৃত্তপাদের একটী ব্যাসার্দ্ধের উপর এক অর্দ্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর ও অন্য ব্যাসার্দ্ধের উপর আর একটী অর্দ্ধবৃত্ত এরূপে অঙ্কিত কর, যেন ইহা বৃত্তপাদকে ও প্রথম অঙ্কিত অর্দ্ধবৃত্তকে স্পর্শ করে। এই তিনটীর মধ্যস্থিত ক্ষেত্রের অন্তর্গত বৃত্তের ও নির্দ্দিষ্ট বৃত্তপাদের ক্ষেত্রফলের তুলনা করিতে হইবে।

১৪। কোন সমকোণী ত্রিভুজের সম কোণ হইতে কর্ণের উপর লম্ব টানিলে, যে দুইটী ত্রিভুজ জন্মে, তাহাদের অন্তর্গত দুই বৃত্তের পরস্পর যে অনুপাত, এই দুইটী ত্রিভুজেরও পরস্পর সেই অনুপাত।

১৫। কোন সমচতুর্ভুজের অভ্যন্তরে যদি চারিটী সমান সমান বৃত্ত এরূপে অঙ্কিত করা যায় যে, তাহারা পরস্পর ও সমচতুর্ভুজের এক একটী বাহু স্পর্শ করে, তবে এই চারিটী বৃত্ত একত্র যোগে সমচতুর্ভুজের অন্তর্গত বৃত্তের সমান হইবে।

১৬। আয়ত ক্ষেত্রের কর্ণ দ্বয়ের উপর অঙ্কিত অর্দ্ধবৃত্ত দ্বয় একত্র যোগে, চারিটী বাহুর উপর অঙ্কিত অর্দ্ধবৃত্ত চতুষ্টয়ের সমান।

১৭। বর্ত্তুলের অন্তর্গত ও তাহার পৃষ্ঠ পর্য্যন্ত বিস্তৃত সমান সমান সরল রেখা গুলি কেন্দ্র হইতে সম দূরবর্ত্তী।

১৮। সমান্তর সমতল দ্বয় যদি কোন বর্ত্তুলকে এরূপে ছেদ করে যে, ছেদজ বৃত্ত গুলি পরস্পর সমান হয়, তবে সমতল দুইটী কেন্দ্র হইতে সমদূরে থাকিবে।

১৯। এক সরল রেখা বা একটী সমতল একাধিক বিন্দুতে কোন বর্ত্তুলকে স্পর্শ করিতে পারে না; আর বর্ত্তুলের ব্যাসার্দ্ধ, স্পর্শক রেখা বা সমতলের সহিত স্পর্শ বিন্দুতে সম কোণ উৎপন্ন করে।

২০। একটী সমচতুর্ভুজিক ঘন ক্ষেত্র কোন বর্ত্তুলের অন্তর্গত করিলে, তিনে একে যে অনুপাত, ব্যাসের উপর অঙ্কিত বর্গ ক্ষেত্রে, সমচতুর্ভুজিক ঘন ক্ষেত্রের এক ভুজের উপর অঙ্কিত বর্গ ক্ষেত্রে সেই অনুপাত।

১২শ অধ্যায়।

ব্যাখ্যা ও পরিশিষ্ট।

ইউক্লিড ১২শ অধ্যায়ে ছেদিত ঘনক্ষেত্র, স্তম্ভ, সূচি ও বৃত্তসূচির বিষয় লিখিয়াছেন। এই সকল ঘনক্ষেত্রের প্রকৃতি ও পরস্পর সম্বন্ধ নির্ণয় করিবার জন্য এক নূতন প্রণালী অবলম্বন করিয়াছেন, ইহাকে "বিয়োগ বিধি"* বলা যাইতে পারে।

ইউক্লিড ১ম অধ্যায়ে সরল রৈখিক ক্ষেত্র সকলের পরস্পর সর্ব্বতোভাবে সমানত্ব স্থির করিবার জন্য একটী ত্রিভুজ অপরের উপর স্থাপন করিয়া তাহারা সর্ব্বতোভাবে মিলিত হয়, কি না, তাহা দর্শাইয়াছেন। অনন্তর সম্পূর্ণ রূপে মিলিত না হইলে কি রূপে ত্রিভুজ, চতুর্ভুজাদির ক্ষেত্রফলের তুলনা করা যাইতে পারে, তাহা প্রদর্শন করিয়াছেন।

তিনি ৬ষ্ঠ অধ্যায়ে সদৃশ ত্রিভুজ গুলির সবর্গীয় বাহুর দ্বিঘাত অনুপাত দ্বারা তাহাদের ক্ষেত্রফলের তুলনা করিয়াছেন; পরে, সদৃশ বহুভুজ গুলিকে সদৃশ ত্রিভুজ সমূহে বিভক্ত করিয়া প্রতিপন্ন করিয়াছেন যে, তাহাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত সবর্গীয় বাহুর দ্বিঘাত অনুপাতানুসারে হইয়া থাকে এবং ১১শ অধ্যায়ে সদৃশ ঘনক্ষেত্র সকলের ঘন ফল যে তাহাদের সবর্গীয় বাহুর অনুপাতের ত্রিঘাত অনুপাতানুসারে হইয়া থাকে, তাহা প্রদর্শন করিয়াছেন।

কোন ক্ষেত্র হইতে তাহার অংশগুলি ক্রমাগত বিয়োগ করার নাম, "বিয়োগ বিধি" এইরূপ বিয়োগ এ প্রকারে সম্পন্ন করা যাইতে পারে যে, পরিশেষে সেইটীর কিছুই

---

* "The methed of Exhaustions."

অবশিষ্ট থাকিবে না। ইউক্লিড এই বিয়োগ বিধি ১০ম অধ্যায়ের ১ম প্রতিজ্ঞায় প্রদর্শন করিয়াছেন। এই বিধির প্রয়োগ দ্বারা গ্রীস দেশীয় পণ্ডিতেরা নানাবিধ সরল রৈখিক ও ঘনক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ও ঘন ফল স্থির করিয়াছেন। এই সকল ফল স্থির করিবার নিমিত্ত ইহা যে একটী উৎকৃষ্ট ও অব্যর্থ উপায়, তাহার সন্দেহ নাই; কিন্তু ইহা বহু পরিশ্রম সিদ্ধ ও জটিল; এজন্য গণিত বেত্তারা এক্ষণে ইহা পরিত্যাগ করিয়া ভিন্ন উপায় অবলম্বন করিয়াছেন। বিয়োগ বিধির উদাহরণ স্বরূপ ১২শ অধ্যায়ের ২য় প্রতিজ্ঞাটী এক্ষণে যাবতীয় বিদ্যালয়ে পঠিত হয়; অন্যান্য প্রতিজ্ঞা পঠিত হয় না এজন্য পরিত্যক্ত হইল।

এই অধ্যায়ের প্রারম্ভে যে উপপ্রতিজ্ঞাটী লিখিত হইয়াছে, তাহা ইউক্লিড কৃত দশমের ১ম প্রতিজ্ঞা। দ্বাদশের দ্বিতীয় প্রতিজ্ঞা ইহার সাহায্যে সপ্রমাণ হইয়াছে।

অনুশীলনার্থ বিবিধ প্রতিজ্ঞা।

১। যদি কোন ত্রিভুজের তিন বাহুর সহিত এক মুখে সমান সমান কোণ করিয়া তিনটী রেখা টানা যায়, তবে এই তিন রেখা দ্বারা যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে, তাহা নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের সদৃশ হইবে।

২। কোন ত্রিভুজের খকগ শীর্ষকোণের দ্বিখণ্ড কারক রেখার উপর খঘ ও গঙ দুই লম্ব টান ও খগ ভূমিকে চ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর; তাহা হইলে চঘ = চঙ।

৩। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণ হইতে, ভূমির উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সম্মুখীন দুই কোণ পর্য্যন্ত দুইটী রেখা টানিয়া তাহাদের ও কর্ণ দ্বয়ের ছেদজ বিন্দু দ্বয় সংযুক্ত করিয়া দিলে, এই সংযোজক রেখা ত্রিভুজের ভূমির সমান্তর হইবে।

৪। প্রথম অধ্যায়ের ৪৭এর প্রতিজ্ঞার চিত্রে খগ, চট ও ছজ এই তিন রেখা বৃদ্ধি করিলে তাহারা একই বিন্দুতে মিলিত হইবে।

৫। এক সমবাহু ত্রিভুজের অভ্যন্তরীণ যে কোন বিন্দু হইতে তিন বাহুর উপর এক একটী করিয়া লম্ব টানিলে, তাহাদের সমষ্টি কোন একটী কৌণিক বিন্দু হইতে সম্মুখীন বাহুর লম্বের সমান হইবে। যদি বিন্দুটী কোন এক বাহুস্থিত হয়, তবে এই প্রতিজ্ঞা সত্য কি না?

৬। কখগঘ সমান্তরিকের আধার সমতলস্থিত ব কোন বিন্দু; প্রতিপন্ন কর যে, বখঘ ত্রিভুজ বকখ ও বখগ ত্রিভুজের সমষ্টির সমান।

৭। কোন ত্রিভুজের ক, খ ও গ কোণের সম্মুখীন তিনটী বাহু যেন অ, ই এবং উ; যদি ক কোণ সমকোণ হয় আর ক হইতে খগএর উপর লম্বের দৈর্ঘ যদি দ হয়, তাহা হইলে ই + উ, দ এবং অ + দ এই তিনটী যে ত্রিভুজের বাহু, সেইটী সমকোণী ত্রিভুজ হইবে।

৮। যে ত্রিভুজের তিন বাহুর পরিমাণ ক, খ ও গ তাহার শৃঙ্গ হইতে গ ভুজের উপর লম্বের পরিমাণ স্থির কর; আর যদি এই তিন ভুজের সমষ্টির অর্দ্ধেকের পরিমাণ স হয়, তবে প্রতিপন্ন কর যে,

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{\{স (স - ক)(স - খ)(স - গ)\}}$।

৯। যদি এক সমবাহু ত্রিভুজের তিন কৌণিক বিন্দু পরস্পর সমান্তর তিন রেখাতে থাকে আর ঐ তিন রেখার মধ্যবর্ত্তীটির অন্য দুইটী হইতে দুরত্বের পরিমাণ যদি খ ও গ হয়, তবে

ত্রিভুজের ভুজ পরিমাণ $= ২\sqrt{\frac{খ^২ + খগ + গ^২}{৩}}$।

১০। যদি কোন পঞ্চভুজের বাহুগুলির উভয় পার্শ্ব বর্দ্ধিত করা যায় ও বর্দ্ধিত বাহু গুলি যদি পরস্পর সংলগ্ন হয়, তাহা হইলে যে কোণ গুলি উৎপন্ন হইবে, তাহাদের সমষ্টি দুই সম কোণের সমান হইবে; আর যদি কোন বহুভুজের ভুজ সংখ্যা স + ৪ হয়, তবে উক্ত রূপে উৎপন্ন কোণ গুলির সমষ্টি ২স পরিমিত সম কোণের সমান হইবে।

১১। প্রতিপন্ন কর যে, নিয়মিত বহুভুজ গুলির মধ্যে কেবল ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ এবং ষড়্ভুজ দ্বারা কোন বিন্দুর চতুর্দ্দিকের স্থান পরিপূরণ হইতে পারে।

১২। প্রথম অধ্যায়ের ৪৭এর প্রতিজ্ঞায় উল্লিখিত সমচতুর্ভুজ গুলিকে কি রূপে ছেদ করিয়া বৃহত্তর চতুর্ভুজের অংশ গুলির উপর ক্ষুদ্রতর দুইটীর অংশ গুলি স্থাপন করিলে তাহারা পরস্পর সমান হইবে?

১৩। কখগ ত্রিভুজের ভূমিস্থ ঘ কোন এক বিন্দু, কঘ সংযুক্ত করিয়া প্রতিপন্ন কর যে,

$$কখ^২.গঘ + কগ^২.খঘ = কঘ^২.খগ + খগ.খঘ.গঘ।$$

১৪। দুইটী বিন্দু নির্দ্দিষ্ট আছে; যদি আর কতিপয় বিন্দু এরূপে কল্পিত হয় যে, তাহাদের প্রত্যেকের ও নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দ্বয়ের সংযোজক দুইটী দুইটী রেখার উপর দুই সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিলে, তাহাদের সমষ্টি বা অন্তর অপরিবর্ত্তনীয় রাশি হয়, তবে উক্ত রূপ বিন্দু গুলি দ্বারা যে যে ক্ষেত্র উৎপন্ন হইবে, তাহা স্থির কর।

১৫। কখ রেখা স্থিত গ কোন বিন্দু; প্রথমত গখতে ও পরে বর্দ্ধিত গখতে ঘ বিন্দু এরূপে কল্পনা কর, যেন গঘ অংশ কঘ ও খঘএর মধ্য সমানুপাতী হয়।

১৬। কখ রেখা গ বিন্দুতে অন্ত্য ও মধ্য সমানুপাতী রূপে ছেদিত হইয়াছে; দুই খণ্ডের মধ্যে বৃহত্তর খগকে বর্দ্ধিত করিয়া খঘকে খগএর সমান কর আর খগ হইতে কগএর সমান খঙ অংশ ছেদ কর; তাহা হইলে, কঘ ও কঙ এই দুই রেখাও খ ও গ বিন্দুতে অন্ত্য ও মধ্য সমানুপাতী রূপে ছেদিত হইবে।

১৭। কখগঘ বিষম চতুর্ভুজের কঘ ও খগ ভুজ দ্বয় পরস্পর সমান্তর; প্রতিপন্ন কর যে,

কগ² ∽ খঘ² : কখ² ∽ গঘ² : : খগ + কঘ : খগ ∽ কঘ।

১৮। বৈজিক প্রণালী অবলম্বন পূর্ব্বক ক অঙ্গুলি পরিমিত রেখাকে এরূপে বিভক্ত কর, যেন সমস্ত রেখার ও এক অংশের অন্তর্গত আয়ত অন্য অংশের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হয়। ইহাদ্বারা যে দ্বিবিধ উত্তর পাওয়া যাইবে, তন্মধ্যে একটী হইতে ইউক্লিডের এই প্রতিজ্ঞার অঙ্কন কিরূপে হইতে পারে, তাহা দেখাইয়া দাও আর অপর উত্তরের অর্থ বুঝাইয়া দাও।

১৯। দুই বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের যে অনুপাত, দুইএতে তিনেতে সেই অনুপাত; ইহাদের মধ্যে যদি একটী বৃত্ত অন্যটীকে অন্তরে স্পর্শ করে আর ক্ষুদ্র বৃত্তের কেন্দ্র হইতে যদি সাধারণ ব্যাসের উপর দিয়া লম্ব টানা যায়, তবে লম্ব যে দুই বিন্দুতে বৃহৎ বৃত্তকে ছেদ করিবে, তথা হইতে ক্ষুদ্র বৃত্তের দুইটী স্পর্শিনী টানিলে, তাহারা পরস্পর লম্বভাবাপন্ন হইবে।

২০। বৃত্তের অন্তর্গত কোন বহুভুজের ভুজ সংখ্যা যদি যুগ্ম রাশি হয়, তবে ১ম, ৩য়, ৫ম, ইত্যাদি কোণের সমষ্টি ২য়, ৪থ, ৬ঠ ইত্যাদি কোণের সমষ্টির সমান হইবে।

২১। কোন ত্রিভুজের কখ ও কগ ভুজের উপর খঘ ও গঘ লম্ব এবং কঘএর উপর গঙচ লম্ব টানা হইয়াছে; যদি গঙচ, কখকে ঙ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রতিপন্ন কর যে, কখগ ও কগঙ ত্রিভুজ পরস্পর সদৃশ।

২২। দুই বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ অ এবং ই; কখ তাহাদের কেন্দ্র সংযোজক রেখা গ বিন্দুতে এরূপে বিভক্ত হইয়াছে যে, কখ : অ+ই : : অ−ই : কগ−খগ, যদি গঘ, কখএর লম্ব হয়, তবে গঘএর কোন বিন্দু হইতে দুই বৃত্তের স্পর্শিনী টানিলে, তাহারা পরস্পর সমান হইবে।

২৩। এক বর্গ ক্ষেত্রের সমান এমন এক আয়ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার দুই সন্নিহিত বাহুর অন্তর এক নির্দ্দিষ্ট রেখার সমান হয়।

২৪। যদি এক বৃত্ত কখগ ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত হয় এবং কৌণিক বিন্দু গুলি হইতে সম্মুখীন বাহু গুলির উপর অঙ্কিত লম্ব রেখা গুলি বৃত্তকে ঘ, ঙ ও চ বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা হইলে ঘঙ, ঘচ ও ঙচ এই তিন চাপ যথাক্রমে গ, খ, ও ক বিন্দু দ্বারা দ্বিখণ্ড হইবে।

২৫। যদি কোন দুই বৃত্ত পরস্পরকে প বিন্দুতে বাহিরে স্পর্শ করে এবং কপখ, গপঘ দুই রেখা পরস্পর লম্বভাবে টানা যায় আর যদি চ ও ছ বিন্দুতে কেন্দ্র সংযোজক রেখা দুই বৃত্তকে ছেদ করে তবে কখ^{2} + গঘ^{2} = চছ^{2}।

২৬। কমখ একটী বৃত্তপাদ; যদি বৃত্তপাদের থদ জ্যা, কখএর সমান্তর হয় এবং মক ও মখ রেখাদ্বয়কে ধ ও ন বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা হইলে ধথ^{2} + থন^{2} = কখ^{2}।

২৭। এমন এক বিন্দু স্থির করিতে হইবে, যাহা হইতে দুই নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের স্পর্শিনী টানিলে তাহাদের অন্তর্গত কোণ একটী নির্দ্দিষ্ট কোণের সমান হয়।

২৮। যদি কোন বৃত্ত পরিধিস্থ এক বিন্দু হইতে অন্তর্গত

ত্রিভুজের তিন বাহুর উপর তিনটী লম্ব টানা যায়; তবে সম্পাত বিন্দু ত্রয় একই রেখাতে থাকিবে।

২৯। কখ, কগ, ঘঙ ও ঘচ এই চারিটি রেখার মধ্যে তিনটী তিনটীর পরস্পর সম্পাতে চারিটী ত্রিভুজ উৎপন্ন হইয়াছে; প্রতিপন্ন কর যে, এই কয়টী ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত বৃত্ত গুলি একই বিন্দু দিয়া যাইবে।

৩০। যদি কোন ত্রিভুজের ভূমির উভয় পার্শ্ব এরূপে বর্দ্ধিত করা যায় যে, এক এক পার্শ্বের বর্দ্ধিত অংশ সন্নিহিত বাহুর সমান হয় আর বর্দ্ধিত ভূমির দুই প্রান্ত ও ত্রিভুজের শৃঙ্গ দিয়া একটী বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়, তবে শৃঙ্গ ও কেন্দ্র সংযোজক রেখা শৃঙ্গস্থ কোণকে দ্বিখণ্ড করিবে।

৩১। প্রমাণ কর যে, কোন বর্গ ক্ষেত্রের অর্দ্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর একটী ত্রিভুজ ঐ বর্গ ক্ষেত্রের অন্তর্গত করা যায় না।

৩২। কোন ত্রিভুজের ক, খ ও গ তিনটী বাহু; অ এবং ই ক্রমে উপরি অঙ্কিত ও অন্তর্গত বৃত্তের ব্যাস; প্রতিপন্ন কর যে

$$\text{ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{\text{কখগ}}{৪\,\text{অ}} = \frac{(\text{ক}+\text{খ}+\text{গ})\text{ই}}{২}\text{।}$$

৩৩। কখগঘ কোন বৃত্তের অন্তর্গত চতুর্ভুজ; প্রতিপন্ন কর যে, কগ : খঘ : : খক.কঘ + খগ.গঘ : কখ.খগ + কঘ.ঘগ।

৩৪। ক, খ, গ, ঘ, ঙ এই পাঁচ বিন্দুতে কোন বৃত্ত পরিধি পাঁচ সমান ভাগে বিভক্ত হইয়াছে, কগ, গঙ, ঙখ, খঘ ও ঘক সংযুক্ত করিয়া দিলে যে তারকাকৃতি ক্ষেত্র হইবে, তাহার কোণ সমষ্টি পাঁচ সম কোণের সমান।

৩৫। পঞ্চভুজ, ষড়্ভুজ, সপ্তভুজ, ও অষ্টভুজের ভুজ গুলি বৃদ্ধি করিয়া তারকাকৃতি ক্ষেত্র অঙ্কিত কর এবং ইহাদের মধ্যে এক একটী বহুভুজকে আধারস্বরূপ জ্ঞান করিয়া কত গুলি তারকাকৃতি ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে পারা যায়, তাহা স্থির কর।

৩৬। যদি কখ রেখা গ বিন্দুতে অন্ত্য ও মধ্য সমানুপাতী রূপে বিভক্ত হইয়া থাকে, তাহা হইলে কগ ও গখ পরস্পর দুঃ রাশি হইবে আর প্রতিপন্ন কর যে, কগ : গখ এই অনুপাতের আসন্নতর মান = ১৳।

৩৭। তৃতীয় অধ্যায়ের পঞ্চদশ প্রতিজ্ঞার প্রয়োগ দ্বারা প্রতিপন্ন কর যে, চারি রেখা সমানুপাতী হইলে, বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতমের সমষ্টি অন্য দুই রেখার সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

৩৮। যদি কোন ত্রিভুজের অভ্যন্তরীণ ম বিন্দু হইতে তিনটি বাহু পর্য্যন্ত মচ, মছ ও মজ রেখা টানা যায় এবং তিন কৌণিক বিন্দু হইতে ইহাদের সমান্তর কট, খঠ, ও গড রেখা টানা যায় তাহা হইলে প্রতিপন্ন কর যে, $\frac{\text{মচ}}{\text{কট}}+\frac{\text{মছ}}{\text{খঠ}}+\frac{\text{মজ}}{\text{গড}}=১$।

৩৯। কোন সমকোণী ত্রিভুজের কোটি ও কর্ণের সমষ্টি এবং ভূমি ও কর্ণের সমষ্টি নির্দ্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজটী অঙ্কিত কর।

৪০। যদি কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ক হয় আর যদি এই ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহু এরূপে বিভক্ত করা যায় যে, দুই অংশের যে অনুপাত, স তে একেতে সেই অনুপাত, তবে ছেদ বিন্দুত্রয় সংযুক্ত করিলে, যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে, তাহার ক্ষেত্রফল $=\frac{\text{স}^{২}-\text{স}+১}{(\text{স}+১)^{২}}\times\text{ক}$।

৪১। কোন বৃত্তের গঘ জ্যা এক নির্দ্দিষ্ট কখ সরল রেখার সমান্তর; কগ, ঙ বিন্দুতে এবং খঙ, চ বিন্দুতে নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে ছেদ করিতেছে; প্রতিপন্ন কর যে, ঘচ, কখ রেখাকে একটী অপরিবর্ত্তনীয় ছ বিন্দুতে ছেদ করিবে।

৪২। কোন ত্রিভুজের কখ ও কগ বাহুতে ড ও চ বিন্দু এবং ডচতে ত বিন্দু এরূপে কল্পনা কর, যেন $\frac{\text{খড}}{\text{কড}}=\frac{\text{কচ}}{\text{গচ}}=\frac{\text{তড}}{\text{তচ}}$

এক্ষণে প্রতিপন্ন কর যে, খতগ ত্রিভুজ, কডচ ত্রিভুজের দ্বিগুণ

৪৩। কখগ ত্রিভুজ কোন বৃত্তের অন্তর্গত হইয়াছে; গ ও খ বিন্দু দিয়া অঙ্কিত দুই স্পর্শিনীর সমান্তর কঘ ও কঙ রেখা দ্বয় টানিয়া প্রমাণ কর যে, খঙ : গঘ : : কখ^{২} : কগ^{২}।

৪৪। খ ও গ, কঘ রেখাস্থ দুই বিন্দু; এমন এক বিন্দু নির্ণয় কর, যেন তাহা হইতে ক, খ, গ ও ঘ পর্য্যন্ত চারি সরল রেখা

টানিলে, যথাক্রমে তাহাদের দুইটী দুইটীর অন্তর্গত কোণ গুলি সমান হয়।

৪৫। কোন বহুভুজের এক বাহুকে স অংশে বিভক্ত করিয়া, প্রত্যেক অংশের উপর বহুভুজের সদৃশ ও একরূপে অঙ্কিত ক্ষেত্র স্থাপন করিলে, ঐ প্রকার সমস্ত ক্ষেত্রের পরিমিতির সমষ্টি, নির্দ্দিষ্ট বহুভুজের পরিমিতির সমান হইবে; আর যদি বাহুর অংশ গুলি পরস্পর সমান হয়, তবে

ক্ষুদ্র বহুভুজ গুলির ক্ষেত্রফলের সমষ্টি $= \frac{১}{স}$ (বৃহৎ বহুভুজ)।

৪৬। কোন বৃত্তের অন্তর্গত নিয়মিত ষড়্ভুজ, সেই বৃত্তের উপর অঙ্কিত ও অন্তর্গত সমবাহু ত্রিভুজ দ্বয়ের মধ্য সমানুপাতী হইবে।

৪৭। যদি কোন অর্দ্ধবৃত্তের ব্যাসের উপর আর দুইটী সমান অর্দ্ধ বৃত্ত অঙ্কিত করা যায় এবং তিনটী অর্দ্ধবৃত্ত পরিধির মধ্যস্থানে একটী বৃত্ত আঁকা যায়, তবে ইহার ব্যাসে দুইটী সমান বৃত্তের একটীর ব্যাসে যে অনুপাত, দুইএ তিনে সেই অনুপাত।

৪৮। কখগঘ চতুর্ভুজের গ ও ঘ এই দুই কৌণিক বিন্দু এবং কর্ণদ্বয়ের ছেদ বিন্দু হইতে কখএর উপর গচ, ঘছ ও ঙজ লম্ব টানিয়া প্রমাণ কর যে,

$$\text{চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{১}{২}\,\text{কখ} \times \frac{\text{গচ}.\text{ঘছ}}{\text{ঙজ}}\,।$$

৪৯। যদি কঅ, খই ও গউ এই তিন রেখা, কোন ত্রিভুজের ক, খ ও গ এই তিন কোণ দ্বিখণ্ড করে, তবে

$$\text{কই}.\,\text{খউ}.\,\text{গক} = \frac{\text{অ}^২\text{ই}^২\text{উ}^২}{(\text{অ}+\text{ই})(\text{ই}+\text{উ})(\text{উ}+\text{অ})}\,।$$

৫০। যদি কোন অর্দ্ধবৃত্ত পরিধি, যে কোন তিন অংশে বিভক্ত হয় এবং তিনটী চাপের পরিমাণ ক, খ ও গ হয়, তবে $\text{অ}^৩ - (\text{ক}^২+\text{খ}^২+\text{গ}^২)\text{অ} = ২\text{কখগ}$, এই সমীকরণ হইতে ব্যাসের পরিমাণ স্থির হইবে।

৫১। কমগ বৃত্তপাদের পরিধির দুই সীমা হইতে সমান সমান

দূরে পরিধিস্থ খ ও ঘ দুই বিন্দু কল্পনা করিয়া মগএর উপর খছ ও ঘজ লম্ব টান; এক্ষণে প্রতিপন্ন কর যে, খছজঘ ক্ষেত্র, মখঘ বৃত্তচ্ছেদকের সমান হইবে।

৫২। ভিন্ন ভিন্ন বৃত্তের সদৃশ চাপ, তাহাদের ব্যাসার্দ্ধের এবং সদৃশ বৃত্তচ্ছেদক, ব্যাসার্দ্ধের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ গুলির সমানুপাতী হইয়া থাকে।

৫৩। প্রতিপন্ন কর যে, ভিন্ন ভিন্ন বৃত্তের কেন্দ্রস্থ বা পরিধিস্থ কোণ, যে সকল চাপের উপর দণ্ডায়মান থাকে, তাহাদের সমস্ত রূপে ও ব্যাসার্দ্ধ গুলির ব্যস্ত রূপে সমানুপাতী হয়।

৫৪। বৃত্তচ্ছেদকের কোণ সকল ব্যাসার্দ্ধ গুলির ব্যস্ত রূপে সমানুপাতী হইলে, বৃত্তচ্ছেদক গুলি সমান হইবে।

৫৫। কোন সরল রেখা এক বৃত্তের মধ্যে স্থাপিত হইলে, যদি তাহার এক প্রান্ত হইতে একটী ব্যাসার্দ্ধ টানা যায় ও সেই ব্যাসার্দ্ধকে ব্যাস করিয়া আর একটী বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়, তবে পূর্ব্বোক্ত সরল রেখা দ্বারা ছেদিত দুই বৃত্তের খণ্ডদ্বয় ৪ ও ১এর অনুপাতী হইবে।

৫৬। কোন সমচতুর্ভুজের চারি ভুজের মধ্য বিন্দু গুলি সংযুক্ত করিয়া আর একটী সমচতুর্ভুজ তাহার অন্তর্গত কর: আবার একটী সমচতুর্ভুজ দ্বিতীয় সমচতুর্ভুজের অন্তর্গত কর এবং এইরূপ করিতে থাক; এক্ষণে প্রতিপন্ন কর যে, যাবতীয় অন্তর্গত সমচতুর্ভুজ গুলির সমষ্টি প্রথম সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

৫৭। প্রতিপন্ন কর যে, বহিস্থ কোন বিন্দু হইতে এক বর্ত্তুলের যত গুলি স্পর্শিনী টানা যাইতে পারে, সকলেই পরস্পর সমান।

৫৮। যদি কখগ ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর মধ্য বিন্দু পর্য্যন্ত কচ, খছ ও গজ এই তিন রেখা টানা যায়, তাহা হইলে, কছ. খজ. গচ = কজ. খচ. গছ।

৫৯। উক্ত প্রতিজ্ঞায় যদি কছ, খছ ও গজ তিন বাহুর উপর লম্ব হয়, তাহা হইলেও কছ. খজ. গচ = কজ. খচ. গছ।

৬০। উক্ত প্রতিজ্ঞায় যদি কচ, খছ ও গজ রেখা ক, খ ও

গ কোণকে দ্বিখণ্ড করে, তাহা হইলেও কছ. খজ. গচ = কজ. খচ. গছ।

৬১। উক্ত প্রতিজ্ঞায় যদি চ, ছ ও জ, অন্তর্গত বৃত্তের ও ভুজত্রয়ের সংযোগ বিন্দু হয়, তাহা হইলেও কছ. খজ. গচ = কজ. খচ. গছ।

৬২। যদি কখগ ত্রিভুজের তিন কোণ হইতে একই ম বিন্দু দিয়া কচ, খছ ও গজ রেখা টানা যায়, তবে কছ. খজ. গচ = কজ.খচ.গছ; আর এই সমীকরণকে সত্য কল্পনা করিয়া প্রমাণ কর যে, কচ, খছ ও গজ একই বিন্দু দিয়া যাইবে।

৬৩। যদি কখগ ত্রিভুজের কখ ও কগ বাহু জ ও ছ বিন্দুতে সমানুপাতী রূপে বিভক্ত হয় এবং খগ বাহু চ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হয়; তাহা হইলে কচ, খছ ও গজ রেখা একই বিন্দু দিয়া যাইবে।

৬৪। ষষ্ঠ অধ্যায়ের ২য় প্রতিজ্ঞার প্রথম চিত্রে যদি খঙ ও গঘ, চ বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে, তবে বর্দ্ধিত কচ, খগকে দ্বিখণ্ড করিবে।

৬৫। যদি কোন সরল রেখা কোন ত্রিভুজের খগ, কগ, ও কখ বাহুকে চ ছ ও জ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে কছ. খজ. গচ = কজ.খচ.গছ; আর এই সমীকরণকে সত্য কল্পনা করিয়া প্রমাণ কর যে, চ, ছ ও জ বিন্দু একই সরল রেখাতে অবস্থিত হইয়াছে।

৬৬। যদি কোন ত্রিভুজের কখ বাহুকে ঘ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত করা যায় এবং কগ বাহু হইতে খঘএর সমান গচ অংশ ছেদ করা যায়, তবে কগতে কখতে যে অনুপাত, ঘচ রেখার দুই অংশে সেই অনুপাত; আর কচতে কঘতে যে অনুপাত, খগ রেখার দুই অংশে সেই অনুপাত হইবে।

৬৭। কখগ ত্রিভুজের তিনটী কৌণিক বিন্দু হইতে তাহার অভ্যন্তরে অন্য একটী বিন্দু দিয়া তিন রেখা টানিলে, যদি তাহারা তিন বাহুর সহিত যথাক্রমে চ, ছ ও জ বিন্দুতে সংলগ্ন হয়, এবং এই তিন বিন্দু দিয়া একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, যদি সেই বৃত্ত, বাহুত্রয়কে পুনরায় ট, ঠ ও ড বিন্দুতে ছেদ করে, তবে কট, খঠ ও গড একই বিন্দুতে সংলগ্ন হইবে।

৬৮। কোন ত্রিভুজের অভ্যন্তরীণ একটী বিন্দু দিয়া তিন কোণ হইতে সম্মুখীন বাহু পর্য্যন্ত তিনটী রেখা টানিয়া যদি বাহুত্রয়ের ছেদ বিন্দু গুলি সংযুক্ত করা যায়, তবে প্রথম অঙ্কিত রেখা গুলি, লয় সমানুপাতী রূপে বিভক্ত হইবে।

৬৯। কোন আমীন ক স্থান হইতে দূরবর্ত্তী দ নামক বস্তু দেখিতেছিলেন; যদি তিনি দকএর অভিমুখে খ বিন্দু নির্দ্দেশ করেন ও খ বিন্দু দিয়া অন্য দিকে গ ও ঘ বিন্দু নির্দ্দেশ করেন এবং কঘ ও গদএর সম্পাতে ঙ বিন্দু উৎপন্ন হয়, তবে

$$\text{কদ} = \frac{\text{কখ.গঘ.ঙক}}{\text{খগ.ঘঙ} - \text{কঙ.গঘ}}।$$

৭০। পূর্ব্ব প্রতিজ্ঞার চিত্রে কখগ ত্রিভুজ অঙ্কিত কর এবং দ বিন্দু দিয়া কগ ও খগকে ঘও ঙ বিন্দুতে ছেদ করে এরূপ এক সরল রেখা টান; তাহা হইলে, কঙ ও খঘএর ছেদ বিন্দু এবং গ বিন্দু দিয়া অন্য এক সরল রেখা টানিলে, যদি তাহা কখকে চ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে $\text{কদ} = \frac{\text{কখ.কচ}}{\text{খচ} - \text{কচ}}$।

৭১। বৃত্তের অন্তর্গত ত্রিভুজের তিন কৌণিক বিন্দু দিয় তিনটী স্পর্শিনী অঙ্কিত করিলে, প্রত্যেক স্পর্শিনী ও সম্মুখীন ত্রিভুজের বর্দ্ধিত বাহুর সম্পাতে যে বিন্দুত্রয় উৎপন্ন হইবে, তাহারা একই সরল রেখাতে থাকিবে।

৭২। কোন বৃত্তের অন্তর্গত ষড় ভুজের দুইটী দুইটী সম্মুখীন ভুজ বর্দ্ধিত করিলে, তাহাদের সম্পাত বিন্দু গুলি একই সরল রেখাতে থাকিবে।

৭৩। বৃত্তের অন্তর্গত ষড় ভুজের দুইটী দুইটী সম্মুখীন কৌণিক বিন্দুর সংযোজক রেখাত্রয় পরস্পরকে একই বিন্দুতে ছেদকরিবে।

৭৪। কোন ব্যক্তির চক্ষু ভূমি হইতে ছয় পাদ (ফুট) উচ্চ; তিনি সমধরাতলে দণ্ডায়মান হইলে চতুর্দ্দিকে তিন মাইল পর্য্যন্ত দেখিতে পান; ইহার দ্বারা প্রমাণ কর যে, পৃথিবীর ব্যাসার্দ্ধ প্রায় ৪০০০ মাইল।

৭৫। প্রতিপন্ন কর যে, নিয়মিত ঘন ক্ষেত্রের সংখ্যা পাঁচটী মাত্র হইতে পারে।

এই গ্রন্থে কতিপয় অপ্রচলিত এবং নূতন শব্দ ও বাক্য ব্যবহৃত হইয়াছে; সেই গুলি ইংরাজি অর্থ সহিত লিখিত হইল।

অঙ্কন ... ... Construction.
অন্তর সমানুপাত... ... Proportion by Division *(Dividendo.)*
অন্তর বিলোম সমানুপাত Proportion by Conversion *(Convertendo.)*
অষ্টভূমিক ঘন ক্ষেত্র ... Octahedron.
উপপ্রতিজ্ঞা... ... ... Lemma.
উপস্থাপন ... ... Superposition.
একান্তর কোণ ... ... The alternate angle.
একান্তর সমানুপাত ... Proportion by Permutation or alternation *(Alternando.)*
কল্পনা ... ... Hypothesis.
ক্রম সমানুপাত ... ... Proportion from Equality *(Ex equali.)*
খণ্ডিনী... ... ... Secant.
চতুর্ভূমিক ঘন ক্ষেত্র ... Tetrahedron.
ছেদিত ঘন ক্ষেত্র... ... Prism.
দ্বাদশ ভূমিক ঘন ক্ষেত্র Dodecahedron.
পরস্পর দৃঢ় রাশি ... Incommensurable Quantities.
পরিমিতি ... ... Perimeter.
প্রবৃদ্ধ কোণ... ... ... Re-entrant angle.
বিলোম বা ব্যুৎক্রম সমানুপাত ... ... Proportion by Inversion *(Invertendo.)*
বিপ্রত্ত ভাবাপন্ন ক্ষেত্র সকল Reciprocal Figures.
বিপ্রত্ত ভাবে সমানুপাতী Reciprocally Proportional.

বিয়োগ বিধি	The method of Exhaustions.
বিংশতি ভূমিক ঘন-ক্ষেত্র	Icosahedron.
ব্যতিক্রম সমানুপাত ...	Disorderly Proportion.
সমচতুর্ভুজিক ঘনক্ষেত্র	Cube.
সমতল	Plane Superfices.
সমদূর সমানুপাত ...	Proportion from equality of distance.
সমান্তর	Parallel.
সমান্তরিক	Parallelogram.
সমান্তর ভূমিক ঘন ক্ষেত্র	Parallelopiped.
সম্মিলিত অনুপাত ...	Compound Ratio.
স্পর্শিনী	Tangent.

অশুদ্ধি।

ষষ্ঠ অধ্যায়ের ২য় সংজ্ঞাতে "সমান সমান দুইটী" ইহার পরিবর্ত্তে "এক একটী" এই রূপ হইবে।